2　逆三角関数の微分計算練習／π の数値計算

目標
C1. π の計算の歴史に Tan^{-1} が関わっていることを知っている C2. 逆三角関数の導関数を知っている
B1. 逆三角関数に関連した微分計算ができる 演習問題 2.1 B2. Tan^{-1} 系の公式を加法定理等により証明できる 演習問題 2.3
A1. π の計算の歴史を概観できる

2.1　逆三角関数の微分計算練習

演習問題 2.1 [教　問題 1.11] 次の関数を微分してください。

(1) $y = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{2}$　(2) $y = \mathrm{Cos}^{-1}2x$　(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}$　(4) $y = \left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)^2$

(5) $y = (4-x^2)\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{x}{2}$　(6) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2-1}$

(1)
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

(2)
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}$$

(3)
$$y' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

(4)
$$y' = 2\mathrm{Sin}^{-1}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(5)
$$y' = -2x\mathrm{Cos}^{-1}\frac{x}{2} + (4-x^2)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right)\frac{1}{2} = -2x\mathrm{Cos}^{-1}\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$$

(6)
$$y' = \frac{1}{1+x^2-1}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

□

演習問題 2.2 [教　問題 1.10] 次の式を証明してください。

(1) $\left(\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0)$　(2) $\left(\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{a}{x^2+a^2}$　$(a\neq 0)$

(1) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(2) $y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{a}{x^2+a^2}$ □

2.2　タンジェントの加法定理

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

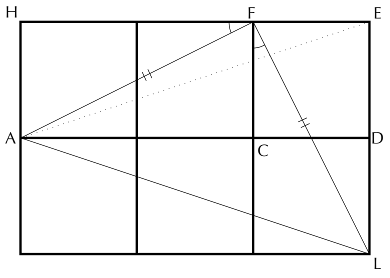
例えば $\tan\alpha = \frac{1}{2}, \tan\beta = \frac{1}{3}$ であれば、

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

となります。α, β が鋭角ならば $0 < \alpha+\beta < \pi$ なので、この範囲で tangent が 1 となる角は $\frac{\pi}{4}$ しかありません。つまり、

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

です。



演習問題 2.3 Tangent の加法定理を使って以下の各式を証明して下さい：

(1) $2\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$ （J. Hermann, 1706）

(2) $5\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}+2\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3}{79}=\dfrac{\pi}{4}$ （L. Euler, 1755）

(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{4}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{13}=\dfrac{\pi}{4}$ （F.C.M. Störmer, 1896）

【解答例】(2)

$$\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}=\frac{7}{24},\quad \frac{\frac{7}{24}+\frac{7}{24}}{1-\frac{7^2}{24^2}}=\frac{14\cdot 24}{24^2-7^2}=\frac{336}{527},\quad \frac{\frac{1}{7}+\frac{336}{527}}{1-\frac{336}{7\cdot 527}}=\frac{527+7\cdot 336}{7\cdot 527-336}=\frac{2879}{3353}$$

ですから、

$$5\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{7}=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2879}{3353}\quad \text{と}\quad \frac{\frac{3}{79}+\frac{3}{79}}{1-\frac{3^2}{79^2}}=\frac{6\cdot 79}{79^2-3^2}=\frac{474}{6232}$$

によれば、

$$2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{79}=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{474}{6232}$$

が分かり、

$$\frac{\frac{2879}{3353}+\frac{474}{6232}}{1-\frac{2879\cdot 474}{3353\cdot 6232}}=\frac{2879\cdot 6232+474\cdot 3353}{3353\cdot 6232-2879\cdot 474}=\frac{19531250}{19531250}=1$$

となって

$$5\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{7}+2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{79}=\mathrm{Tan}^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

が得られます（他も同様）。 □

2.3 π の数値計算

2.3.1 Gregory-Leibniz 級数

$\dfrac{1}{1+x^2}$ を積分すると、原始関数が $\mathrm{Tan}^{-1}x$ ですから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

となります。その一方で等比級数の和の公式：

$$1+r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}\qquad (|r|<1)$$

を使って変形してみると

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-\cdots$$

ですから

$$\pi=4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=4\int_0^1\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)dx=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$

