

## 6 増減表とグラフ

| 目標                                                  |
|-----------------------------------------------------|
| C1. 基本的な微分・極限值計算ができる                                |
| B1. 関数の増減を調べてグラフの概形が描ける<br>演習問題 6.1、6.2、6.3、6.6、6.7 |
| A1. 微分計算によって増減が分かる仕組みの概略を説明できる                      |

### 6.1 不等式の証明

$a, b > 0$  のとき、算術平均 (AM) と幾何平均 (GM) の間に

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

の関係があることはご存知でしょうが、これを一般化すると

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{\frac{ab^1 + a^1b}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{ab^2 + a^2b}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{ab^3 + a^3b}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{ab^4 + a^4b}{2}} \leq \dots$$

が成り立つことが知られています。

例えばこの中の

$$\sqrt[3]{\frac{ab^2 + a^2b}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{ab^3 + a^3b}{2}}$$

はどのように証明されるのでしょうか？

まず両辺を 12 乗して

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab^2 + a^2b}{2}\right)^4 &\leq \left(\frac{ab^3 + a^3b}{2}\right)^3 \\ (ab^2 + a^2b)^4 &\leq 2(ab^3 + a^3b)^3 \\ (ab)^4(a+b)^4 &\leq 2(ab)^3(a^2 + b^2)^3 \\ ab(a+b)^4 &\leq 2(a^2 + b^2)^3 \end{aligned}$$

と変形されますが、ここでさらに両辺を  $b^6$  で割れば

$$\frac{ab}{b^2} \frac{(a+b)^4}{b^4} \leq 2 \frac{a^2 + b^2)^3}{b^6}$$

$$\frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} + 1\right)^4 \leq 2 \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 \right\}^3$$

となりますから、 $\frac{a}{b} = x$  とおけば結局任意の  $x > 0$  に対して

$$x(x+1)^4 \leq 2(x^2+1)^3$$

が成り立つことを示せば十分であることが分かります。

次の問題はこれをどうするかですが、例えば安易に

$$A(x) = 2(x^2+1)^3 - x(x+1)^4$$

として  $x > 0$  で  $A(x) \geq 0$  であることを示そうとしても

$$\begin{aligned} A'(x) &= 6(x^2+1)^2 \cdot 2x - (x+1)^4 - 4x(x+1)^3 \\ &= 12x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 4x - 1 \\ &= (x-1)(12x^4 + 7x^3 + 15x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$

であり、微分が 0 になる点すらよく分かりません（実際には  $x = 1$  しかないのでが・・・）。

そこで方針を変えて

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(x^2+1)^3}{x(x+1)^4} = B(x)$$

として  $x > 0$  で  $B(x) \geq 0$  であることを示すことを考えてみると

$$\begin{aligned} B'(x) &= \frac{3(x^2+1)^2 2x \cdot x(x+1)^4 - (x^2+1)^3 \{(x+1)^4 + 4x(x+1)^3\}}{x^2(x+1)^8} \\ &= \frac{6x^2(x^2+1)^2(x+1) - (x^2+1)^3(5x+1)}{x^2(x+1)^5} \\ &= \frac{(x^2+1)^2 \{6x^2(x+1) - (x^2+1)(5x+1)\}}{x^2(x+1)^5} \\ &= \frac{(x^2+1)^2(x^3 + 5x^2 - 5x - 1)}{x^2(x+1)^5} \\ &= \frac{(x^2+1)^2(x-1)(x^2 + 6x + 1)}{x^2(x+1)^5} \end{aligned}$$

ですからこの場合は  $B'(x) = 0 \iff x = 1$  であって増減表が書けて

|         |     |            |            |
|---------|-----|------------|------------|
| $x$     | ... | 1          | ...        |
| $B'(x)$ | —   | 0          | +          |
| $B(x)$  |     | $\searrow$ | $\nearrow$ |

$x > 0$  で  $B(x) \geq \frac{1}{2}$  であることが分かります。

このように、関数の増減の様子を調べて最小値などを求めることによって、不等式の証明に利用したりすることができます。

## 6.2 1 階微分と増減

**定理 6.2.1** [ 平均値の定理 (B.Cavalieri 1635, J.-L.Lagrange 1801) ]

前提条件: (i)  $f(x)$  は  $[a, b]$  で連続  
(ii)  $f(x)$  は  $(a, b)$  で微分可能

主張内容:  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$  となる点  $c$  が  $a < c < b$  の範囲内にある

