

### 3 微分法

| 目標                                   |
|--------------------------------------|
| C1. 簡単な微分計算ができる<br>演習問題 3.1          |
| B1. いろいろな関数の微分計算ができる<br>演習問題 3.6、3.7 |
| A1. 逆関数を求めて微分することができる<br>演習問題 3.2    |

#### 3.1 基本

事実 3.1.1 [ 基本的な関数の導関数 ]  $r(\neq 0), c$  は定数

$$\frac{d}{dx}c = 0 \quad \frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1} \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx}\text{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

事実 3.1.2

【線形性】  $a, b$  : 実数

$$\{af(x) + bg(x)\}' = af'(x) + bg'(x)$$

【積・商】

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

【合成関数】

$$(f \circ g)'(x) = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

2つの関数  $f(x), g(x)$  があって、 $g(x)$  の値域が  $f(x)$  の定義域に入っていればこの2つの関数を合成する事が出来ます。すなわち、変数  $x$  をまず  $g$  で  $g(x)$  に移し、更にこの  $g(x)$  を  $f$  で移せば  $f(g(x))$  に移ると、そう云うわけです。この2つの連続した操作を1つにまとめて考えたもの、つまり  $x$  を  $f(g(x))$  に移す関数と云うものを考えてそれを  $f$  と  $g$  の合成関数  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  と云うわけでした。

演習問題 3.1 次の関数を微分して下さい。

$$(1) f(x) = x^3(x^2 + 1)^3 \quad (2) f(x) = (x^4 + 2x^2 + 3)^2 \quad (3) f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$$

$$(4) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \quad (5) f(x) = x(2x^2 + 1)^{\frac{3}{4}} \quad (6) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(x^2 + 1)^3 + x^3 \cdot 3(x^2 + 1)^2(2x) \\ &= 3x^2(x^2 + 1)^2\{x^2 + 1 + 2x^2\} \\ &= 3x^2(x^2 + 1)^2(3x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad f'(x) = 2(x^4 + 2x^2 + 3)(4x^3 + 4x) = 8x(x^2 + 1)(x^4 + 2x^3 + 3)$$

$$(3) \quad f'(x) = \frac{2(1-x) - (2x+1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$(4) \quad f'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - (x+1)\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{2(x-1) - x - 1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{x-3}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$(5) \quad f'(x) = (2x^2 + 1)^{\frac{3}{4}} + x \cdot \frac{3}{4}(2x^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} \cdot 4x = \frac{(2x^2 + 1) + 3x^2}{(2x^2 + 1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{5x^2 + 1}{(2x^2 + 1)^{\frac{1}{4}}}.$$

$$(6) \quad f'(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{3(x+1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}^2 = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^4 \sqrt[3]{x-1}^2}.$$

### 3.2 逆関数の微分

関数  $f(x)$  が 1 対 1 であるとき逆関数  $f^{-1}(x)$  があります：

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

#### 3.2.1 逆関数を求めてしまう方法

$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  としたとき、

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

なので  $f(x)$  は単調増加であって、逆関数が存在します。

問題 3.2.1 関数  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  の導関数を求めて下さい。

$x$  と  $y$  を入れ替えて  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$  としてこれを  $y$  について解けば、

$$2x = e^y - e^{-y}$$

$$2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$0 = (e^y)^2 - 2xe^y - 1$$

$$= (e^y - x)^2 - x^2 - 1$$

$$(e^y - x)^2 = 1 + x^2$$

ここで

$$e^y - x = e^{-y} + x$$

ですから、 $x \geq 0$  のときは  $e^{-y} + x > 0$  により  $e^y - x > 0$  であり、 $x < 0$  のときは明らかに  $e^y - x > 0$  ですからいずれの場合も  $e^y - x \geq 0$  なので、

$$e^y - x = \sqrt{1 + x^2}$$

$$e^y = x + \sqrt{1 + x^2}$$

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

すなわち、

$$f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

です。これを微分してみると

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

です。

□

演習問題 3.2 関数  $f(x) = x^2 - 2x$  ( $x > 1$ ) の逆関数  $f^{-1}(x)$  の導関数を求めて下さい。

【解答例】変形すると

$$f(x) = (x-1)^2 - 1$$

ですから、この関数は  $x > 1$  で単調増加であり値域は  $(-1, \infty)$  です。従って逆関数が  $(-1, \infty)$  で定義され、ここからとった任意の  $x$  に対して  $f(y) = x$  となる  $y$  が存在し、

