

2 逆三角関数の微分計算練習／ π の数値計算

目標
C1. π の計算の歴史に $\tan^{-1}$ が関わっていることを知っている C2. 逆三角関数の導関数を知っている
B1. 逆三角関数に関連した微分計算ができる 演習問題 2.1
B2. $\tan^{-1}$ 系の公式を加法定理等により証明できる 演習問題 2.3
A1. π の計算の歴史を概観できる

2.1 逆三角関数の微分計算練習

演習問題 2.1 [教 問題 1.11] 次の関数を微分してください。

$$(1) y = \sin^{-1} \frac{x}{2} \quad (2) y = \cos^{-1} 2x \quad (3) y = \tan^{-1} \frac{1}{x} \quad (4) y = (\sin^{-1} x)^2$$

$$(5) y = (4 - x^2) \cos^{-1} \frac{x}{2} \quad (6) y = \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$$

演習問題 2.2 [教 問題 1.10] 次の式を証明してください。

$$(1) \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0) \quad (2) \left(\tan^{-1} \frac{x}{a} \right)' = \frac{a}{x^2 + a^2} \quad (a \neq 0)$$

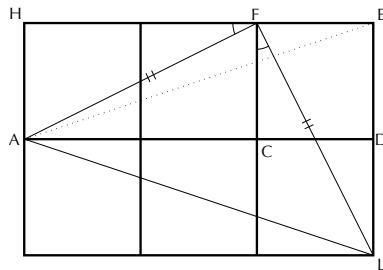
2.2 タンジェントの加法定理

例えば $\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = \frac{1}{3}$ であれば、

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

です。



演習問題 2.3 Tangent の加法定理を使って以下の各式を証明して下さい：

$$(1) 2 \tan^{-1} \frac{1}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{J. Hermann, 1706})$$

$$(2) 5 \tan^{-1} \frac{1}{7} + 2 \tan^{-1} \frac{3}{79} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{L. Euler, 1755})$$

$$(3) \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{13} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{F.C.M. Störmer, 1896})$$

2.3 π の数値計算

2.3.1 Gregory-Leibniz 級数

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}, \quad 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

$$\pi = 4 - \underbrace{\frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7}}_{\text{近似値}} + \underbrace{\left(\frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots \right)}_{\text{誤差}}.$$

n	1	3	5	7	9
GL_n	4.000...	3.466...	3.339...	3.283...	3.252...

$$16 \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int_0^{\frac{1}{239}} \frac{1}{1+x^2} dx = 4 \left(4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} \right) = \pi$$

$$M_1 = \underline{3.1832635983264} \dots$$

$$M_3 = \underline{3.1416210293251} \dots$$

$$M_5 = \underline{3.1415926824044} \dots$$

$$M_7 = \underline{3.1415926536236} \dots$$

$$M_9 = \underline{3.1415926535899} \dots$$

事実 2.3.1 [Gregory-Leibniz 級数 (Madhava,1350-1425; J.Gregory,1671; G.W.von Leibniz,1674)]

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots .$$

事実 2.3.2 [Machin の式 (J. Machin, 1706)]

$$\pi = 16 \text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} - 4 \text{Tan}^{-1} \frac{1}{239} .$$