となって π の級数表示として古くから良く知られている Gregory-Leibniz 級数が得られます。これによって π の近似計算が可能になります：

$$\pi=\underbrace{4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}}_{\text{近似値}}+\underbrace{\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\cdots\right)}_{\text{誤差}}.$$

しかし詳しく計算してみると下に示すようになかなか誤差が小さくなっていきません（MGL_n は、奇数 n に対して $\frac{4}{n}$ の項までの和を表します）：

n	1	3	5	7	9
GL_n	$4.000\ldots$	$3.466\ldots$	$3.339\ldots$	$3.283\ldots$	$3.252\ldots$

次にこの奇妙な積分はどうでしょう：

$$16\int_0^{\frac{1}{5}}\frac{1}{1+x^2}dx-4\int_0^{\frac{1}{239}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

訳の分からない式が出て来ましたが、原始関数は $\mathrm{Tan}^{-1}x$ でしたから

$$16\int_0^{\frac{1}{5}}\frac{1}{1+x^2}dx-4\int_0^{\frac{1}{239}}\frac{1}{1+x^2}dx=4\left(4\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}\right)$$

となっています。$\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $\tan$ が x になる様な角度のことでしたから、括弧の中身は、これを全部角度だと思ってしまえば、『$\tan$ が $\frac{1}{5}$ である様な角の 4 倍角から $\tan$ が $\frac{1}{239}$ である様な角を引いたもの』と読める事がわかります。

そこで $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}$ と置けば、$\tan$ の加法定理から、

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\theta = \frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12^2}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{144-25}{144}} = \frac{120}{119}$$

$$\tan\left(4\theta - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}\right) = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\cdot 239}} = \frac{120\cdot 239 - 119}{119\cdot 239 + 120} = 1$$

となって、結局この角 $4\theta - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$ は $\tan$ が 1 ですからこれは $\frac{\pi}{4}$ である事がわかります。従ってその４倍角は π ですから、めでたく

$$16\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+x^2}dx - 4\int_0^{\frac{1}{239}} \frac{1}{1+x^2}dx = 4\left(4\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}\right) = \pi$$

となります。

事実 2.3.1 [Gregory-Leibniz 級数 (Madhava,1350-1425; J.Gregory,1671; G.W.von Leibniz,1674) **]**

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots.$$

事実 2.3.2 [Machin の式 (J. Machin, 1706) **]**

$$\pi = 16\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - 4\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}.$$

ここでさっきと同じ様に級数展開して有限項までの和：

$$M_n = 16\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^{\frac{1}{5}} - 4\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^{\frac{1}{239}}$$

を計算すると、下表の様になっています：

$$M_1 = \underline{3.1}832635983264\ldots$$
$$M_3 = \underline{3.141}6210293251\ldots$$
$$M_5 = \underline{3.1415926}824044\ldots$$
$$M_7 = \underline{3.1415926536}236\ldots$$
$$M_9 = \underline{3.1415926535899}\ldots$$

