3　微分法

目標
C1. 簡単な微分計算ができる 　演習問題 3.1
B1. いろいろな関数の微分計算ができる 　演習問題 3.6、3.7
A1. 逆関数を求めて微分することができる
演習問題 3.2

3.1　基本

事実 3.1.1 [基本的な関数の導関数]　$r(\neq 0), c$ **は定数**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^r = rx^{r-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|x| = \frac{1}{x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Cos}^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

事実 3.1.2

【線形性】a, b**：実数**

$$\{af(x)+bg(x)\}' = af'(x)+bg'(x)$$

【積・商】

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

【合成関数】

$$(f\circ g)'(x) = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

演習問題 3.1　次の関数を微分して下さい。

(1) $f(x) = x^3(x^2+1)^3$　(2) $f(x) = (x^4+2x^2+3)^2$　(3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$

(4) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$　(5) $f(x) = x(2x^2+1)^{\frac{3}{4}}$　(6) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

3.2　逆関数の微分

$$f(f^{-1}(x)) = x, \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

3.2.1　逆関数を求めてしまう方法

問題 3.2.1　関数 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ **の逆関数** $f^{-1}(x)$ **の導関数を求めて下さい。**

x と y を入れ替えて $x = \dfrac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}$ としてこれを y について解けば、

$$\begin{aligned}
2x &= \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y} \\
2x\mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^{2y} - 1 \\
0 &= (\mathrm{e}^y)^2 - 2x\mathrm{e}^y - 1 \\
&= (\mathrm{e}^y - x)^2 - x^2 - 1 \\
(\mathrm{e}^y - x)^2 &= 1 + x^2
\end{aligned}$$

ここで

$$\mathrm{e}^y - x = \mathrm{e}^{-y} + x$$

ですから、$x \geq 0$ のときは $\mathrm{e}^{-y} + x > 0$ により $\mathrm{e}^y - x > 0$ であり、$x < 0$ のときは明らかに $\mathrm{e}^y - x > 0$ ですからいずれの場合も $\mathrm{e}^y - x \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^y - x &= \sqrt{1+x^2} \\
\mathrm{e}^y &= x + \sqrt{1+x^2} \\
y &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

すなわち、

$$f^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

です。これを微分してみると

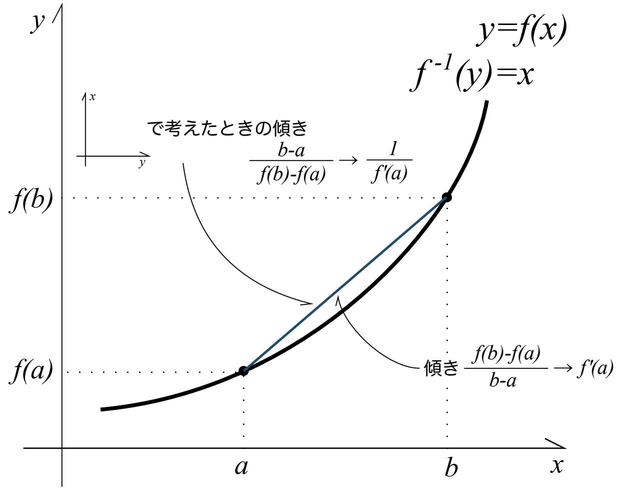
$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

です。 □

演習問題 3.2 関数 $f(x) = x^2 - 2x\,(x > 1)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数を求めて下さい。

3.2.2　一般的な計算

$f(x)$ が点 a で微分可能であるとき、下図のように逆関数も点 $f(a)$ で微分可能であり、



$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

となります（$f(x)$ は単調増／減少なので $f'(x) \neq 0$）から、導関数は

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

となっています。

事実 3.2.2 1対1の関数 $f(x)$ が微分可能であって $f'(x) \neq 0$ ならば $f^{-1}(x)$ も微分可能：

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

3.3　Exercise

演習問題 3.3 (1) 関数 $f(x)$ が、$x = a$ において連続であることの定義を述べて下さい。

(2) 関数 $f(x)$ が、$x = a$ において微分可能であることの定義と、$f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ の定義を述べて下さい。

演習問題 3.4 次の関数の導関数を、導関数の定義に従って求めて下さい。

(1) $f(x) = 2x^3 - x + 5$　(2) $\sqrt{x}$　(3) $\tan x$

演習問題 3.5 微分可能な関数は連続関数である事を証明して下さい。

演習問題 3.6 次の関数を微分して下さい。

(1) $\sin(\mathrm{e}^x)$　(2) $\log(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$　(3) $\log(\cos 2x)$　(4) $\log(2\sin x)$　(5) $\mathrm{e}^{\{(\log x)^2\}}$

演習問題 3.7 次の関数を微分して下さい。

(1) $\frac{1}{3}\cos^3 x \sin 3x$　(2) $-\frac{1}{5}\cos^5 x \cos 5x$　(3) $\frac{1}{n}\sin^n x \cos nx$

(4) $\frac{1}{4}\cos^2 x \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x$

演習問題 3.8 次の関数の逆関数を求め、更にその導関数を求めてください。

(1) $y = \dfrac{3x+4}{x+2}$　(2) $y = -\sqrt{x-1} + 2$

演習問題 3.9 $f(f^{-1}(x)) = x$ の両辺を x で微分することによって事実 3.2.2 の逆関数の導関数の式を導き出してください。