区間  $J$  内の異なる 2 点  $a < b$  を任意に選んだとき、この 2 点に対応した関数  $f(x)$  のグラフ上の 2 点  $A(a, f(a)), B(b, f(b))$  を結んだ線分  $AB$  の傾きは  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  ですから、平均値の定理により

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (6.1)$$

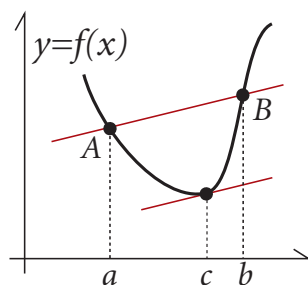
となるような  $c$  が少なくとも 1 つ  $(a, b)$  の間にあることが分かります。

ここで开区間  $J$  内で  $f'(x) > 0$  と仮定すると (6.1) の右辺、従って左辺も正であり  $f(a) < f(b)$  が分かります。これが任意の  $a < b$  で成り立ちますから、関数  $f(x)$  は単調増加です。

同様に  $f'(x) < 0$  であれば、関数  $f(x)$  は単調減少です。

**事実 6.2.2** (i) 开区間  $J$  内で  $f'(x) > 0$  であれば、関数  $f(x)$  は区間  $J$  で単調増大です。

(ii) 开区間  $J$  内で  $f'(x) < 0$  であれば、関数  $f(x)$  は区間  $J$  で単調減少です。



## 6.3 グラフの概形

### ■グラフの描き方の手順

【STEP 1】定義域・対称性の確認

【STEP 2】微分が 0 になる点を求める

【STEP 3】増減表のフレームを書き、記入出来るところを埋める

【STEP 4】残った極限値を求め記入して増減表完成

【STEP 5】グラフを描く

【STEP 6】座標軸との交点を記入 (深入りしない)

**問題 6.3.1**  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x^3-1}}$  のグラフを描いてください。

$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x^3-1}}$ . 定義域は  $x \neq 2^{-\frac{1}{3}}$  です。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \left( \frac{x^2}{2x^3-1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{2x(2x^3-1) - x^2 \cdot 6x^2}{(2x^3-1)^2} \\ &= -\frac{2}{3} \left( \frac{2x^3-1}{x^2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{x(x^3+1)}{(2x^3-1)^2} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3+1}{x^{\frac{1}{3}}(2x^3+1)^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

ですから、 $f'(x) = 0$  となるのは  $x = -1$  のときのみです。また、 $x = 0$  では微分不可能です。

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x^3-1}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x^3}}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

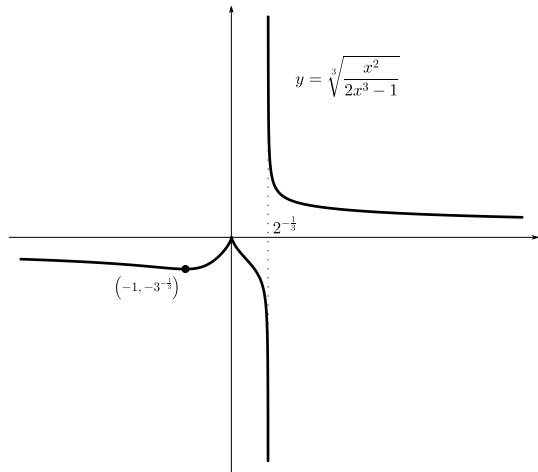
無限遠方での  $f'(x)$  の極限値は求める必要がない (求めたところであまり役に立たない) 場合がほとんどですが、導関数の定義域の『穴』、つまり元の関数の定義域に入っているが微分不可能な点での導関数の極限値は、関数の定義域に入っている以上、グラ

フはそこで何らかの有限値をとっているの、目の前にグラフが存在します（無限遠方は描かないので存在しません）から、そこでの傾きがどうなっているのかという情報はグラフを描く上で必要になります。

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3 + 1}{x^{\frac{1}{3}}(2x^3 + 1)^{\frac{4}{3}}} \mp \infty \quad (x \rightarrow \pm 0)$$

