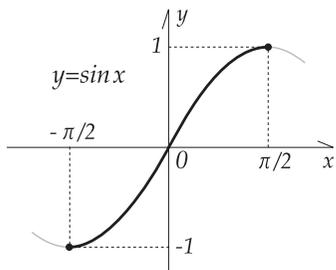


1 逆三角関数の導関数

1.1 逆三角関数

$\sin x$ は周期 2π の周期関数ですから普通の意味では $\sin x$ は逆関数を持ちません。



$\sin x$ は、例えば $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲内では 1 対 1 です (左図)。

そこで、あらかじめ $\sin x$ の定義域をこの範囲に制限したものを考えて、これを新しい関数だと思えば逆関数を考える事が出来るわけです。そのようにして得られる逆関数の事を、 $\text{Sin}^{-1}x$ と書きます。

この関数の事を arcsine (アークサイン) と呼んで $\text{Arcsin } x$ と書くこともあります。

	記法	定義
$\cos x$ の逆関数	$\text{Cos}^{-1}x$	$\cos x$ の定義域を $0 \leq x \leq \pi$ に制限したものの逆関数
$\sin x$ の逆関数	$\text{Sin}^{-1}x$	$\sin x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数
$\tan x$ の逆関数	$\text{Tan}^{-1}x$	$\tan x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数

問題 1.1.1 $\text{Cos}^{-1}x$ の導関数を求めて下さい。

【解答例】 $f(x) = \text{Cos}^{-1}x$ と置くと、 $\cos f(x) = x$ ですからこの両辺を x で微分すれば

$$\begin{aligned} \{-\sin f(x)\} f'(x) &= 1 \\ &= -\frac{1}{\sin f(x)} \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x) = 1$$

によれば

$$\sin^2 f(x) = 1 - \cos^2 f(x) = 1 - x^2$$

であり、また、 $f(x) = \text{Cos}^{-1}x$ は $\cos x$ の定義域を $0 \leq x \leq \pi$ に制限したものの逆関数なので $0 \leq f(x) \leq \pi$ であり、この範囲内においては $\sin f(x) \geq 0$ ですので

$$\sin f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

となり、結局

$$(\text{Cos}^{-1}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

である事が分かります。 □

1.2 Exercise

演習問題 1.1 $\text{Sin}^{-1}x, \text{Tan}^{-1}x$ の導関数を求めて下さい。

演習問題 1.2 次の各関数の導関数を求めて下さい。

(1) $(1 + x^2)\text{Tan}^{-1}x$ (2) $\frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \text{Sin}^{-1}x)$ (3) $\text{Sin}^{-1}\sqrt{1 - x^2}$

演習問題 1.3 (1) $k(x) = \text{Cos}^{-1}x + \text{Sin}^{-1}x$ とした時、 $k(x)$ の微分を計算して下さい。

(2) (1) の結果は何を意味しますか？

演習問題 1.4 (1) $h(x) = \text{Tan}^{-1}x + \text{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$ とした時、 $h(x)$ の微分を計算して下さい。

(2) 上の (1) の結果を見て $h(x)$ について何か考える事はありますか？

演習問題 1.5 (1) $\text{Tan}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right\}$ の導関数が $\frac{2}{4x^2 + (x - 1)^2}$ となる事を示して下さい。

(2) 上の (1) の結果を使って次の積分を求めて下さい：

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x - 1)^2} dx$$

(3) 上の (2) の結果を見て何か考える事はありますか？

演習問題 1.6 $\sin x$ の定義域を $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ に制限したものの逆関数を $f(x)$ とするとき、 $f(x)$ の導関数を求めてください。