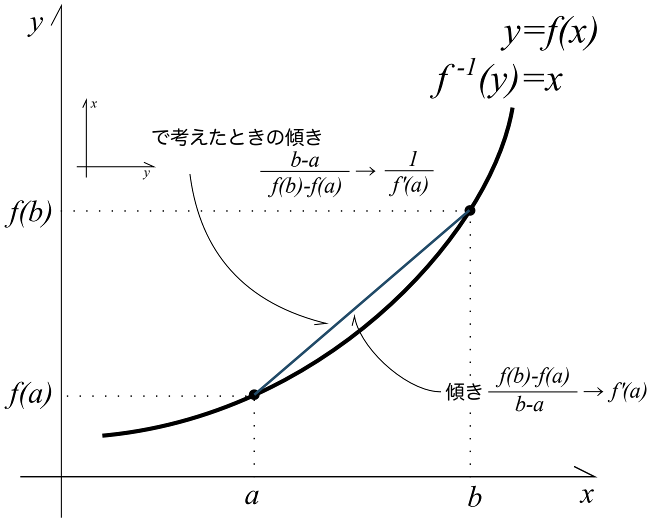
4 逆関数の導関数・双曲線関数

目標
B1. x, y の関係式において、x, y それぞれで微分する計算ができる 演習問題 4.2、4.3、4.4
B2. 双曲線関数を知っていて、基本的な計算ができる 演習問題 4.5、4.6
A1. 逆双曲線関数の微分計算ができる 演習問題 4.7、4.9

4.1 逆関数を求めない方法

$f(x)$ が点 a で微分可能であるとき、下図のように逆関数も点 $f(a)$ で微分可能であり、



$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

となります（$f(x)$ は単調増／減少なので $f'(x) \neq 0$）から、導関数は

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

となっています。

事実 4.1.1 **1 対 1 の関数 $f(x)$ が微分可能であって $f'(x) \neq 0$ ならば $f^{-1}(x)$ も微分可能：**

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

右辺を『きちんと』計算するには $f^{-1}(x)$ を求めて $f'(x)$ と合成しなければならないのですが、微分係数を求めるだけなら $f^{-1}(x)$ の具体形を求める必要はありません。

問題 4.1.2 **関数 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ の逆関数を $g(x)$ とするとき、$g'(f(\log 2))$ を求めて下さい。**

$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ であり、また、$g(f(\log 2)) = \log 2$ なので

$$g'(f(\log 2)) = \frac{1}{f'(\log 2)} = \frac{1}{\frac{2+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{4}{5}$$

です。

これは具体的に逆関数を求めて微分し：

$$g(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$
$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$f(\log 2) = \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ を代入した値：

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{4}{5}$$

に一致します。 □

演習問題 4.1 $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ について以下の問いに答えてください。

(1) $f(x)$ が 1 対 1 であることを示してください。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき、$g'(f(\log 2))$ を求めてください。

(3) $g(x)$ の具体的な形を求め、$g'(x)$ を求めてください。

(1)

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

であり、このとき

$$-1 < \tanh x < 1$$

また

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} > 0$$

ですから $f(x) = \tanh x$ は単調増加であり、従って 1 対 1 です。

(2) $f(g(x)) = x$ ですから両辺を微分して

$$\begin{aligned} f'(g(x))g'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \\ g'(f(\log 2)) &= \frac{1}{f'(g(f(\log 2)))} = \frac{1}{f'(\log 2)} = \frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{25}{16} \end{aligned}$$

です。

(3)

$$y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

において x, y を入れ替えれば

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}} \\ x(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}) &= \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y} \\ x(\mathrm{e}^{2y} + 1) &= \mathrm{e}^{2y} - 1 \\ x + 1 &= \mathrm{e}^{2y}(1-x) \\ \mathrm{e}^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\ 2y &= \log\frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

従って逆関数 $g(x)$ は

$$g(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

です。またその微分は

$$g'(x) = \frac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\}' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

です。 □

4.2 『x が入力、y が出力』に拘らない表現方法

１対１の関数 $y = f(x)$ があったとき、x と云う入力に対して y の値を出力していると考え、y を x で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

です。

また、逆に y を入力、x を出力だと思ったものが逆関数：

$$f^{-1}(y) = x$$

ですが、$f^{-1}(y)$ の具体形を求められないような場合には最初の形のままで両辺を y で微分して

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= f(x(y)) \\ 1 &= f'(x(y))x'(y) \\ x'(y) &= \frac{1}{f'(x(y))} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \end{aligned}$$