つまり、グラフは原点において  $y$  軸に接するような感じで上に『尖っている』事が分かります。

|         |           |            |                     |            |           |            |                    |           |            |
|---------|-----------|------------|---------------------|------------|-----------|------------|--------------------|-----------|------------|
| $x$     | $-\infty$ | $\dots$    | $-1$                | $\dots$    | $0$       | $\dots$    | $2^{-\frac{1}{3}}$ | $\dots$   | $+\infty$  |
| $f'(x)$ | /         | -          | 0                   | +          | $+\infty$ | $-\infty$  | -                  | /         | /          |
| $f(x)$  | 0         | $\searrow$ | $-3^{-\frac{1}{3}}$ | $\nearrow$ | 0         | $\searrow$ | $-\infty$          | $+\infty$ | $\searrow$ |



□

## 6.4 Exercise

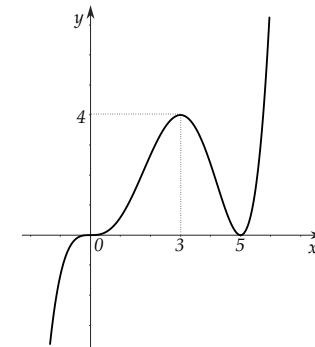
演習問題 6.1 次の関数の増減を調べてグラフを描いて下さい。

$$(1) f(x) = \frac{1}{27}x^3(x-5)^2 \quad (2) f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3) f(x) = x \log x$$

(1)

$$f'(x) = \frac{3}{27}x^2(x-5)^2 + \frac{2}{27}x^3(x-5) = \frac{1}{27}x^2(x-5)\{3(x-5) + 2x\} = \frac{5}{27}x^2(x-5)(x-3)$$

|         |           |            |   |            |   |            |   |            |           |
|---------|-----------|------------|---|------------|---|------------|---|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\dots$    | 0 | $\dots$    | 3 | $\dots$    | 5 | $\dots$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | +          | 0 | +          | 0 | -          | 0 | +          | $+\infty$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |



□

(2) 定義域は  $(-\infty, +\infty)$  であり、奇関数ですから、 $x \geq 0$  の部分だけ調べます。微分は

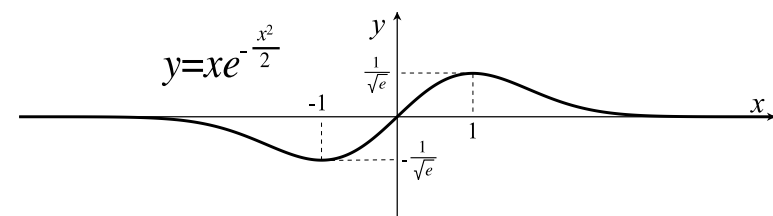
$$f'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ですから、 $f'(x) = 0$  となるのは  $x = \pm 1$  です。

従って増減表とグラフは以下の通りです：

|         |   |            |                      |            |           |
|---------|---|------------|----------------------|------------|-----------|
| $x$     | 0 | $\dots$    | 1                    | $\dots$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 1 | +          | 0                    | -          | /         |
| $f(x)$  | 0 | $\nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\searrow$ | 0         |

$$f(x) = \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$



変曲点は 2 点  $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}\right)$  です (複号同順)。

(3) 定義域は  $(0, +\infty)$  であり、微分は

$$f'(x) = \log x + 1$$

ですから、 $f'(x) = 0$  となるのは  $x = e^{-1}$  のみです。

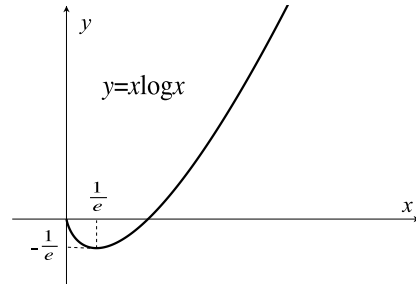
$x \rightarrow +0$  での極限点は今回は  $(0, 0)$  であって、無限遠方ではなく『目の前にある点』なので、極限における傾きの情報がないとグラフを正確に描くことが出来ません。

$$f'(x) = \log x + 1 \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow +0)$$

従って、グラフは原点から  $y$  軸に接するように伸びていることが分かります。

増減表とグラフは以下の通りです：

|         |           |            |                |            |           |
|---------|-----------|------------|----------------|------------|-----------|
| $x$     | 0         | ...        | $\frac{1}{e}$  | ...        | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | -          | 0              | +          | /         |
| $f(x)$  | 0         | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