これは結構良い近似ですね。最初に見た Madhava-Gregory-Leibniz 級数の有限和と比べれば少ない回数でより精度の高い数値が得られています。

2.3.2 π の数値計算の歴史

年代	桁数	計算方法	人物
手計算（多角形近似）の時代			
BC280-	2	96 角形	Ἀρχιμήδης（古ギリシア）
263-	5	3072 角形	劉徽（魏）
600-	7		祖沖之（南朝）
1540-	9	6×2^{16} 角形	F.Viète（フランク王国）
c1600	35	2^{62} 角形	L.van Ceulen（神聖ローマ帝国・オランダ）
手計算（逆タンジェント）の時代			
1665	16	arcsin	I.Newton（イングランド王国）
1706	100	Machin の公式	J.Machin（イングランド王国）
1794	136	Euler の公式	G.von Vega（神聖ローマ帝国・スロベニア）
1844	200	Strassnitzky の公式	L.K.S. von Strassnitzky（プロイセン王国）
1853	440	arctan	W.Rutherford（イングランド王国）
1946	620	arctan	D.F.Ferguson
電卓の時代			
1947	710	arctan	D.F. Ferguson
1947	819	Machin の公式	L.Smith、J.Wrench（USA）
コンピュータの時代			
1946	808	Machin の公式	Reitwiesner et al. (ENIAC,USA)
1949	2035	Machin の公式	Reitwiesner et al. (ENIAC,USA)
1958	10,000	Machin の公式	Genuys (IBM 704,USA)
1961	100,265	Störmer の公式	D.Shanks、Wrench (IBM 7090 ,USA)
1973	1,001,250	Gauß の公式	Guilloud、Bouyer (CDC 7600,USA)
1981	2,000,000	Klingenstierna の公式	三好、金田 (FACOM M-200, 日本)
スーパーコンピュータ日米開発競争の時代・逆タンジェント法の終焉			
1982	8,388,576	Gauß-Legendre 法	田村、金田 (HITAC M-280H, 日本)
1982	16,777,206	Gauß-Legendre 法	金田、吉野、田村 (HITAC M-280H, 日本)
1985	17,526,200	Ramanujan の公式	Gosper (Symbolics 3670,USA)
1986	29,360,111	Borwein 4 次の公式	Bailey (CRAY-2,USA)
1987	133,217,700	Gauß-Legendre 法	金田、田村、久保 et al. (NEC SX-2, 日本)
1988	201,326,551	Gauß-Legendre 法	金田、田村 (HITAC S-820/80, 日本)
1994	4,044,000,000	Chudnovsky の公式	Chudnovsky bros. (USA)
1995	6,442,450,938	Borwein4 次の公式	高橋、金田 (HITAC S-3800/480, 日本)
1996	8,000,000,000	Chudnovsky の公式	Chudnovsky bros. (USA)
1999	2 千億桁	Gauß-Legendre 法	高橋、金田 (HITACHI SR8000, 日本)
2002	1 兆 2 千万桁	arctan	金田 et al. (HITACHI SR8000/MPP, 日本)
2009	2 兆 5 千万桁	Gauß-Legendre 法	高橋 (T2K 筑波システム, 日本)

Takahashi の世界記録までは、世界記録レヴェルの数値計算といえばスーパーコンピュータが主役であり、主に合衆国と日本でスーパーコンピュータの熾烈な開発競争が繰り広げられました。

しかし 2009 年 12 月 31 日、F.Bellard は検算も含めて 131 日掛けて世界記録を更新する 2 兆 7000 億桁の計算に成功しましたが、何と普通のパソコン（Linux, Intel Core i7 2.93 GHz x 4core）によるものだったため、世界に大きな衝撃を与えました。

年代	桁数	人物
パソコンの時代（すべて Chudnovsky の公式）		
2009	2 兆 7 千億桁	F.Bellard (Core i7;2.93GHz x4, フランス)
2010	5 兆桁	A.J.Yee、S. 近藤 (Xeon X5680;3.33GHz x6x2, USA、日本)
2011	10 兆桁	A.J.Yee、S. 近藤 (Xeon X5680;3.33GHz x6x2, USA、日本)
2013	12 兆桁	A.J.Yee、S. 近藤 (Xeon E5-2690;2.9GHz x8x2, USA、日本)
2016	22 兆 ($=10^{12}\pi^{e}$) 桁	A.J.Yee、P.Trueb (Xeon E7-8890 x4, USA、スイス)
2019	31 兆 ($=10^{13}\pi$) 桁	A.J.Yee、E.H. 岩尾 (Google Cloud, USA、日本)
2020	50 兆桁	A.J.Yee、T.Mullican (Xeon E7-4880V2 x4, USA)
2021	62 兆 ($=2\cdot 10^{13}\pi$) 桁	A.JYee、Keller et al. (EPYC 7542 x2, ドイツ)
2022	100 兆桁	A.J.Yee、E.H. 岩尾 (Google Cloud, USA、日本)
2024	105 兆桁	A.J.Yee,J.Ranous et al. (EPYC 9754 x2, USA)
2024	202 兆桁（未公認？）	A.J.Yee,J.Ranous et al. (Xeon 8592+, USA)

更に 2010 年 8 月には、S.Kondo, A.J.Yee が一気に５兆桁までの計算に成功しました。これもパソコン（Windows Server, Intel Xeon X5680 3.33 GHz x 6core x 2CPU）によるものです (検算が簡素化されているため不十分との見方あり)。