となります。

事実 4.2.1 関数 $y = f(x)$ が１対１、微分可能であって $f'(x)$ が 0 にならないとき、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

です。ただし、両辺共に y の関数であって、特に右辺は形式的に x で書かれていますが、その x は y の関数になっていると見ます。

この方法では $y=f(x)$ の逆関数は y を変数として表現され、結果はひとまず x の関数として現れます。本当はこの x の部分を $x=f^{-1}(y)$ を使って y 変数に直さなければなりませんが、敢えてそのままにする場合もあります。これをもって『逆関数が求まった』と考えて良いのかどうか微妙なところですが、この形でも十分役に立つ場合もあります。

問題 4.2.2 $y=x^2-2x\,(x>1)$ のとき、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ を x で表現して下さい。

x を $x(y)$ と思って両辺を y で微分すれば

$$\begin{aligned} y &= x(y)^2-2x(y) \\ 1 &= 2x(y)\frac{dx(y)}{dy}-2\frac{dx(y)}{dy} \\ 1 &= 2\left\{x(y)-1\right\}\frac{dx(y)}{dy} \\ \frac{dx(y)}{dy} &= \frac{1}{2\left\{x(y)-1\right\}} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{2(x-1)} \end{aligned}$$

を得ます。これが求める逆関数の導関数（の一つの表現方法）です。 □

これを変数である y を使って表すためには、逆関数 $x(y)$ の具体形を求めなくてはなりません。

演習問題 4.2 x と y に次の関係があるときに、x を y の関数と思って微分したもの $\dfrac{dx}{dy}$ を、x のみで表して下さい。ただし、どんな範囲において x が y の関数と思えるか（つまり、逆関数の存在する範囲）は気にしなくて結構です。

(1) $y=x^2$　　(2) $y=x^3+3x+5$　　(3) $y=\dfrac{x^2}{3x-1}$

(1)

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ 1 &= 2xx' \\ x' &= \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= x^3+3x+5 \\ 1 &= 3x^2x'+3x' \\ &= 3(x^2+1)x' \\ x' &= \frac{1}{3(x^2+1)}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{3x-1} \\ 1 &= \frac{2xx'(3x-1)-x^2\cdot 3x'}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}\cdot x' \\ x' &= \frac{(3x-1)^2}{x(3x-2)}. \end{aligned}$$

□

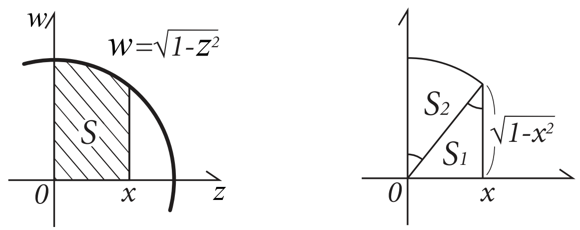
4.3　$\sqrt{1-x^2}$ の原始関数

$\mathrm{Sin}^{-1}x$ も $\sin x$ 同様何回でも微分出来る関数であって

$$\frac{\mathrm{dSin}^{-1}x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\mathrm{Sin}^{-1}x+C$$

であることをすでに学びました。これに関連して $\int\sqrt{1-x^2}dx$ がどうなるかも見ておきましょう。

原始関数は不定積分の形で書く事が出来、要するに $\int_0^x\sqrt{1-z^2}dz$ を計算すれば良いわけですが、積分が面積計算に関連していたことを思い出せばこれは下左図の領域の面積 S を計算しているのだと解釈することが出来ます：



注目すべきは曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ で、これは変形すれば $y^2=1-x^2$ すなわち $x^2+y^2=1$ を意味しますから円周です。そしてこの領域を上右図のように三角形と扇型の２つに分けてみると、まず三角形の面積 S_1 は明らかに $S_1=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ です。

また扇型の面積 S_2 は、半径が 1、中心角が sine が x であるような角度（鋭角)、すなわち $\mathrm{Sin}^{-1}x$ であることから $S_2=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \mathrm{Sin}^{-1}x$ となりますから

$$\int_0^x \sqrt{1-z^2}\,dz = S = S_1+S_2 = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}x \tag{4.1}$$

が得られます。

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1-x^2}+\mathrm{Sin}^{-1}x\right\}\right)' = \sqrt{1-x^2}.$$

