5　l'Hôpital の規則と不定形の極限値

目標
C1. 平均値の定理の内容を知っている
B1. ロピタルの規則を適用して不定形の極限値が計算できる 演習問題 5.1、5.2
A1. 平均値の定理・ロピタルの規則を大雑把に証明できる

5.1　平均値の定理の一般化

定理 5.1.1 [Rolle の定理（M.Rolle 1691） **]**

前提条件：　(i) $f(x)$ は $[a,b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a,b) で微分可能
(iii) $f(a)=f(b)$

主張内容：　$f'(c)=0$ となる点 c が $a<c<b$ の範囲内にある

もともと Rolle は微分とは無関係に、重解条件や方程式の解法を考える中でこの事実を発見しましたが、後日微分を使った形にまとめられ、更に平均値の定理に統合され現在に至ります。

定理 5.1.2 [平均値の定理（B.Cavalieri 1635, J.-L.Lagrange 1801） **]**

前提条件：　(i) $f(x)$ は $[a,b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a,b) で微分可能

主張内容：　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ となる点 c が $a<c<b$ の範囲内にある

【証明 P.O.Bonnet 1868 頃】　関数 $f(x)$ のグラフ上の異なる２点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ を通る割線（secant）の方程式は

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

であり、グラフとこの直線の差：

$$D(x)=f(x)-y=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

を考えると、$D(a)=0,\quad D(b)=0$ なので Rolle の定理により $D'(c)=0$ となるような c が $a<c<b$ の範囲に存在します。ここで

$$D'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

によれば

$$D'(c)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

ですからこの c が題意を満たす点です。 □

> このような証明は後世のものであって、Lagrange 自身がこのようなことを考えたわけではなく、平均値の定理を最初にきちんと証明したと言われる Cauchy でさえ、このようなすっきりとした議論を行ったわけではありませんでした（1823 年頃）。

Cavalieri、Rolle に始まった平均値の定理は、Cauchy の時代にはより一般的な形で認識されるようになっていました。

定理 5.1.3 [Cauchy の平均値の定理（A.L.Cauchy 1823） **]**

（本質的な）前提条件　(i) $f(x),g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続
(ii) $f(x),g(x)$ は開区間 (a,b) で微分可能
（技術的な）前提条件　(iii) $a<x<b$ で $g'(x)\neq 0$

主張内容　$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ となるような c が $a<c<b$ の範囲に少なくとも１つ存在します

【証明 P.O.Bonnet 1868 頃】

$$D(x)=\{f(b)-f(a)\}\{g(x)-g(a)\}-\{g(b)-g(a)\}\{f(x)-f(a)\}$$

と置けば $D(a)=D(b)=0$ ですから Rolle の定理によって

$$D'(c)=\{f(b)-f(a)\}g'(c)-\{g(b)-g(a)\}f'(c)=0$$

となるような c が $a < c < b$ の範囲に存在します。

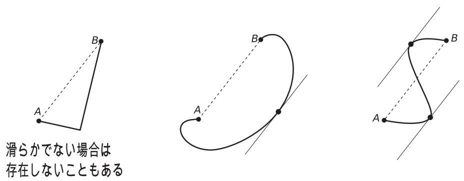
仮定により $g'(c) \neq 0$ であり、また、もしも $g(b)-g(a)=0$ であったならばやはり Rolle の定理によって前提条件 (iii) に反するような点が存在してしまうため $g(b)-g(a) \neq 0$ なので先の式は

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

と変形され、題意を得ます。 □

いろいろな形で平均値の定理を見てきましたが、次のような幾何学的な理解をしておけば取り敢えずは十分でしょう。

定理 5.1.4 [平均値の定理の概形] 平面内の異なる２点 A, B を滑らかな曲線 C で結ぶとき、接線が線分 AB に平行になる点が曲線 C 上（端点は除く）に必ず存在します。



5.2　不定形の極限値

例えば次の３つのケース：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}} = \infty$$

は、いずれも分子・分母が共に極限値 0 をもちますが、全体としての極限値はすべて異なります。この様にいわゆる $\frac{0}{0}$ の型の極限値は、その情報だけではどんな値になるか（あるいは存在するかどうか）分かりません。このような自明でない極限値を『不定形』と言います。

不定形には他にも幾つかあって、

$$\infty-\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\times\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

なども全て自明ではなく、不定形です。商や積のものは間違えにくいですが、最後の３つ、指数のものは、$0^0 = 1$？、$1^\infty = 1$？　などと間違え易いので注意が必要です。

5.3　l'Hôpital の規則

$f(x), g(x)$ は点 $x=a$ の周りで（点 $x=a$ では不可能でも良い。定義すらされていなくて良い）微分可能である（従って連続でもある）とします。

