

## 課題第 2 回

問題 1 増減・凹凸を調べて  $f(x) = 2 \sin x - \sin^2 x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) のグラフを描いてください。

問題 2 関数  $f(x) = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$  の増減・漸近線を調べてグラフの概形を描いてください (凹凸は調べなくて良い)。

出題：2025 年 5 月 23 日

通常提出期限：2025 年 5 月 30 日 講義開始時

最終提出期限：2025 年 5 月 31 日 17 時 00 分 00 秒

通常提出期限を過ぎたものは、撮影などして画像ファイル (jpg、pdf、png など一般的な形式のもの) にした上で、最終提出期限までに、Teams のチャットにて笠井剛宛に送ってください。通信トラブル等考えられますので、余裕をもって投稿してください。最終提出期限を過ぎたものは受け取りません (事故・疾病等の特別な事情のある場合は相談してください)。

問題 1 増減・凹凸を調べて  $f(x) = 2 \sin x - \sin^2 x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) のグラフを描いてください。

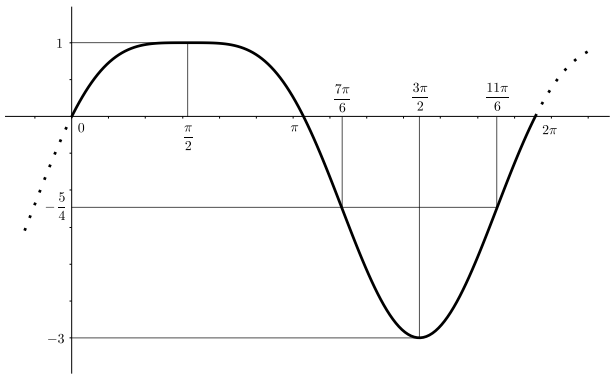
$$f'(x) = 2 \cos x - 2 \sin x \cos x = 2 \cos x(1 - \sin x)$$

ですから、 $f'(x) = 0$  となるのは、 $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  のみです。また、

$$f''(x) = -2 \sin x - 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 4 \sin^2 x - 2 \sin x - 2 = 2(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)$$

ですから、 $f''(x) = 0$  となるのは、 $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$  です。

|          |    |     |                 |     |                  |     |                  |     |                   |     |        |
|----------|----|-----|-----------------|-----|------------------|-----|------------------|-----|-------------------|-----|--------|
| $x$      | 0  | ... | $\frac{\pi}{2}$ | ... | $\frac{7\pi}{6}$ | ... | $\frac{3\pi}{2}$ | ... | $\frac{11\pi}{6}$ | ... | $2\pi$ |
| $f'(x)$  | 2  | +   | 0               | -   | -                | -   | 0                | +   | +                 | +   | 2      |
| $f''(x)$ | -2 | -   | 0               | -   | 0                | +   | +                | +   | 0                 | -   | -2     |
| $f(x)$   | 0  | ↗   | 1               | ↘   | $-\frac{5}{4}$   | ↘   | -3               | ↗   | $-\frac{5}{4}$    | ↗   | 0      |



変曲点は 2 点  $(\frac{7\pi}{6}, -\frac{5}{4})$ ,  $(\frac{11\pi}{6}, -\frac{5}{4})$  です。

□

問題 2 関数  $f(x) = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$  の増減・漸近線を調べてグラフの概形を描いてください（凹凸は調べなくて良い）。

この関数は任意の実数で定義され、

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 9(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

から奇関数です。従ってグラフは原点对称ですから  $x \geq 0$  の部分のみ調べます。

また、分子の次数が分母よりも 1 だけ大きいので変形すると

$$f(x) = x + \frac{8x}{x^2 + 1}, \quad f(x) - x = \frac{\frac{8}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

となっており、直線  $y = x$  は  $x \rightarrow \pm\infty$  双方における漸近線です。

導関数は

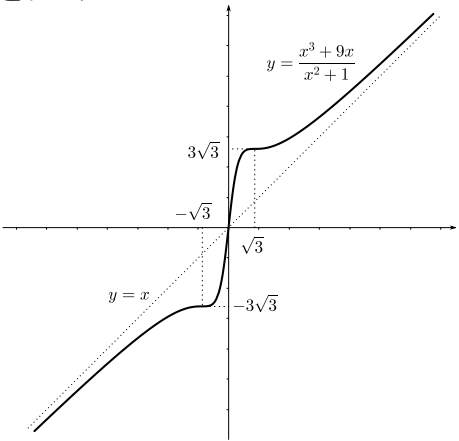
$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 9)(x^2 + 1) - (x^3 + 9x)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 3)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $x = \sqrt{3}$  であり、 $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$  です。また、無限遠方での極限值は

$$f(x) = \frac{x + \frac{9}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

ですから、増減表・グラフは以下の通りです：

|         |   |     |             |     |           |
|---------|---|-----|-------------|-----|-----------|
| $x$     | 0 | ... | $\sqrt{3}$  | ... | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | 9 | +   | 0           | +   | /         |
| $f(x)$  | 0 | ↗   | $3\sqrt{3}$ | ↗   | $+\infty$ |



□