4.4 双曲線関数

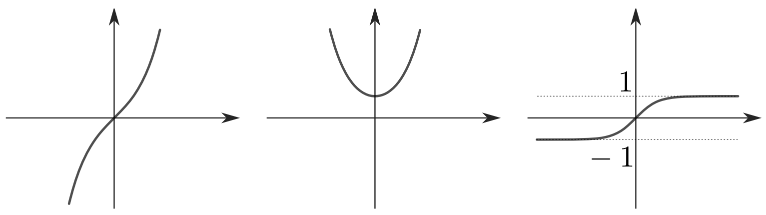
関数 $\sqrt{1-x^2}$ について曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ を考えると円周になっていたわけですが、同様のことを $\sqrt{1+x^2}$ について考えると、曲線 $y=\sqrt{1+x^2}$ を考えることになり、これは両辺自乗して

$$y^2=1+x^2 \quad \text{すなわち} \quad y^2-x^2=1$$

となって双曲線です。

円と三角関数は密接な関係にあり、式 (4.1) の右辺に $\mathrm{Sin}^{-1}x$ が出て来たのも扇型の面積が関わっていたわけです。これに対応して次で定義される双曲線関数はその名前が示す通り双曲線と密接な関係にあります：

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$



これは自明な関係式：$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ が示す通り、$(x,y)=(\sinh t,\cosh t)$ で双曲線 $y^2-x^2=1$ の（上半分の）パラメータ表示になっています。

事実 4.4.1 [双曲線関数の加法定理]

$$\sinh(\alpha\pm\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta\pm\cosh\alpha\sinh\beta$$
$$\cosh(\alpha\pm\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta\pm\sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\tanh(\alpha\pm\beta)=\frac{\tanh\alpha\pm\tanh\beta}{1\pm\tanh\alpha\tanh\beta}$$

事実 4.4.2 [双曲線関数の倍角定理]

$$\sinh 2\alpha = 2\sinh\alpha\cosh\alpha$$
$$\cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha+\sinh^2\alpha = 1+2\sinh^2\alpha = 2\cosh^2\alpha-1$$
$$\tanh 2\alpha = \frac{2\tanh\alpha}{1+\tanh^2\alpha}$$

事実 4.4.3 [双曲線関数の導関数]

$$(\sinh x)'=\cosh x,\quad (\cosh x)'=\sinh x,\quad (\tanh x)'=\frac{1}{\cosh^2 x}.$$

4.5 $\sinh x$ の逆関数とその微分

双曲正弦関数 $\sinh x$ の逆関数は、先に見たように

$$\sinh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

です。

$$(\sinh^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sinh^{-1}x+C.$$

これは何かを感じさせる結果ですね。

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (\sinh^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

じゃあ

$$\left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1-x^2}+\mathrm{Sin}^{-1}x\right\}\right)'=\sqrt{1-x^2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\sinh^{-1}x\right\}\right)'\overset{?}{=}\sqrt{1+x^2}$$

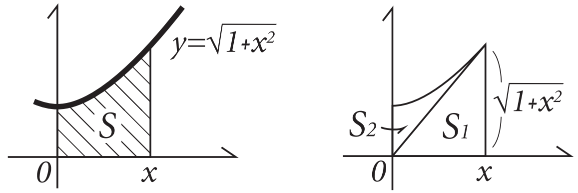
なんてことになっていやしないでしょうか？　実際に微分してみると

$$\left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\sinh^{-1}x\right\}\right)'=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1+x^2}+\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right\}=\sqrt{1+x^2}$$

ですから予想通りです。

4.5.1　幾何学的な視点から

$y=\sqrt{1+x^2}$ の表す曲線は先に見たように双曲線です。そこで今部分積分法によって得た式を幾何学的に面積によって理解するとしたらどうなるでしょうか。

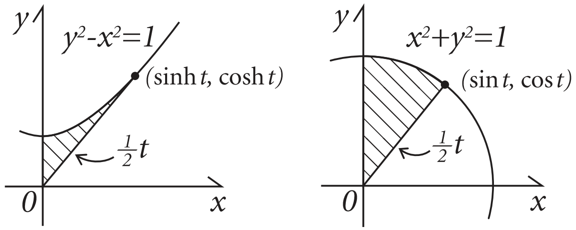


上の左の図の双曲線下の領域の面積 $S=\int_0^x\sqrt{1+z^2}dz$ は、右の図のように２つに分けて三角形の面積 S_1 と“双曲的扇型”の面積 S_2 の和と考えられますが、三角形の方は $S_1=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}$ なので、今得た積分の式と対応させると双曲的扇型の面積は $S_2=\frac{1}{2}\sinh^{-1}x$ となっているであろうことが分かります。

