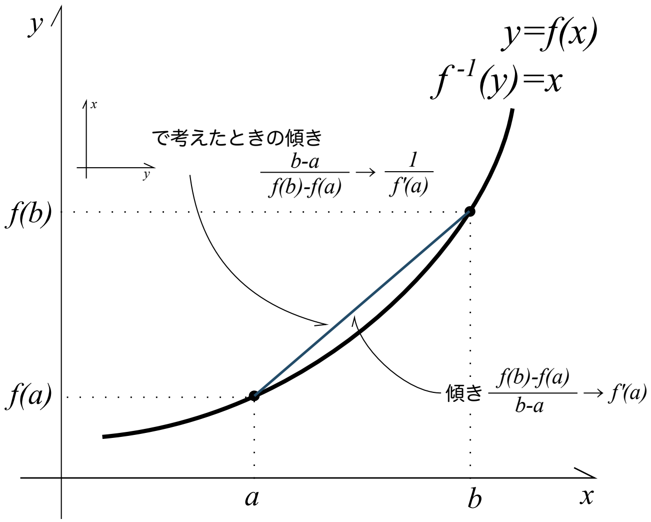
4　逆関数の導関数・双曲線関数

目標
B1. x, y の関係式において、x, y それぞれで微分する計算ができる 演習問題 4.2、4.3、4.4
B2. 双曲線関数を知っていて、基本的な計算ができる 演習問題 4.5、4.6
A1. 逆双曲線関数の微分計算ができる 演習問題 4.7、4.9

4.1　逆関数を求めない方法



事実 4.1.1　1 対 1 の関数 $f(x)$ が微分可能であって $f'(x) \neq 0$ ならば $f^{-1}(x)$ も微分可能：

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

問題 4.1.2　関数 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ の逆関数を $g(x)$ とするとき、$g'(f(\log 2))$ を求めて下さい。

$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ であり、また、$g(f(\log 2)) = \log 2$ なので

$$g'(f(\log 2)) = \frac{1}{f'(\log 2)} = \frac{1}{\frac{2+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{4}{5}$$

です。□

演習問題 4.1　$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ について以下の問いに答えてください。

(1) $f(x)$ が 1 対 1 であることを示してください。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき、$g'(f(\log 2))$ を求めてください。

(3) $g(x)$ の具体的な形を求め、$g'(x)$ を求めてください。

4.2　『x が入力、y が出力』に拘らない表現方法

事実 4.2.1　関数 $y = f(x)$ が 1 対 1、微分可能であって $f'(x)$ が 0 にならないとき、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

です。ただし、両辺共に y の関数であって、特に右辺は形式的に x で書かれていますが、その x は y の関数になっていると見ます。

問題 4.2.2　$y = x^2 - 2x\,(x > 1)$ のとき、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ を x で表現して下さい。

x を $x(y)$ と思って両辺を y で微分すれば

$$y = x(y)^2 - 2x(y)$$

$$1 = 2x(y)\frac{dx(y)}{dy} - 2\frac{dx(y)}{dy}$$
$$1 = 2\left\{x(y)-1\right\}\frac{dx(y)}{dy}$$
$$\frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{2\left\{x(y)-1\right\}}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(x-1)}$$

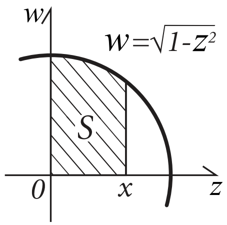
を得ます。これが求める逆関数の導関数（の一つの表現方法）です。 □

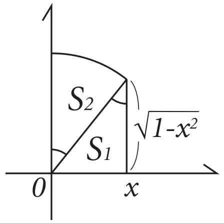
演習問題 4.2 x と y に次の関係があるときに、x を y の関数と思って微分したもの $\dfrac{dx}{dy}$ を、x のみで表して下さい。ただし、どんな範囲において x が y の関数と思えるか（つまり、逆関数の存在する範囲）は気にしなくて結構です。

(1) $y = x^2$　(2) $y = x^3 + 3x + 5$　(3) $y = \dfrac{x^2}{3x-1}$

4.3　$\sqrt{1-x^2}$ の原始関数

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{Sin}^{-1}x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \mathrm{Sin}^{-1}x + C$$





