6　増減表とグラフ

目標
C1. 基本的な微分・極限値計算ができる
B1. 関数の増減を調べてグラフの概形が描ける 演習問題 6.1、6.2、6.3、6.6、6.7
A1. 微分計算によって増減が分かる仕組みの概略を説明できる

6.1　不等式の証明

例えば $a, b > 0$ のとき、

$$\sqrt[3]{\frac{ab^2+a^2b}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{ab^3+a^3b}{2}}$$

はどのように証明されるのでしょうか？

$$\left(\frac{ab^2+a^2b}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{ab^3+a^3b}{2}\right)^3$$

$$ab(a+b)^4 \leq 2(a^2+b^2)^3$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}+1\right)^4 \leq 2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right\}^3$$

となりますから、$\frac{a}{b} = x$ とおけば結局任意の $x > 0$ に対して

$$x(x+1)^4 \leq 2(x^2+1)^3$$

が成り立つことを示せば十分であることが分かります。

$$A(x) = 2(x^2+1)^3 - x(x+1)^4$$

として $x > 0$ で $A(x) \geq 0$ であることを示そうとしても上手くいきません。

そこで方針を変えて

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(x^2+1)^3}{x(x+1)^4} = B(x)$$

として $x > 0$ で $B(x) \geq 0$ であることを示すことを考えてみると

$$B'(x) = \frac{(x^2+1)^2(x-1)(x^2+6x+1)}{x^2(x+1)^5}$$

ですからこの場合は $B'(x) = 0 \iff x = 1$ であって増減表が書けて

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$B'(x)$	$-$	0	$+$
$B(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

$x > 0$ で $B(x) \geq \frac{1}{2}$ であることが分かります。

6.2　1 階微分と増減

事実 6.2.1 (i) 開区間 J 内で $f'(x) > 0$ であれば、関数 $f(x)$ は区間 J で単調増大です。

(ii) 開区間 J 内で $f'(x) < 0$ であれば、関数 $f(x)$ は区間 J で単調減少です。

6.3　グラフの概形

■グラフの描き方の手順

【STEP 1】定義域・対称性の確認

【STEP 2】微分が 0 になる点を求める

【STEP 3】増減表のフレームを書き、記入出来るところを埋める

【STEP 4】残った極限値を求め記入して増減表完成

【STEP 5】グラフを描く

【STEP 6】座標軸との交点を記入（深入りしない）

問題 6.3.1 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x^3-1}}$ のグラフを描いてください。

$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x^3-1}}$. 定義域は $x \neq 2^{-\frac{1}{3}}$ です。

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3+1}{x^{\frac{1}{3}}(2x^3+1)^{\frac{4}{3}}}$$

ですから、$f'(x) = 0$ となるのは $x = -1$ のときのみです。また、$x = 0$ では微分不可能です。

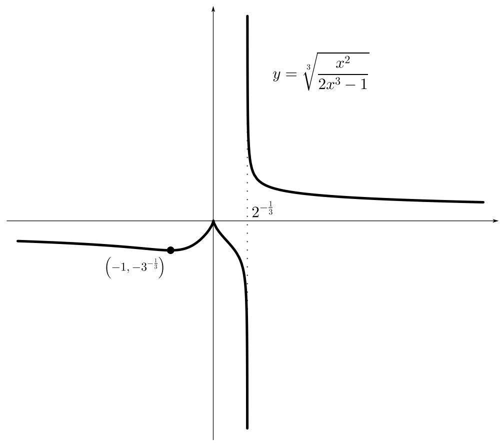
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x^3-1}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x^3}}} \to 0 \qquad (x \to \pm\infty)$$

無限遠方での $f'(x)$ の極限値は求める必要がない（求めたところであまり役に立たない）場合がほとんどですが、導関数の定義域の『穴』、つまり元の関数の定義域には入っているが微分不可能な点での導関数の極限値は、関数の定義域に入っている以上、グラフはそこで何らかの有限値をとっているので、目の前にグラフが存在します（無限遠方は描かないので存在しません）から、そこでの傾きがどうなっているのかという情報はグラフを描く上で必要になります。

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3+1}{x^{\frac{1}{3}}(2x^3+1)^{\frac{4}{3}}} \mp \infty \qquad (x \to \pm 0)$$

つまり、グラフは原点において y 軸に接するような感じで上に『尖っている』事が分かります。

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0		$\cdots$	$2^{-\frac{1}{3}}$		$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	/	/	$-$	/
$f(x)$	0	↘	$-3^{-\frac{1}{3}}$	↗	0		↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0



□

6.4 Exersice

演習問題 6.1 次の関数の増減を調べてグラフを描いて下さい。

(1) $f(x) = \frac{1}{27}x^3(x-5)^2$ (2) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ (3) $f(x) = x\log x$

演習問題 6.2 $f(x) = \log|x^2-2x-1|$ について増減を調べて、グラフの概形を描いてください。

演習問題 6.3 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{x} - \frac{9}{2}x^2 - 9\log x + 14x - 8$ の増減を調べて $y = f(x)$ のグラフの概形を描いて下さい。

演習問題 6.4 [静岡大] 次の関数の増減を調べ、$y = f(x), y = g(x)$ のグラフの概形を同一の座標平面上に描いてください。

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 + 6 & (|x| \leq 1) \\ \dfrac{12}{|x|+1} & (|x| > 1) \end{cases}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\cos 2\pi x + \frac{7}{2} \quad (|x| \leq 2)$$

演習問題 6.5 [信州大] $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ で定義される２つの関数：

$$f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{5-x^2}, \qquad g(x) = \sqrt{|x|} - \sqrt{5-x^2}$$

の増減を調べ、$y = f(x), y = g(x)$ のグラフの概形を同一の座標平面上に描いてください。

演習問題 6.6 $t(x) = \mathrm{Sin}^{-1}(1-x^2)$ の増減を調べてグラフの概形を描いてください。

演習問題 6.7 次の関数のグラフの概形を書いて下さい。

(1) $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)}$ (2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$