

課題第1回

問題 1 次の関数を微分して下さい。

$$(1) \log\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad (2) x^{\frac{1}{x}} \quad (3) \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{1-x^2} + \text{Sin}^{-1}x \right\}$$

問題 2 次の関数を微分してください。

$$(1) \frac{\sin x - 1}{\cos x} \quad (2) \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \quad (3) \log |x + \sqrt{1+x^2}|$$

出題：2025年4月25日

出席者用提出期限：2025年4月25日 講義時間内

欠席者用提出期限：2025年5月2日 17時00分00秒

撮影などして画像ファイル (jpg、pdf、png など一般的な形式のもの) にした上で、Teams のチャットにて笠井剛宛に送ってください。紙媒体での提出は受け付けません。

通信トラブル等考えられますので、余裕をもって投稿してください。上記時刻を過ぎたものは受け取りません (事故・疾病等の特別な事情のある場合は相談してください)。

解答例

問題 1

$$(1) f'(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)}.$$

(2) これは $x > 0$ で定義された関数です。

まずは対数微分法でやってみましょう。 $f(x) = 0$ となる点はありません：

$$\begin{aligned} \log |f(x)| &= \frac{1}{x} \log x \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= -\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2} (1 - \log x) f(x) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \log x). \end{aligned}$$

あるいは、指数関数の合成に変形するやり方もあります：

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log x} \\ f'(x) &= e^{\frac{1}{x} \log x} \left(\frac{1}{x} \log x \right)' = x^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x^2} \right) = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \log x) \end{aligned}$$

(3)

$$(x\sqrt{1-x^2})' = \sqrt{1-x^2} + x \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

なので

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \sqrt{1-x^2}$$

となります。

□

問題 2

(1)

$$\left(\frac{\sin x - 1}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x - (\sin x - 1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin x}$$

(2) $\log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| = \log |1 + \sin x| - \log |1 - \sin x|$ と変形してから計算すると

$$\left(\log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \right)' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} - \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

です。

(3)

$$\begin{aligned} \left(\log |x + \sqrt{1+x^2}| \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} + x \right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

□