□

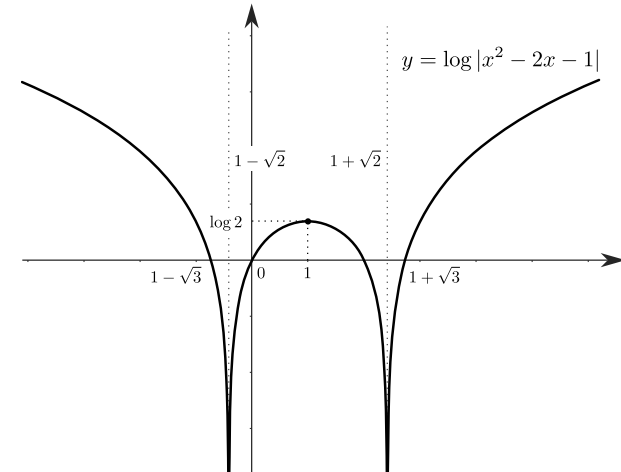
演習問題 6.2  $f(x) = \log |x^2 - 2x - 1|$  について増減を調べて、グラフの概形を描いてください。

定義域は  $x \neq 1 \pm \sqrt{2}$ 、つまり  $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$  です。  
また、 $f(x) = \log |(x-1)^2 - 2|$  ですから、 $f(1+z) = f(1-z)$  であって、対称ですので  $x \geq 1$  の部分だけ調べることにします。

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-1}, \quad f'(x) = 0 \iff x = 1$$

|         |          |            |                |           |            |
|---------|----------|------------|----------------|-----------|------------|
| $x$     | 1        | ...        | $1 + \sqrt{2}$ | ...       | $+\infty$  |
| $f'(x)$ | 0        | -          | /              | /         | +          |
| $f(x)$  | $\log 2$ | $\searrow$ | $-\infty$      | $-\infty$ | $\nearrow$ |

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = \pm 1 \iff x = 0, 2, 1 \pm \sqrt{3}$$



□

演習問題 6.3  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{x} - \frac{9}{2}x^2 - 9\log x + 14x - 8$  の増減を調べて  $y = f(x)$  のグラフの概形を描いて下さい。

この関数は  $x > 0$  で定義されています。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^2 + \frac{2}{x^2} - 9x - \frac{9}{x} + 14 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 \\ &= \left\{2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5\right\}\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) \end{aligned}$$

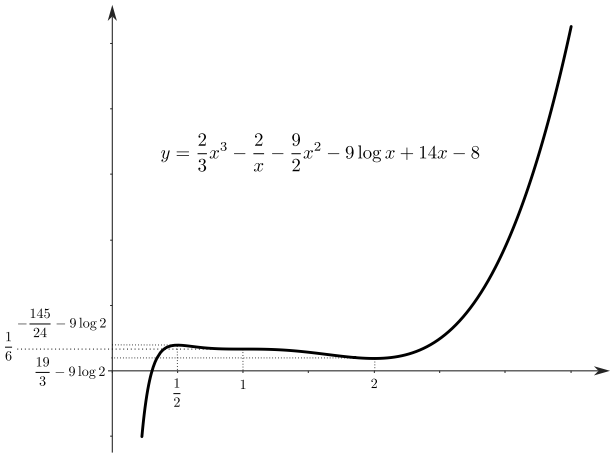
$$= \frac{1}{x^2}(2x^2 - 5x + 2)(x^2 - 2x + 1)$$
$$= \frac{1}{x^2}(2x - 1)(x - 2)(x - 1)^2$$

ですから、

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}, 1, 2$$

です。

|         |           |            |                             |            |               |            |                          |            |           |
|---------|-----------|------------|-----------------------------|------------|---------------|------------|--------------------------|------------|-----------|
| $x$     | 0         | ...        | $\frac{1}{2}$               | ...        | 1             | ...        | 2                        | ...        | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | /         | +          | 0                           | -          | 0             | -          | 0                        | +          | /         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{145}{24} - 9\log 2$ | $\searrow$ | $\frac{1}{6}$ | $\searrow$ | $\frac{19}{3} - 9\log 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



これらの関数は偶関数なので  $0 \leq x$  の部分だけ調べます（y 軸で折り返せば良い）。

$$【f(x), \quad 0 \leq x \leq 1】$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1), \quad f'(x) = 0 \iff x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$【f(x), \quad 1 < x】$$

$$f'(x) = -\frac{12}{(x+1)^2} < 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