$$f(y) = (y-1)^2 - 1 = x$$

$$(y-1)^2 = x+1$$

$$y = \sqrt{x+1} + 1$$

により

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1$$

です。また

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1) > 0$$

によれば逆関数はその定義域全体で微分可能で

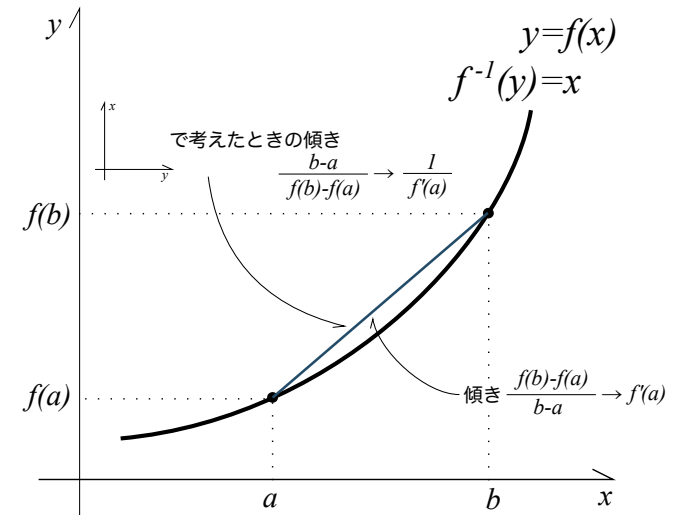
$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

です。

□

#### 3.2.2 一般的な計算

$f(x)$  が点  $a$  で微分可能であるとき、下図のように逆関数も点  $f(a)$  で微分可能であり、



$$\frac{df^{-1}}{dx}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

となります ( $f(x)$  は単調増／減少なので  $f'(x) \neq 0$ ) から、導関数は

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

となっています。

事実 3.2.2 1 対 1 の関数  $f(x)$  が微分可能であって  $f'(x) \neq 0$  ならば  $f^{-1}(x)$  も微分可能：

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

### 3.3 Exercise

演習問題 3.3 (1) 関数  $f(x)$  が、 $x = a$  において連続であることの定義を述べて下さい。

(2) 関数  $f(x)$  が、 $x = a$  において微分可能であることの定義と、 $f(x)$  の  $x = a$  での微分係数  $f'(a)$  の定義を述べて下さい。

定義 3.3.1 [ 連続性 ]  $\lim_{b \rightarrow a} f(b) = f(a)$  であるとき、関数  $f(x)$  は  $x = a$  で連続であると言います。

定義 3.3.2 [ 微分可能性 ] 関数  $f(x)$  は点  $x = a$  を含むある開区間の内部全体で定義されているとします。次の極限值：

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が有限値として存在するとき、関数  $f(x)$  は点  $x = a$  で微分可能であると言います。またこの存在する極限値のことを関数  $f(x)$  の点  $x = a$  における微分係数と言ひ、次の記号で表します：

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}.$$

$b - a = h$  と置けば、 $b \rightarrow a$  である事と  $h \rightarrow 0$  である事は全く同じ事です。だから上に書いた形ではなく、次の様な形：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

の極限値が存在することを示しても良いでしょう。

□

演習問題 3.4 次の関数の導関数を、導関数の定義に従って求めて下さい。

(1)  $f(x) = 2x^3 - x + 5$  (2)  $\sqrt{x}$  (3)  $\tan x$

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} &= \frac{2b^3 - b + 5 - 2x^3 + x - 5}{b - x} \\ &= \frac{2(b^3 - x^3) - (b - x)}{b - x} \\ &= \frac{2(b - x)(b^2 + bx + x^2) - (b - x)}{b - x} \\ &= 2(b^2 + bx + x^2) - 1 \\ &\rightarrow 6x^2 - 1 \quad (b \rightarrow x) \end{aligned}$$

従って

$$f'(x) = 6x^2 - 1$$

です。

(2)

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{(y - x)(\sqrt{y} + \sqrt{x})} = \frac{y - x}{(y - x)(\sqrt{y} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

により、

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

です。

(3)