$x \to a$ での極限値が共に $f(x)\to 0, g(x)\to 0$ である時、極限値を含めて新しい関数を次のように定めると：

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}, \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}.$$

$F(x), G(x)$ 共に点 $x=a$ も含んでその周りで連続な関数です。

更に $x=a$ の周り（この点は除く）で $g'(x)\neq 0$、すなわち $G'(x)\neq 0$ であれば、Rolle の定理から $x=a$ の周りで $G(x)-G(a)\neq 0$ ですから、比 $\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}$ を考えることが出来、Cauchy の平均値の定理から x が a の近くであれば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{5.1}$$

となるような c が x と a の間に存在します。

ここで極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在し、その値が l であったとすれば、上の式 (5.1) から極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して同じ値であることが分かります：

定理 5.3.1 [l'Hôpital の規則　（J.Bernoulli, 1696）　**]**

成立の条件： (i) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(ii) $f(x)$、$g(x)$ は（a 以外で）微分可能であり $g'(x)\neq 0$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する

主張内容： $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して、その値は $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい

この定理の a は $\pm\infty$ でも OK です。ただしその場合、$f(a) = f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ などと読み替える必要はあります。また、極限は片側極限でも構いません。

成立条件 (3) のところは、$\pm\infty$ に発散する場合でも良く、適宜読み変えます。

上に書いた基本形（$\frac{0}{0}$ の不定形に対応していました）のほかに、$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形に直接対応したヴァージョンもあります：

定理 5.3.2 [l'Hôpital の規則　∞/∞ version **]**

成立の条件： (i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

(ii) $f(x)$、$g(x)$ は（a 以外で）微分可能であり $g'(x) \neq 0$

(iii) $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する

主張内容： $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ が存在して、その値は $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい

問題 5.3.3 極限値 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ が存在するかどうか調べ、存在するなら値を求めて下さい。

【悪い解答例】　これは $\frac{0}{0}$ の不定形なので l'Hôpital の規則により

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = 2\lim_{x\to 0} \cos x = 2$$

である。□

なぜだめなのか：　物事の順番から言って、l'Hôpital の規則を使うのならば、それが成立するための条件を満たしているのかどうかをチェックする事が先になされなければならないでしょう。

上のやり方では、まず l'Hôpital の規則の結果の部分を使ってしまっています。その後の部分を見れば、結果的に、確かに l'Hôpital の規則が成り立つための条件が満たされていた事も分かるのですが、やはり物事の順番が逆です。

極限を求める問題では、まずいきなり『$\lim_{x\to 0} \cdots$』と書き始めて良い事は何一つありません。いきなり極限が求まる問題は少ないからです。

そうではなくて、まず与式を変形したり、何か知っている定理を使うための下ごしらえが必要な場合が多いです。今回の場合なら l'Hôpital の規則を使うために、それが本当に使える状況なのかをチェックしなければなりません。

【良い解答例】これは $\frac{0}{0}$ の不定形です。分母・分子をそれぞれ微分したものの比をとると

$$\frac{(\sin^2 x)'}{(1-\cos x)'} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = 2\cos x \to 2 \quad (x \to 0)$$

ですからロピタルの定理により問題の極限値も存在して 2 です。□

5.4 Exercise

演習問題 5.1 [教科書　例題 2.1 **]** 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するなら値を求めて下さい。

(2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x}$　(3) $\lim_{x\to +0} x\log x$

(2) これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形です。

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

なのでロピタルの規則により

$$\frac{\log x}{x} \to 0 \quad (x \to \infty)$$

です。

(3) 変形すると

$$x\log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

であり、これは $x \to +0$ で $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形です。そこで分子・分母の微分の比を見ると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0 \quad (x \to +0)$$

となっていますから、l'Hôpital の規則により

$$\lim_{x\to +0} x\log x = 0$$

が分かります。□

演習問題 5.2 [教科書　問題 2.2] 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在するならばその値を求めて下さい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{2x^2+x-1}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x$

(1) 分母、分子共に $x\to 2$ で 0 に収束していますから、不定形です。分母・分子の微分の比を見ると

$$\frac{(x^2-x-2)'}{(x^3-8)'}=\frac{2x-1}{3x^2}\to\frac{3}{12}=\frac{1}{4}\quad(x\to 2)$$