2.3.2 π の数値計算の歴史

年代	桁数	計算方法	人物
手計算（多角形近似）の時代			
BC280-	2	96 角形	Ἀρχιμήδης (古ギリシア)
263-	5	3072 角形	劉徽 (魏)
600-	7		祖沖之 (南朝)
1540-	9	6×2^{16} 角形	F.Viète (フランク王国)
c1600	35	2^{62} 角形	L.van Ceulen (神聖ローマ帝国・オランダ)
手計算（逆タンジェント）の時代			
1665	16	arcsin	I.Newton (イングランド)
1706	100	Machin の公式	J.Machin (イングランド)
1794	136	Euler の公式	G.von Vega (神聖ローマ帝国・スロベニア)
1844	200	Strassnitzky の公式	L.K.S. von Strassnitzky (プロイセン)
1853	440	arctan	W.Rutherford (イングランド)
1946	620	arctan	D.F.Ferguson
電卓の時代			
1947	710	arctan	D.F. Ferguson
1947	819	Machin の公式	L.Smith、J.Wrench (USA)
コンピュータの時代			
1946	808	Machin の公式	Reitwiesner et al. (ENIAC,USA)
1949	2035	Machin の公式	Reitwiesner et al. (ENIAC,USA)
1958	10,000	Machin の公式	Genuys (IBM 704,USA)
1961	100,265	Störmer の公式	D.Shanks、Wrench (IBM 7090 ,USA)
1973	1,001,250	Gauß の公式	Guilloud、Bouyer (CDC 7600,USA)
1981	2,000,000	Klingenstierna の公式	三好、金田 (FACOM M-200, 日本)

年代	桁数	計算方法	人物
スーパーコンピュータ日米開発競争の時代・逆タンジェント法の終焉			
1982	8,388,576	Gauß-Legendre 法	田村、金田 (HITAC M-280H, 日本)
1982	16,777,206	Gauß-Legendre 法	金田、吉野、田村 (HITAC M-280H, 日本)
1985	17,526,200	Ramanujan の公式	Gosper (Symbolics 3670,USA)
1986	29,360,111	Borwein 4 次の公式	Bailey (CRAY-2,USA)
1987	133,217,700	Gauß-Legendre 法	金田、田村、久保 et al. (NEC SX-2, 日本)
1988	201,326,551	Gauß-Legendre 法	金田、田村 (HITAC S-820/80, 日本)
1994	4,044,000,000	Chudnovsky の公式	Chudnovsky bros. (USA)
1995	6,442,450,938	Borwein4 次の公式	高橋、金田 (HITAC S-3800/480, 日本)
1996	8,000,000,000	Chudnovsky の公式	Chudnovsky bros. (USA)
1999	2 千億桁	Gauß-Legendre 法	高橋、金田 (HITACHI SR8000, 日本)
2002	1 兆 2 千万桁	arctan	金田 et al. (HITACHI SR8000/MPP, 日本)
2009	2 兆 5 千万桁	Gauß-Legendre 法	高橋 (T2K 筑波システム, 日本)

年代	桁数	人物
パソコンの時代（すべて Chudnovsky の公式）		
2009	2 兆 7 千億桁	F.Bellard (Core i7;2.93GHz x4, フランス)
2010	5 兆桁	A.J.Yee、S. 近藤 (Xeon X5680;3.33GHz x6x2, USA、日本)
2011	10 兆桁	A.J.Yee、S. 近藤 (Xeon X5680;3.33GHz x6x2, USA、日本)
2013	12 兆桁	A.J.Yee、S. 近藤 (Xeon E5-2690;2.9GHz x8x2, USA、日本)
2016	22 兆 (= $10^{12} \pi^e$) 桁	A.J.Yee、P.Trueb (Xeon E7-8890 x4, USA、スイス)
2019	31 兆 (= $10^{13} \pi$) 桁	A.J.Yee、E.H. 岩尾 (Google Cloud, USA、日本)
2020	50 兆桁	A.J.Yee、T.Mullican (Xeon E7-4880V2 x4, USA)
2021	62 兆 (= $2 \cdot 10^{13} \pi$) 桁	A.J.Yee、Keller et al. (EPYC 7542 x2, ドイツ)
2022	100 兆桁	A.J.Yee、E.H. 岩尾 (Google Cloud, USA、日本)
2024	105 兆桁	A.J.Yee,J.Ranous et al. (EPYC 9754 x2, USA)
2024	202 兆桁 (未公認?)	A.J.Yee,J.Ranous et al. (Xeon 8592+, USA)