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} &= \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h} \\ &= \frac{\tan x + \tan h - \tan x(1 - \tan x \tan h)}{h(1 - \tan x \tan h)} \\ &= \frac{\tan h + \tan^2 x \tan h}{h(1 - \tan x \tan h)} \\ &= \frac{\tan h}{h} \cdot \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan x \tan h} \\ &\rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

から

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

です。

□

演習問題 3.5 微分可能な関数は連続関数である事を証明して下さい。

$f(x)$  が微分可能であると仮定すると任意の  $a \neq b$  に対して

$$f(b) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) \rightarrow f'(a) \cdot 0 = 0 \quad (b \rightarrow a)$$

ですから連続です。

□

演習問題 3.6 次の関数を微分して下さい。

(1)  $\sin(e^x)$  (2)  $\log(e^x + e^{-x})$  (3)  $\log(\cos 2x)$  (4)  $\log(2 \sin x)$  (5)  $e^{\{(\log x)^2\}}$

(1)  $\{\sin(e^x)\}' = \cos(e^x) \cdot (e^x)' = e^x \cos(e^x).$

(2)  $\{\log(e^x + e^{-x})\}' = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot (e^x + e^{-x})' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \left( = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right).$

(3)

$\{\log(\cos 2x)\}' = \frac{1}{\cos 2x} \cdot (\cos 2x)' = \frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = -\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = -2 \tan 2x.$

(4)  $\{\log(2 \sin x)\}' = \frac{1}{2 \sin x} \cdot (2 \sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$

(5)  $y = e^{\{(\log x)^2\}}$  と置けば  $\log y = (\log x)^2$  であって、

$$(\log y)' = 2 \log x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2 \log x}{x}$$

$$y' = \frac{2 \log x}{x} \cdot y = (2 \log x) x^{\log x - 1}$$

です。

□

演習問題 3.7 次の関数を微分して下さい。

(1)  $\frac{1}{3} \cos^3 x \sin 3x$  (2)  $-\frac{1}{5} \cos^5 x \cos 5x$  (3)  $\frac{1}{n} \sin^n x \cos nx$

(4)  $\frac{1}{4} \cos^2 x \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{4} x$

(1)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{3} \cos^3 x \sin 3x \right)' &= \cos^2 x (-\sin x) \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x \\ &= \cos^2 x (\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) \\ &= \cos^2 x \cos 4x \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \left( -\frac{1}{5} \cos^5 x \cos 5x \right)' &= \cos^4 x \sin x \cos 5x + \cos^5 x \sin 5x \\ &= \cos^4 x (\sin x \cos 5x + \cos x \sin 5x) \\ &= \cos^4 x \sin 6x \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{n} \sin^n x \cos nx \right)' &= \sin^{n-1} x \cos x \cos nx - \sin^n x \sin nx \\ &= \sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) \\ &= \sin^{n-1} x \cos(n+1)x \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{4} \cos^2 x \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{4} x \right)' \\ &= -\frac{1}{2} \cos x \sin x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} (\cos 2x + 1) \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos^2 x + 2 \cos 2x) \\ &= \cos 2x \frac{\cos 2x + 1}{2} \\ &= \cos 2x \cos^2 x \end{aligned}$$

□

演習問題 3.8 次の関数の逆関数を求め、更にその導関数を求めてください。

$$(1) y = \frac{3x+4}{x+2} \quad (2) y = -\sqrt{x-1} + 2$$

(1)

$$\begin{aligned} x &= \frac{3y+4}{y+2} \\ x(y+2) &= 3y+4 \\ (x-3)y &= 4-2x \\ y &= \frac{4-2x}{x-3} \\ y' &= \frac{-2(x-3) - (4-2x) \cdot 1}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{y-1} + 2 \\ \sqrt{y-1} &= 2-x \\ y-1 &= (2-x)^2, \quad x \leq 2 \\ y &= (2-x)^2 + 1, \quad x \leq 2 \\ y' &= -2(2-x) = 2x-4 \end{aligned}$$

□

演習問題 3.9  $f(f^{-1}(x)) = x$  の両辺を  $x$  で微分することによって事実 3.2.2 の逆関数の導関数の式を導き出してください。

指示通りに微分すれば以下の通りです：

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= x \\ f'(f^{-1}(x))\{f^{-1}(x)\}' &= 1 \\ \{f^{-1}(x)\}' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \end{aligned}$$

□