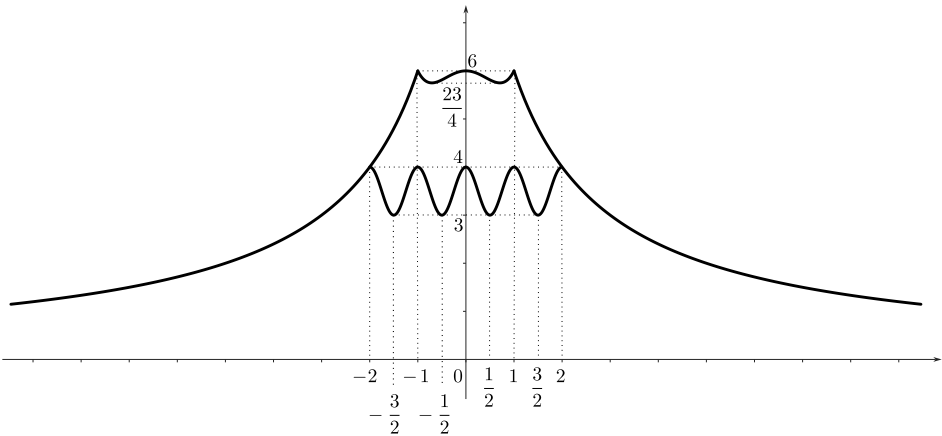
|         |   |            |                      |            |   |     |            |
|---------|---|------------|----------------------|------------|---|-----|------------|
| $x$     | 0 | ...        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ...        | 1 | ... | $\infty$   |
| $f'(x)$ | 0 | -          | 0                    | +          | 2 | -12 | -          |
| $f(x)$  | 6 | $\searrow$ | $\frac{23}{4}$       | $\nearrow$ | 6 | 6   | $\searrow$ |

$$【g(x), \quad 0 \leq x \leq 2】$$

$$g'(x) = -\pi \sin 2\pi x, \quad g'(x) = 0 \iff x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$$

|         |   |            |               |            |   |            |               |            |   |
|---------|---|------------|---------------|------------|---|------------|---------------|------------|---|
| $x$     | 0 | ...        | $\frac{1}{2}$ | ...        | 1 | ...        | $\frac{3}{2}$ | ...        | 2 |
| $g'(x)$ | 0 | -          | 0             | +          | 0 | -          | 0             | +          | 0 |
| $g(x)$  | 4 | $\searrow$ | 3             | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | 3             | $\nearrow$ | 4 |

以上によりグラフの概形は以下の通りです：



演習問題 6.4 次の関数の増減を調べ、 $y = f(x), y = g(x)$  のグラフの概形を同一の座標平面上に描いてください。

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 + 6 & (|x| \leq 1) \\ \frac{12}{|x| + 1} & (|x| > 1) \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{2} \cos 2\pi x + \frac{7}{2} \quad (|x| \leq 2)$$

演習問題 6.5  $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$  で定義される 2 つの関数：

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{5 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{|x|} - \sqrt{5 - x^2}$$

の増減を調べ、 $y = f(x), y = g(x)$  のグラフの概形を同一の座標平面上に描いてください。

どちらも偶関数なので、 $0 \leq x \leq \sqrt{5}$  の範囲のみ調べてあとで折り返します。 $f(x) = f_+(x), g(x) = f_-(x)$  と書くことにします。

$$f'_\pm(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \pm \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = \frac{\sqrt{5-x^2} \mp 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x^2}}$$

