氏名		学年	学科	番号

課題第3回

問題 1 関数 $\mathrm{Tan}^{-1}x$ の定義を正確に述べてください。

問題 2 $\cos x$ の定義域を $\pi \leq x \leq 2\pi$ に制限したものの逆関数の導関数を求めてください。

問題 3 次の関数の導関数を求めてください。

$$f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

問題 4 x, y が次の関係式を満たすときに、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ を x, y を使って表してください。ただし、微分不可能な点については気にしなくて結構です。

(1) $y = \log(x^2+1)$　　(2) $\sqrt{x^2-y} = y^2 - 2x - 1$

問題 5 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値を求めてください。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \frac{1}{1-x^2}}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{1+x}}}$

問題 6 関数 $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$ の増減と凹凸を調べ、増減表とグラフの概形を描いてください。

出題：2025 年 5 月 30 日

出席者用提出期限：2025 年 5 月 30 日　講義時間内

欠席者用提出期限：2025 年 6 月 5 日　17 時 00 分 00 秒

撮影などして画像ファイル（jpg、pdf、png など一般的な形式のもの）にした上で、Teams のチャットにて笠井剛宛に送ってください。紙媒体での提出は受け付けません。

通信トラブル等考えられますので、余裕をもって投稿してください。上記時刻を過ぎたものは受け取りません（事故・疾病等の特別な事情のある場合は相談してください）。

問題 1 関数 $\mathrm{Tan}^{-1}x$ の定義を正確に述べてください。

$\tan x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数。 □

問題 2 $\cos x$ の定義域を $\pi \leq x \leq 2\pi$ に制限したものの逆関数の導関数を求めてください。

$$y = \cos x \quad (\pi \leq x \leq 2\pi)$$

の逆関数は

$$x = \cos y \quad (\pi \leq y \leq 2\pi)$$

であり、両辺を x で微分すれば

$$\begin{aligned} 1 &= -\sin y \cdot y' \\ y' &= -\frac{1}{\sin y} \end{aligned}$$

です。ここで

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$$

ですが、$\pi \leq y \leq 2\pi$ により $\sin y \leq 0$ ですから

$$\sin y = -\sqrt{1-x^2}$$

であって、

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

です。

問題 3 次の関数の導関数を求めてください。

$$f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

□

問題 4 x, y が次の関係式を満たすときに、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ を x, y を使って表してください。ただし、微分不可能な点については気にしなくて結構です。

(1) $y = \log(x^2+1)$　　(2) $\sqrt{x^2-y} = y^2 - 2x - 1$

(1)

$$\begin{aligned} y &= \log(x^2+1) \\ 1 &= \frac{2xx'}{x^2+1} \\ x' &= \frac{x^2+1}{2x} \end{aligned}$$

(2)

$$\sqrt{x^2-y} = y^2 - 2x - 1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2xx'-1}{2\sqrt{x^2-y}} &= 2y-2x' \\
2xx'-1 &= 4(y-x')\sqrt{x^2-y} \\
\left(4\sqrt{x^2-y}+2x\right)x' &= 4y\sqrt{x^2-1}+1 \\
x' &= \frac{4y\sqrt{x^2-y}+1}{4\sqrt{x^2-y}+2x}
\end{aligned}
$$

□

問題 5 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値を求めてください。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{1}{1-x^2}}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{1+x}}}$

(1) これは $\frac{0}{0}$ の不定形です。分母・分子それぞれの導関数の比をとると

$$
\frac{-\sin x-\frac{2x}{(1-x^2)^2}}{2x} = -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{(1-x^2)^2}
$$

です。ここで第２項は -1 に収束しており、第１項の $\frac{\sin x}{x}$ に注目するとこれも $\frac{0}{0}$ の不定形であり、

$$
\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \cos x \to 1 \quad (x\to 0)
$$

ですから、ド・ロピタルの規則により

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1
$$

であることが分かります。従って、再びド・ロピタルの規則により、問題の極限値は存在して $-\frac{3}{2}$ です。

(2)

$$
\frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{1+x}}} = \left(\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2(1+x)}}}\right)^2
$$

ですから、括弧の中身の極限を調べます。これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形ですので、分母・分子それぞれの導関数の比をとると

$$
\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'} = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2(1+x)}}\frac{2x2(1+x)-x^22}{4(1+x)^2}} = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2(1+x)}}\frac{x^2+2x}{2(1+x)^2}} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2\left(\frac{1}{x}+1\right)}}\frac{1+\frac{2}{x}}{2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}} \to 0 \quad (x\to\infty)
$$

ですから、ド・ロピタルの規則により問題の極限値は存在して 0 です。 □

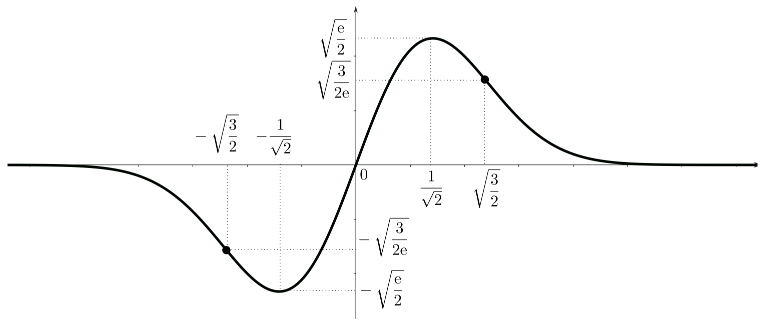
問題 6 関数 $f(x)=xe^{1-x^2}$ の増減と凹凸を調べ、増減表とグラフの概形を描いてください。

定義域は実数全体であり、奇関数です。従って $x\geq 0$ の部分だけ調べれば十分です。

$$
y' = e^{1-x^2}-2x^2e^{1-x^2} = (1-2x^2)e^{1-x^2}, \qquad y'=0 \iff x=\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

$$
y'' = \left\{-4x-2x(1-2x^2)\right\}e^{1-x^2} = 2x(2x^2-3)e^{1-x^2}, \qquad y''=0 \iff x=0,\sqrt{\frac{3}{2}}
$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			0
y''	0	$-$			0	$+$	0
y	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	$\sqrt{\frac{3}{2e}}$	↘	0



変曲点は $(0,0),\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},\pm\sqrt{\frac{3}{2e}}\right)$ （複号同順）の 3 点です。 □