ここで双曲線 $y^2-x^2=1$ のパラメータ表示 $(x,y)=(\sinh t,\cosh t)$ を使って $x=\sinh t$ と置けば、

$$S_2=\frac{1}{2}\sinh^{-1}x=\frac{1}{2}\sinh^{-1}(\sinh t)=\frac{1}{2}t$$

となっており、これは下図のように円と扇型の場合と非常に良く似ています：



弧度法と云うものは対応する弧の長さによって角度を測ろうと云う考え方だと教わりましたが、この様に見てみると、むしろ扇型の面積によって角度を測ると考えた方が円と双曲線を統一的に眺めることが出来るようです。

hyperbolic sine、$\sinh x$ の逆関数のことを $\sinh^{-1}x$ で表す代わりに $\mathrm{arsinh}x$ と書く流儀もありますが、この場合の接頭語 ar-は面積（area）であって、$\mathrm{Arcsin}x$ としたときの arc が弧を表していた事と良い対照をなしています。

たまに $\mathrm{arcsinh}x$ と書いてあるものがありますが、これが正しくないことは分かる筈です。だって双曲線の長さを測っているわけではないので arc（弧）は関係ないですもんね。逆に $\mathrm{arcsin}x$ を誤って $\mathrm{arsin}x$ とするのは、意味を考えれば許せますね。

$$(\sinh^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\sinh^{-1}x\right\}\right)'=\sqrt{1+x^2}.$$

ただし、

$$\sinh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

4.6 Exercise

演習問題 4.3 [教科書　問題 1.6　改題] 次の関数の逆関数を y が入力で x が出力の形で捉えることにし、その導関数（x の y による微分）を x で表現して下さい。
(1) $y = x^3 - 3x \quad (x > 1)$　　(2) $y = \log(x^2+1) \quad (x \geq 0)$

(1) 変形すると

$$y = x(x^2-3)$$

ですから、この関数は $x > 1$ で単調増加であり、値域 $(-2, \infty)$ を定義域とした逆関数が存在します。

そこで逆関数を $x(y)$ と書けば、

$$\begin{aligned} y &= x(y)^3 - 3x(y) \\ 1 &= 3x(y)^2\frac{dx(y)}{dy} - 3\frac{dx(y)}{dy} \\ \frac{dx(y)}{dy} &= \frac{1}{3\{x(y)^2-1\}} \end{aligned}$$

ですから、求める逆関数の導関数（を x で表したもの）は、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3(x^2-1)}$$

です。

(2) この関数は定義域内で単調増加であり、値域は $[0, \infty)$ です。従ってこの値域を定義域とした逆関数が存在し、それを y を変数として $x(y)$ で表すことにします。

すると

$$\begin{aligned} y &= \log\{x(y)^2+1\} \\ 1 &= \frac{2x(y)\frac{dx(y)}{dy}}{x(y)^2+1} \\ \frac{dx(y)}{dy} &= \frac{x(y)^2+1}{2x(y)} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{x^2+1}{2x} \end{aligned}$$

が得られます。これが（y を変数とした）逆関数の導関数を x で表したものです。 □

演習問題 4.4 x, y が次の関係式を満たしているとき、$\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dy}$ を求めてください（それぞれ、x, y を使って表してください）。
(1) $x^2+y^2=1$　　(2) $x^2(x+2)=y^2$　　(3) $x^3-2x^2-xy-2y=0$

(1)

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ 2x+2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ 2x\frac{dx}{dy}+2y &= 0 \\ \frac{dx}{dy} &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^2(x+2) &= y^2 \\ 3x^2+4x &= 2y\frac{dy}{dx} \\ \frac{x(3x+4)}{2y} &= \frac{dy}{dx} \\ (3x^2+4x)\frac{dx}{dy} &= 2y \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{2y}{x(3x+4)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 0 &= x^3-2x^2-xy-2y \\ 0 &= 3x^2-4x-y-x\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2-4x-y}{x+2} \\ 0 &= 3x^2\frac{dx}{dy}-4x\frac{dx}{dy}-\frac{dx}{dy}y-x-2 \\ \frac{x+2}{3x^2-4x-y} &= \frac{dx}{dy} \end{aligned}$$