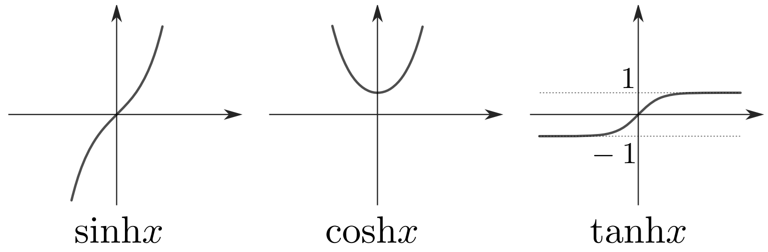
$$\int_0^x \sqrt{1-z^2}\,dz = S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}x \tag{4.1}$$

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{Sin}^{-1}x\right\}\right)' = \sqrt{1-x^2}.$$

4.4　双曲線関数

次で定義される双曲線関数はその名前が示す通り双曲線と密接な関係にあります：

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

事実 4.4.1 [双曲線関数の加法定理]

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$$
$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\tanh(\alpha \pm \beta) = \frac{\tanh\alpha \pm \tanh\beta}{1 \pm \tanh\alpha\tanh\beta}$$

事実 4.4.2 [双曲線関数の倍角定理]

$$\sinh 2\alpha = 2\sinh\alpha\cosh\alpha$$
$$\cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha + \sinh^2\alpha = 1 + 2\sinh^2\alpha = 2\cosh^2\alpha - 1$$
$$\tanh 2\alpha = \frac{2\tanh\alpha}{1+\tanh^2\alpha}$$

事実 4.4.3 [双曲線関数の導関数]

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

4.5　$\sinh x$ の逆関数とその微分

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

です。

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sinh^{-1} x + C.$$

これは何かを感じさせる結果ですね。

$$(\mathrm{Sin}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

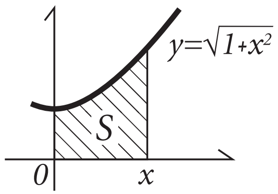
じゃあ

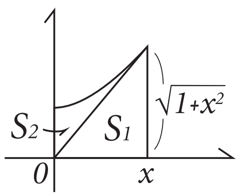
$$\left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{Sin}^{-1} x\right\}\right)' = \sqrt{1-x^2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right\}\right)' \overset{?}{=} \sqrt{1+x^2}$$

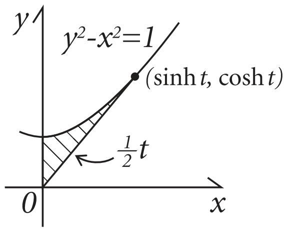
なんてことになっていやしないでしょうか？

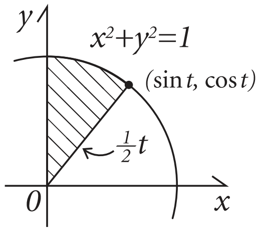
4.5.1　幾何学的な視点から





$$S = \int_0^x \sqrt{1+z^2}dz \quad S_1 = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} \quad S_2 = \frac{1}{2}\sinh^{-1} x = \frac{1}{2}\sinh^{-1}(\sinh t) = \frac{1}{2}t$$





$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \left(\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x\right\}\right)' = \sqrt{1+x^2}.$$

ただし、

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

4.6　Exercise

演習問題 4.3 [教科書　問題 1.6　改題] 次の関数の逆関数を y が入力で x が出力の形で捉えることにし、その導関数（x の y による微分）を x で表現して下さい。

(1) $y = x^3 - 3x \quad (x > 1)$　　(2) $y = \log(x^2+1) \quad (x \geq 0)$

演習問題 4.4 x, y が次の関係式を満たしているとき、$\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dy}$ を求めてください（それぞれ、x, y を使って表してください）。

(1) $x^2 + y^2 = 1$　　(2) $x^2(x+2) = y^2$　　(3) $x^3 - 2x^2 - xy - 2y = 0$

演習問題 4.5 双曲線関数の加法定理を証明してください。

演習問題 4.6 双曲線関数の導関数を求めてください。

演習問題 4.7 $\cosh x \, (x \geq 0)$ の逆関数とその微分を求めてください。

演習問題 4.8 $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ を示してください。

演習問題 4.9 $\tanh x$ の逆関数とその微分を求めてください。