どちらの場合も使用された近似式はインドの天才 S. Ramanujan の公式 (1914)：

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

を更に改良した高速型の D.V. and G.V. Chudnovsky の公式 (1989) でした：

$$\frac{1}{\pi}=12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591409+545140134n)}{(3n)!(n!)^3(640320)^{3n+\frac{3}{2}}}$$

具体的な計算を見ると下表の様にもの凄い早さで収束しています：

$$R_1=\underline{3.14159265358979}387799890582630601309421664\ldots$$
$$R_2=\underline{3.14159265358979323846264}906570275889815667\ldots$$
$$R_3=\underline{3.1415926535897932384626433832795}5527315997\ldots$$
$$R_4=\underline{3.14159265358979323846264338327950288419}766\ldots$$
$$C_1=\underline{3.1415926535897932384626433832}58735068847586\ldots$$
$$C_2=\underline{3.1415926535897932384626433832795028841971 6}\ldots$$

(C_n は Chudnovsky Bros. の公式の有限和によるものです)

その後も Yee とパートナーによって同様の計算は推し進められ、31 兆 4159 億 2653 万 5897 桁 (E.H.Iwao Google 2019)、50 兆桁 (T.Mullican 2020)、62 兆 8318 億 5307 万 1796 桁 (Graubuenden University of Applied Sciences 2021)、100 兆桁 (E.H.Iwao Google 2022) と続き、現在のところ円周率の数値計算の世界記録は、105 兆桁（J.Ranous、K.O'Brien、B.Beeler Feb, 2024）となっています。

遡れば、2002 年 11 月に東大の Y. Kanada が 1 兆 2411 億桁の驚異的な世界記録（当時）を叩き出した時の計算式は Tan^{-1} 系の公式（K.Takano, 1982）：

$$\pi=48\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{49}+128\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{57}-20\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}+48\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{110443}$$

でした。このタイプのアルゴリズムは Gauß-Legendre 法などに比べて速度的に劣っており、80 年代には使われなくなっていました。確かにこの時も実に 600 時間ほど掛かっています。

しかし 90 年代に Chudnovsky 兄弟との熾烈な世界記録合戦をくぐり抜けた Kanada は、低速アルゴリズムにも様々な面から追究の余地はあると考え、メモリの使い方の改善など技術的な革新を進めることによって往年の Tan^{-1} 法でも高速アルゴリズムと比べて遜色のない計算が出来る事を示しました。

実は半世紀ほど前（1949)、人類史上初めてコンピュータを用いた本格的な π の計算が行われ、あの真空管約 1 万 8000 本、重量 30t の ENIAC が 70 時間かけて小数点以下 2037 桁まで正しく π の値を求めた時に使われた計算式は、ほかでもない、今日見た Machin の Tan^{-1} の式

$$\pi=16\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}-4\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$$

だったんです。なんだかわくわくしませんか？

2.4 Exercise

演習問題 2.4 Tangent の加法定理を証明して下さい：

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

【解答例】

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

ですから辺々割れば、

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

が分かります。 □

演習問題 2.5

$$\tan\phi = \frac{1}{a+b}, \quad \tan\psi = \frac{b}{a^2+ab+1} \ (a,\, b > 0)$$

である時に $\tan(\phi+\psi)$ を計算して下さい（L. Euler, 1737)。

【解答例】

$$\frac{\frac{1}{a+b} + \frac{b}{a^2+ab+1}}{1 - \frac{b}{(a+b)(a^2+ab+1)}} = \frac{(a^2+ab+1)+b(a+b)}{(a+b)(a^2+ab+1)-b} = \frac{a^2+2ab+b^2+1}{a^3+a^2b+a+a^2b+ab^2} = \frac{1}{a}$$

により、$\tan(\phi+\psi)$ は $\frac{1}{a}$ です。 □

演習問題 2.6 演習問題 2.3 の各式と同じ様な式を他に見つけられますか？

【解答例】演習問題 2.5 の結果から、

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{a+b} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a^2+ab+1} = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{a}$$

となるので、例えば $a=2,\, b=1$ の時、

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{7} = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}$$

が分かります。

また、右辺を $\frac{\pi}{4}$ にしようとするならば $a=1$ とすれば良く、例えば $b=3$ とすると

$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{4} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$$

などが得られます。 □

演習問題 2.7 $\tan x = \tan(100x)$ の、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲での実数解の個数を求めてください。