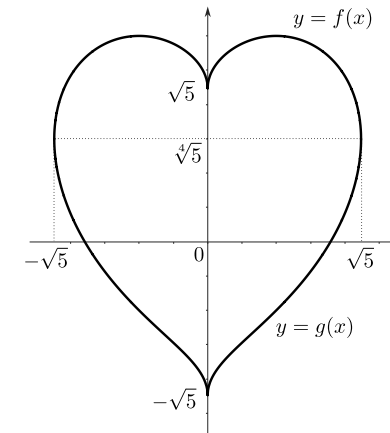
□

$$\begin{aligned} f'_+(x) = 0 &\iff \sqrt{5-x^2} = 2x\sqrt{x} \\ 5-x^2 &= 4x^3 \\ 0 &= 4x^3 + x^2 - 5 \\ &= (x-1)(4x^2+5x+5) \iff x=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= \frac{\sqrt{5-x^2} - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x^2}} \rightarrow \left( \frac{\sqrt{5}-0}{+0} = \right) +\infty \quad (x \rightarrow +0) \\ f'_+(x) &= \frac{\sqrt{5-x^2} - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x^2}} \rightarrow \left( \frac{0-2\sqrt{5}\sqrt[4]{5}}{+0} = \right) -\infty \quad (x \rightarrow \sqrt{5}-0) \\ f'_-(x) &= \frac{\sqrt{5-x^2} + 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x^2}} \rightarrow \left( \frac{\sqrt{5}+0}{+0} = \right) +\infty \quad (x \rightarrow +0) \\ f'_-(x) &= \frac{\sqrt{5-x^2} + 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x^2}} \rightarrow \left( \frac{0+2\sqrt{5}\sqrt[4]{5}}{+0} = \right) +\infty \quad (x \rightarrow \sqrt{5}-0) \end{aligned}$$

|           |            |            |   |            |               |
|-----------|------------|------------|---|------------|---------------|
| $x$       | 0          | ...        | 1 | ...        | $\sqrt{5}$    |
| $f'_+(x)$ | $\infty$   | +          | 0 | -          | $-\infty$     |
| $f_+(x)$  | $\sqrt{5}$ | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | $\sqrt[4]{5}$ |

|           |             |            |               |
|-----------|-------------|------------|---------------|
| $x$       | 0           | ...        | $\sqrt{5}$    |
| $f'_-(x)$ | $+\infty$   | +          | $+\infty$     |
| $f_-(x)$  | $-\sqrt{5}$ | $\nearrow$ | $\sqrt[4]{5}$ |



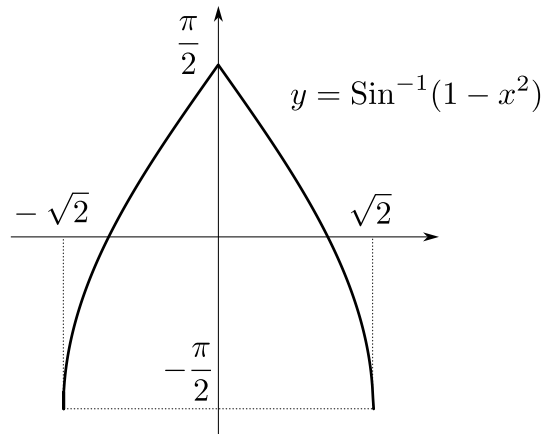
演習問題 6.6  $t(x) = \sin^{-1}(1-x^2)$  の増減を調べてグラフの概形を描いてください。

【解答例】  $t(x)$  は  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$  で定義されています。また  $\sin^{-1}z$  は  $z = \pm 1$  以外で微分可能ですから、 $t(x)$  は  $x = 0, \pm\sqrt{2}$  においても微分不可能であることが分かります。微分可能な範囲で微分を計算すると

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}(-2x) \\ &= \frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} \\ &= \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} & 0 < x < \sqrt{2} \\ \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} & -\sqrt{2} < x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

です。

|         |                  |            |                 |            |                  |
|---------|------------------|------------|-----------------|------------|------------------|
| $x$     | $-\sqrt{2}$      | ...        | 0               | ...        | $\sqrt{2}$       |
| $t'(x)$ | $+\infty$        | +          | 1               | -1         | $-\infty$        |
| $t(x)$  | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ |



□

演習問題 6.7 次の関数のグラフの概形を書いて下さい。

$$(1) f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} \quad (2) f(x) = \sqrt[3]{x^2(x - 1)}$$

(1) 定義域は実数全体であり、

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)\{(-x)^2 - 1\}} = -f(x)$$

が成り立っているなのでこの関数は奇関数です。従って  $x \geq 0$  の部分のみ調べることにします。

$$f'(x) = \frac{1}{3} \{x(x^2 - 1)\}^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - 1)$$

ですから、 $f'(x) = 0$  となるのは  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のみです。

|         |           |            |                              |            |           |            |           |
|---------|-----------|------------|------------------------------|------------|-----------|------------|-----------|
| $x$     | 0         | ...        | $\frac{1}{\sqrt{3}}$         | ...        | 1         | ...        | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | -          | 0                            | +          | $+\infty$ | $+\infty$  | +         |
| $f(x)$  | 0         | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ | $\nearrow$ | 0         | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3 次式の 3 乗根ですから、無限遠方で 1 次式であり、漸近線がありそうです。