となっていますから、ロピタルの規則により

$$\frac{x^2-x-2}{x^3-8}\to\frac{1}{4}\quad(x\to 2)$$

が分かります。

(2) 分母、分子共に $x\to 0$ で 0 に収束していますから、不定形です。分母・分子の微分の比を見ると

$$\frac{(\mathrm{e}^x-\cos x)'}{x'}=\mathrm{e}^x+\sin x\to 1\quad(x\to 0)$$

となっていますから、ロピタルの規則により

$$\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}\to 1\quad(x\to 0)$$

が分かります。

(3) これは $\frac{0}{0}$ の不定形です。

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\to\frac{1}{2}$$

ですから、ロピタルの規則により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

です。

(4) これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形です。

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}=\frac{6x}{4x+1}$$

であって、これも $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形です。そこでこの形において分子・分母それぞれの微分の比をとると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}=\frac{6}{4}\to\frac{3}{2}$$

となっていますから、まずロピタルの規則によって

$$\frac{6x}{4x+1}\to\frac{3}{2}$$

であり、これによってもう一度ロピタルの規則により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{2x^2+x-1}=\frac{3}{2}$$

であることが分かります。

(5) 変形すると

$$\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}=\left(\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\right)^2$$

なので、括弧の中身の極限値を調べます。これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので分母・分子の微分の比を見ると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}=\frac{1}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\to 0\quad(x\to\infty)$$

となっていますから、ロピタルの規則により

$$\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\to 0\quad(x\to\infty)$$

が分かり、従って問題の極限値も存在して 0 です。

(6) これは $0\times\infty$ の不定形です。変形すると

$$\sqrt{x}\log x=\frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

であってこれは $\frac{0}{0}$ の不定形です。分母・分子の微分の比を見ると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=-2x^{\frac{1}{2}}\to 0\quad(x\to 0)$$

ですからロピタルの規則により求める極限値も存在して 0 です。

【ロピタルの規則を使わない方法】(1)

$$\frac{x^2-x-2}{x^3-8}=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{x+1}{x^2+2x+4}\to\frac{3}{12}=\frac{1}{4}\quad(x\to 2)$$

(2)

$$\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x-0}-\frac{\cos x-1}{x-0}$$

ですが、右辺第１項において $\mathrm{e}^x=f(x)$、第２項において $\cos x=g(x)$ と置けばこれは

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

と書くことが出来、$x\to 0$ においてそれぞれ $f'(0)=\mathrm{e}^0=1, g'(0)=-\sin 0=0$ に収束しますから、結局、

$$\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}\to 1\quad(x\to 0)$$

です。

(3)

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\to\frac{1}{2}\quad(x\to 0)$$

(4)
分母・分子を x^2 で割れば

$$\frac{3x^2+2}{2x^2+x-1}=\frac{3+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\to\frac{3}{2}\quad(x\to\infty)$$

です。

(5) $x\geq 0$ とします。変形すると

$$\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}=\left(\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\right)^2$$

なので、括弧の中身の極限値を調べます。

$f(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$ と置けば

$$f'(x)=\frac{2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-x^2\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^x}=\frac{x(4-x)}{2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}},\quad f'(x)=0\iff x=0,4$$

ですから $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$

となっており、$f(x)\leq\frac{16}{\mathrm{e}^2}$ であることが分かります。すると

$$0\leq\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}=f(x)\cdot\frac{1}{x}\leq\frac{16}{\mathrm{e}^2}\cdot\frac{1}{x}$$

が得られ、$x\to+\infty$ においてはさみうちの原理から

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}=0$$

が分かります。従って問題の極限値も存在して 0 です。

(6) $x=\frac{1}{z}$ と置けば $z\to+\infty$ であって

$$\sqrt{x}\log x=\frac{1}{\sqrt{z}}\log z^{-1}=-\frac{\log z}{\sqrt{z}}$$

ですが、ここで更に $\log z=t$ と置けば $t\to+\infty$ であって、

$$\sqrt{x}\log x=-\frac{\log z}{\sqrt{z}}=-\frac{t}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}$$

と変形され、前問の中に出てきた極限計算によりこれは 0 に収束します。

□

演習問題 5.3 ロピタルの規則を使わずに次の極限値を求めて下さい。ただし、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

は使って良いものとします。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

(1)

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\quad(x\to 0)$$

(2) $x > 0$ が十分小さければ

$$\sin x < x < \tan x$$

ですので、

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - \sin x}{x^2} < \frac{x - \sin x}{x^2} &< \frac{\tan x - \sin x}{x^2} \\
0 < \frac{x - \sin x}{x^2} &< \sin x \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} \\
0 < \frac{x - \sin x}{x^2} &< \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

が得られ、(1) の結果とはさみうちの原理により、$\lim_{x\to+0} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$ です。

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\cos x}}{x^2} \\
&= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x(\cos x + 1)} \frac{-\sin^2 x}{x^2} \\
&\to -\frac{1}{2} \quad (x \to 0)
\end{aligned}$$

□