【解答例】加法定理によれば

$$\tan(100x - x) = \frac{\tan(100x) - \tan x}{1 + \tan(100x)\tan x}$$

なので、$\tan x = \tan(100x)$ であることは $\tan(99x) = 0$ であることと同値ですから、これを満たす x を題意の範囲で求めればよく、

$$x = \frac{\pi}{99}, \frac{2\pi}{99}, \ldots, \frac{49\pi}{99}$$

の 49 個です。 □

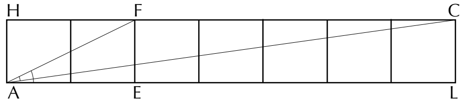
演習問題 2.8 $\tan 1^\circ$ は無理数である事を証明して下さい。

【解答例】もし $\tan 1^\circ$ が有理数なら、加法定理から $\tan 2^\circ$ も有理数となり、これを繰り返せば $\tan 30^\circ$ も有理数と云う事になりますが、$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であってこれは有理数ではありません。よって矛盾が生じるので $\tan 1^\circ$ が有理数であると言う最初の仮定は正しくありません。 □

演習問題 2.9 (1) 下図のように正方形がつながっているとき、

$$\angle FAC + \angle FAE = \frac{\pi}{4}$$

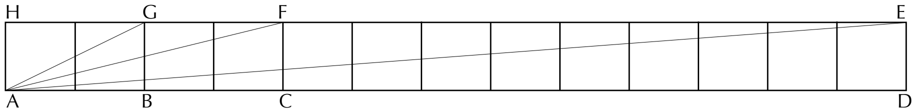
であることを証明してください（J. Hermann, 1706)。



(2) 下図のように正方形がつながっているとき、

$$\angle GAB + \angle FAC + \angle EAC = \frac{\pi}{4}$$

であることを証明してください（F.C.M. Störmer, 1896)。



(1)

$$\frac{(2+i)^2}{7+i} = \frac{(3+4i)(7-i)}{8} = \frac{25}{8}(1+i)$$

であり、また、$0 < \angle FAC, \angle FAE < \frac{\pi}{4}$ から $0 < \angle FAC + \angle FAE < \frac{\pi}{2}$ なのでこの範囲では、

$$\frac{\pi}{4} = \angle FAE + \angle FAE - \angle CAE = \angle FAC + \angle FAE$$

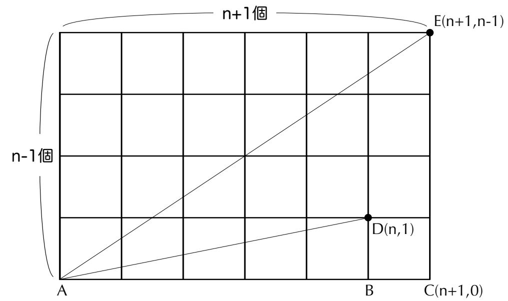
が分かります。

(2)

$$(2+i)(4+i)(13+i) = (7+6i)(13+i) = 85 + 85i$$

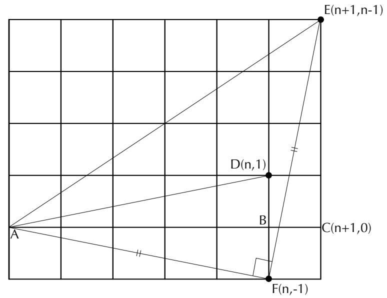
であり、また $\angle GAB, \angle FAC, \angle EAC < \frac{\pi}{4}$ から $0 < \angle GAB + \angle FAC + \angle EAC < \pi$ により、確かに成り立ちます。 □

演習問題 2.10 図のように正方形が縦に $n-1$ 個、横に $n+1$ 個並んでいるとき ($n > 2$)、$\angle EAB + \angle DAB = \frac{\pi}{4}$ であることを証明してください（L. Euler, 1737)。



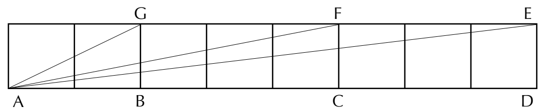
以下のように複素数の積、あるいは、初等幾何学によって証明されます。

$$\begin{aligned}(n+i)\{(n+1)+(n-1)i\} &= n(n+1) - (n-1) + \{n+1+n(n-1)\}i \\ &= n^2 + 1 + (n^2+1)i\end{aligned}$$