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

であり、

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} - x \\ &= \frac{x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}^2 + x\sqrt[3]{x(x^2 - 1)} + x^2} \\ &= \frac{-x}{\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}^2 + x\sqrt[3]{x(x^2 - 1)} + x^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \end{aligned}$$

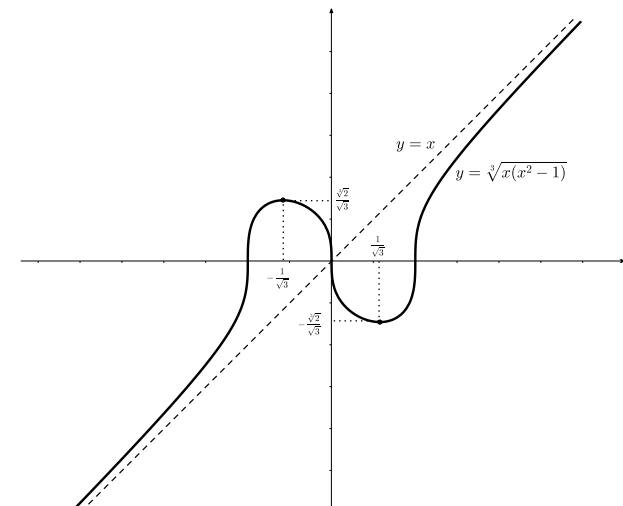
ですから、直線  $y = x$  は  $x \rightarrow \pm\infty$  双方での漸近線です。

極限値の計算：

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}^2} = \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{3\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}^2} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1 \pm 0)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}^2} \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 0)$$



□

(2) 定義域は実数全体です。

$$f'(x) = \frac{1}{3} \{x^2(x-1)\}^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x)$$

ですから、 $f'(x) = 0$  となるのは  $x = \frac{2}{3}$  のみです。

|         |           |            |           |            |               |            |     |            |           |
|---------|-----------|------------|-----------|------------|---------------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\cdots$   | $0$       | $\cdots$   | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$   | $1$ | $\cdots$   | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $1$       | $+$        | $+\infty$ | $-\infty$  | $-$           | $0$        | $+$ | $+\infty$  | $1$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$       | $\searrow$ |               | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3 次式の 3 乗根ですから、無限遠方で 1 次式であり、漸近線がありそうです。

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

であり、

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt[3]{x^2(x-1)} - x \\ &= \frac{x^2(x-1) - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}^2 + x\sqrt[3]{x^2(x-1)} + x^2} \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}^2 + x\sqrt[3]{x^2(x-1)} + x^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow -\frac{1}{3} \quad (x \rightarrow \pm\infty) \end{aligned}$$

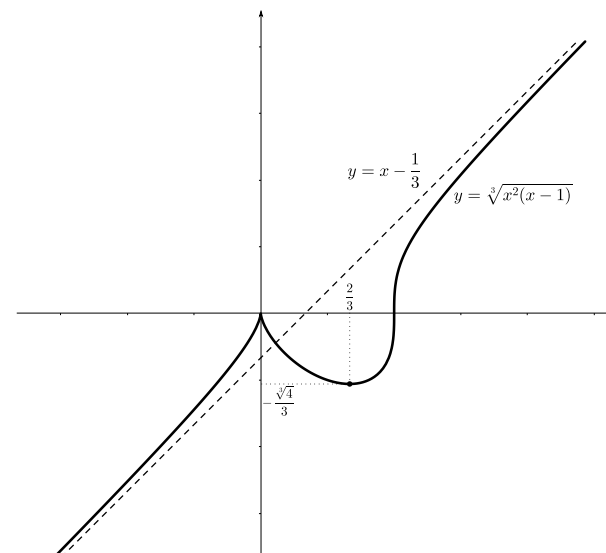
ですから、直線  $y = x - \frac{1}{3}$  は  $x \rightarrow \pm\infty$  双方での漸近線です。

極限値の計算：

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}^2} = \frac{3 - \frac{1}{x}}{3\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}^2} \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1 \pm 0)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}^2} = \frac{3x - 2}{3\sqrt[3]{\frac{x^4(x-1)^2}{x^3}}} = \frac{3x - 2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \rightarrow \mp\infty \quad (x \rightarrow 0)$$



□