Ramanujan の公式 (1914) :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

D.V. and G.V. Chudnovsky の公式 (1989) :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n)!(n!)^3 (640320)^{3n+\frac{3}{2}}}$$

$$R_1 = 3.14159265358979387799890582630601309421664 \dots$$

$$R_2 = 3.14159265358979323846264906570275889815667 \dots$$

$$R_3 = 3.14159265358979323846264338327955527315997 \dots$$

$$R_4 = 3.14159265358979323846264338327950288419766 \dots$$

$$C_1 = 3.14159265358979323846264338358735068847586 \dots$$

$$C_2 = 3.14159265358979323846264338327950288419716 \dots$$

2.4 Exercise

演習問題 2.4 Tangent の加法定理を証明して下さい：

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

演習問題 2.5

$$\tan \phi = \frac{1}{a+b}, \quad \tan \psi = \frac{b}{a^2+ab+1} \quad (a, b > 0)$$

である時に $\tan(\phi + \psi)$ を計算して下さい (L. Euler, 1737)。

演習問題 2.6 演習問題 2.3 の各式と同じ様な式を他に見つかりますか？

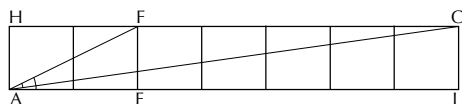
演習問題 2.7 $\tan x = \tan(100x)$ の、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲での実数解の個数を求めてください。

演習問題 2.8 $\tan 1^\circ$ は無理数である事を証明して下さい。

演習問題 2.9 (1) 下図のように正方形がつながっているとき、

$$\angle FAC + \angle FAE = \frac{\pi}{4}$$

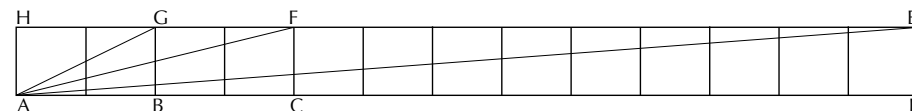
であることを証明してください (J. Hermann, 1706)。



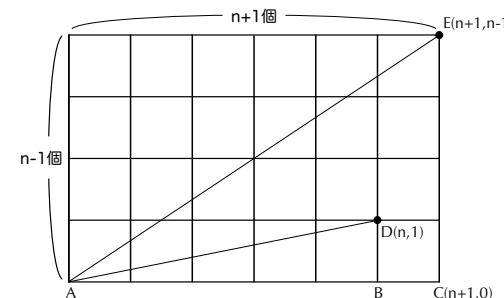
(2) 下図のように正方形がつながっているとき、

$$\angle GAB + \angle FAC + \angle EAC = \frac{\pi}{4}$$

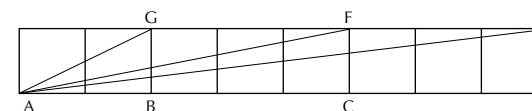
であることを証明してください (F.C.M. Störmer, 1896)。



演習問題 2.10 図のように正方形が縦に $n-1$ 個、横に $n+1$ 個並んでいるとき ($n > 2$)、 $\angle EAB + \angle DAB = \frac{\pi}{4}$ であることを証明してください (L. Euler, 1737)。



演習問題 2.11



図のように正方形がつながっているときに、

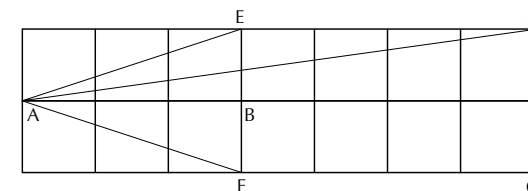
$$\angle GAD + \angle FAD + \angle EAD = \frac{\pi}{4}$$

であることを証明してください (L.K.S. von Strassnitzky, 1844)。

演習問題 2.12 図のように正方形がつながっているときに、

$$\angle EAF + \angle DAC = \frac{\pi}{4}$$

であることを証明してください (C.Hutton, 1776)。



演習問題 2.13* 平面の格子点を結んで三角形を作るとき、正三角形は作れないことを証明してください。