□

演習問題 2.11



図のように正方形がつながっているときに、

$$\angle GAD + \angle FAD + \angle EAD = \frac{\pi}{4}$$

であることを証明してください（L.K.S. von Strassnitzky, 1844)。

$\angle GAD = \alpha, \angle FAD = \beta, \angle EAD = \gamma$ とします。

【複素数で証明】

$$(2+i)(5+i)(8+i) = (9+7i)(8+i) = 65+65i$$

ですから $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ですが、$\alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$ なので $0 < \alpha+\beta+\gamma < \pi$ となり、この範囲では $\frac{\pi}{4}$ しかないので、題意は示されました。

【タンジェントの加法定理で証明】

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

なので、

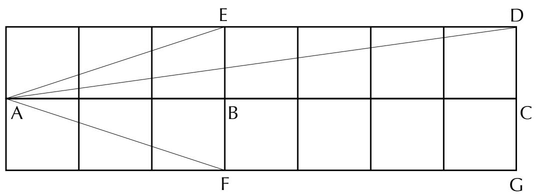
$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta) + \tan\gamma}{1 - \tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{72}} = \frac{65}{65} = 1$$

となり、また $\alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$ なので $0 < \alpha+\beta+\gamma < \pi$ となり、この範囲でタンジェントが 1 となる角度は $\frac{\pi}{4}$ しかないので、題意は示されました。 □

演習問題 2.12 図のように正方形がつながっているときに、

$$\angle EAF + \angle DAC = \frac{\pi}{4}$$

であることを証明してください (C.Hutton, 1776)。



$\angle EAB = \alpha, \angle EAF = \beta, \angle DAC = \gamma$ とします。

【複素数で証明】

$$(3+i)^2(7+i) = (8+6i)(7+i) = 50+50i$$

ですから $\beta+\gamma = \frac{\pi}{4} + n\pi$ と表せますが、$\beta < \frac{\pi}{2}, \gamma < \frac{\pi}{4}$ なので $0 < \beta+\gamma < \pi$ であり、この範囲内では $\frac{\pi}{4}$ しかないので、題意は示されました。

【タンジェントの加法定理で証明】$\tan\alpha = \frac{1}{3}$ ですから

$$\tan\beta = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

であって、

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{28}} = \frac{25}{25} = 1$$

が分かります。ここで $\beta < \frac{\pi}{2}, \gamma < \frac{\pi}{4}$ なので $0 < \beta+\gamma < \pi$ であり、この範囲内でタンジェントが 1 になるのは $\frac{\pi}{4}$ しかないので、題意は示されました。 □

演習問題 2.13* 平面の格子点を結んで三角形を作るとき、正三角形は作れないことを証明してください。

【複素数で証明】格子点 A, B, C が正三角形 $\triangle ABC$ を成していると仮定します。A, B, C に対応する複素数を z_A, z_B, z_C とすれば、

$$z_A - z_B = (z_C - z_B)\left\langle 1, \frac{\pi}{3} \right\rangle$$

となっていますが、z_A, z_B, z_C の実部・虚部は全て整数なので

$$z_A - z_B = l + im, \qquad z_C - z_B = L + iM$$

と書けるはずで (l, m, L, M は全て整数)、

$$\begin{aligned} l + im &= (L+iM)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}L - \frac{\sqrt{3}}{2}M + \left(\frac{1}{2}M + \frac{\sqrt{3}}{2}L\right)i \\ 2l + i2m &= (L - \sqrt{3}M) + (M + \sqrt{3}L)i \end{aligned}$$

となってしまいますから、$\sqrt{3}M, \sqrt{3}L$ は共に整数でなければならず、$L = M = 0$ です。しかしこれは B, C が同一点であることを意味し、仮定に矛盾します。従って、正三角形は作れません。

【タンジェントの加法定理で証明】格子点を結んで出来る角は、タンジェントが有理数であるような角度の和または差で書けますから、タンジェントの加法定理によればタンジェントが有理数にならなければなりません。従って $\frac{\pi}{3}$ は作れないことになりますから、当然正三角形も作れません。 □