

5 l'Hôpital の規則と不定形の極限值

目標
C1. 平均値の定理の内容を知っている
B1. ロピタルの規則を適用して不定形の極限值が計算できる 演習問題 5.1、5.2
A1. 平均値の定理・ロピタルの規則を大雑把に証明できる

5.1 平均値の定理の一般化

定理 5.1.1 [Rolle の定理 (M.Rolle 1691)]

前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能
(iii) $f(a) = f(b)$

主張内容： $f'(c) = 0$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

定理 5.1.2 [平均値の定理 (B.Cavalieri 1635, J.-L.Lagrange 1801)]

前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能

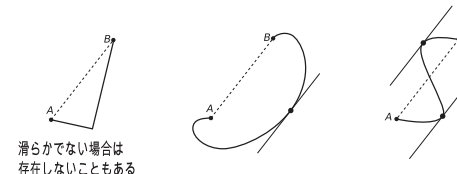
主張内容： $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

定理 5.1.3 [Cauchy の平均値の定理 (A.L.Cauchy 1823)]

(本質的な) 前提条件 (i) $f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x), g(x)$ は開区間 (a, b) で微分可能
(技術的な) 前提条件 (iii) $a < x < b$ で $g'(x) \neq 0$

主張内容 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となるような c が
 $a < c < b$ の範囲に少なくとも 1 つ存在します

定理 5.1.4 [平均値の定理の概形] 平面内の異なる 2 点 A, B を滑らかな曲線 C で結ぶとき、接線が線分 AB に平行になる点が曲線 C 上 (端点は除く) に必ず存在します。



5.2 不定形の極限值

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{x})}{e^{-x}} = \infty$$

$$\text{不定形: } \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

5.3 l'Hôpital の規則

定理 5.3.1 [l'Hôpital の規則 (J.Bernoulli, 1696)]

成立の条件： (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
(2) $f(x), g(x)$ は (a 以外で) 微分可能であり $g'(x) \neq 0$
(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する

主張内容： $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して、その値は $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい

定理 5.3.2 [l'Hôpital の規則 ∞/∞ version]

成立の条件： (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
 (2) $f(x)$ 、 $g(x)$ は (a 以外で) 微分可能であり $g'(x) \neq 0$
 (3) 極限： $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する

主張内容： $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して、その値は $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい

問題 5.3.3 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ が存在するかどうか調べ、存在するなら値を求めて下さい。

【悪い解答例】 これは $\frac{0}{0}$ の不定形なので l'Hôpital の規則により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 2$$

である。

□

【良い解答例】 これは $\frac{0}{0}$ の不定形です。分母・分子をそれぞれ微分したものの比をとると

$$\frac{(\sin^2 x)'}{(1 - \cos x)'} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos x \rightarrow 2 \quad (x \rightarrow 0)$$

ですからロピタルの定理により問題の極限值も存在して 2 です。

□

5.4 Exercise

演習問題 5.1 [教科書 例題 2.1] 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在するなら値を求めて下さい。

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +0} x \log x$$

演習問題 5.2 [教科書 問題 2.2] 次の極限值が存在するかどうか調べ、存在するならばその値を求めて下さい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{2x^2 + x - 1} \quad (5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (6) \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \log x$$

演習問題 5.3 ロピタルの規則を使わずに次の極限值を求めて下さい。ただし、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

は使って良いものとします。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \sin x}{x^2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$