□

演習問題 4.5 双曲線関数の加法定理を証明してください。

$$
\begin{aligned}
&\sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta \\
&= \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2} \pm \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{\alpha+\beta} \pm e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} \mp e^{\alpha-\beta} - e^{-\alpha+\beta} \pm e^{-\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)} \mp e^{-(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{e^{\alpha\pm\beta}-e^{-(\alpha\pm\beta)}}{2} \\
&= \sinh(\alpha\pm\beta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta \\
&= \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2} \pm \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{\alpha+\beta} \pm e^{\alpha+\beta} + e^{\alpha-\beta} \mp e^{\alpha-\beta} + e^{-\alpha+\beta} \mp e^{-\alpha+\beta} + e^{-(\alpha+\beta)} \pm e^{-(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{e^{\alpha\pm\beta}+e^{-(\alpha\pm\beta)}}{2} \\
&= \cosh(\alpha\pm\beta)
\end{aligned}
$$

$$
\tanh(\alpha\pm\beta) = \frac{\sinh(\alpha\pm\beta)}{\cosh(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sinh\alpha\cosh\beta\pm\cosh\alpha\sinh\beta}{\cosh\alpha\cosh\beta\pm\sinh\alpha\sinh\beta} = \frac{\tanh\alpha\pm\tanh\beta}{1\pm\tanh\alpha\tanh\beta}
$$

□

演習問題 4.6 双曲線関数の導関数を求めてください。

$$
(\sinh x)' = \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x
$$

$$
(\cosh x)' = \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sinh x
$$

$$
(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}
$$

□

演習問題 4.7 $\cosh x\,(x \geq 0)$ の逆関数とその微分を求めてください。

$\cosh z \geq 1$ に注意します。

$$
\begin{aligned}
y &= \cosh x \quad (x \geq 0) \\
x &= \cosh y \quad (y \geq 0) \\
&= \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} \\
2xe^{y} &= e^{2y}+1 \\
0 &= e^{2y} - 2xe^{y} + 1 \\
&= (e^{y}-x)^2 - x^2 + 1 \\
x^2 - 1 &= (e^{y}-x)^2
\end{aligned}
$$

と変形されますが、ここで $y \geq 0$ によれば

$$
e^{y} - x = e^{y} - \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \geq 0
$$

ですから

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2-1} &= e^{y} - x \\
e^{y} &= x + \sqrt{x^2-1} \\
y &= \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geq 1)
\end{aligned}
$$

であることが分かり、これが $\cosh x$ の逆関数です。

従ってその微分は

$$
(\cosh^{-1} x)' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
$$

となります。

あるいは、逆関数を求めなくても微分を計算することは出来ます：

$$
\begin{aligned}
y &= \cosh x \quad (x \geq 0) \\
x &= \cosh y \quad (y \geq 0) \\
1 &= \sinh y y' \\
y' &= \frac{1}{\sinh y}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

であって、$y \geq 0$ のとき $\mathrm{e}^y \geq \mathrm{e}^{-y}$ により $\sinh y \geq 0$ ですから、

$$\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

が得られて、結局、

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

です。 □

演習問題 4.8 $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ を示してください。

$$1 - \tanh^2 x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

□

演習問題 4.9 $\tanh x$ の逆関数とその微分を求めてください。

$-1 < \tanh z < 1$ に注意します。

$$
\begin{aligned}
y &= \tanh x \\
x &= \tanh y \\
&= \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}} \\
x(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}) &= \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y} \\
x(\mathrm{e}^{2y} + 1) &= \mathrm{e}^{2y} - 1 \\
x + 1 &= (1 - x)\mathrm{e}^{2y} \\
\mathrm{e}^{2y} &= \frac{1 + x}{1 - x} \\
2y &= \log \frac{1 + x}{1 - x} \\
y &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \log(1 + x) - \frac{1}{2} \log(1 - x) \\
(\tanh^{-1} x)' &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x} \\
&= \frac{1}{1 - x^2}
\end{aligned}
$$

この場合も、$\tanh$ と $\cosh$ の関係を使って、逆関数を求めずに逆関数の微分を計算することも出来ます。やってみてください。 □