1 次の関数値を角度として見た場合、どんな角度と言えるでしょうか。『〜であるような角度』の形式で述べてください。

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}x \quad (-1 \leq x \leq 1)$　　(2) $\mathrm{Tan}^{-1}x$

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　(1) コサインの値が x であって、$[0, \pi]$ の範囲にある角度。

(2) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ の範囲にあって、タンジェントの値が x であるような角度。

□

2 $\sin x$ **の定義域を** $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ **に制限したものの逆関数を** $F(x)$ **とするとき、**$F(x)$ **の導関数を求めてください。**

配点：5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　$y = \sin x \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right)$ とおくと、この逆関数が $F(x)$ ですから、

$$x = \sin F(x) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq F(x) \leq \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$1 = \cos F(x) \cdot F'(x) \quad \left(\frac{\pi}{2} < F(x) < \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{\cos F(x)} \\ &= \frac{1}{-\sqrt{1 - \sin^2 F(x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

となります。

□

3 次の関数の導関数を求めてください。

(1) $f_1(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x+1} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{x+2}$

(2) $f_2(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(3) $f_3(x) = \mathrm{Cos}^{-1}(2x+7)$

配点：(1)5 点、(2)5 点、(3)10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　(1)

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x+1} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{x+2} \\
f_1'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{(x+1)^2}}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) + \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+2)^2}}\left(\frac{x+2-x}{(x+2)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x+2)^2+x^2} \\
&= -\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{2}{2x^2+4x+4} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
f_2'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= \mathrm{Cos}^{-1}(2x+7) \\
f_3'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-(2x+7)^2}} \cdot 2 \\
&= -\frac{2}{\sqrt{-4x^2-28x-48}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{-x^2-7x-12}}
\end{aligned}
$$

□

4 x, y **が次の関係式を満たすときに、** $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ **を** x, y **を使って表してください。ただし、微分不可能な点については気にしなくて結構です。**

(1) $y = x^3 + 1$

(2) $\log(x^2 - y) = x^2 + 7y + 1$

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$$
\begin{aligned}
y &= x^3 + 1 \\
1 &= 3x^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{3x^2}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\log(x^2 - y) &= x^2 + 7y + 1 \\
\frac{2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - 1}{x^2 - y} &= 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 7 \\
2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - 1 &= 2x(x^2 - y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 7(x^2 - y) \\
2x(y - x^2 + 1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= 7(x^2 - y) + 1 \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= \frac{7(x^2 - y) + 1}{2x(y - x^2 + 1)}
\end{aligned}
$$

□

5 次の極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値を求めてください。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan(x^2+2x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log(\sin x)$

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) これは $\frac{0}{0}$ の不定形ですから、分子・分母それぞれの導関数の比を見ると

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}=\frac{\frac{2x+2}{\cos^2(x^2+2x)}}{1}\to 2\quad(x\to 0)$$

ですから、ド・ロピタルの規則により、

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x^2+2x)}{x}=2$$

です。

(2) 変形すると

$$x\log(\sin x)=\frac{\log(\sin x)}{\frac{1}{x}}$$

であり、これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形です。このとき

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}=\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}$$

ですが、

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}=1$$

ですから、

$$\frac{(\text{分子})'}{(\text{分母})'}\to 0$$

が分かり、ド・ロピタルの規則により、

$$\lim_{x\to+0}x\log(\sin x)=0$$

です。 □

6 関数 $f(x) = (x^2 - 3)\mathrm{e}^{-x}$ の増減と凹凸を調べ、グラフの概形を描くことを念頭に置いて増減表を書いてください。ただしグラフ自体は描く必要はありません。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　この関数は実数全体で定義され、微分計算をすると

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - (x^2-3)\mathrm{e}^{-x} = -(x^2-2x-3)\mathrm{e}^{-x} = -(x-3)(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$
$$f''(x) = -(2x-2)\mathrm{e}^{-x} + (x^2-2x-3)\mathrm{e}^{-x} = (x^2-4x-1)\mathrm{e}^{x} = \left\{(x-2)^2-5\right\}\mathrm{e}^{-x}$$

です。

$f'(x)=0$ となるのは $x = 3, -1$、$f''(x) = 0$ となるのは $x = 2 \pm \sqrt{5}$ です。これらの点での関数値は

$$f(3) = 6\mathrm{e}^{-3}, \quad f(2-\sqrt{5}) = \frac{6-4\sqrt{5}}{\mathrm{e}^{2-\sqrt{5}}}, \quad f(2+\sqrt{5}) = \frac{6+4\sqrt{5}}{\mathrm{e}^{2+\sqrt{5}}},$$

$$\underbrace{f'(2-\sqrt{5}) > 0, \quad f'(2+\sqrt{5}) < 0, \quad f''(3) < 0, \quad f''(-1) > 0}_{\text{これら（特に２階微分）は符号だけで OK}}$$

です。

また、極限値は

$$f(x) = (x^2-3)\mathrm{e}^{-x} \to +\infty \quad (x \to -\infty)$$
$$f(x) = \frac{x^2-3}{\mathrm{e}^{x}} \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

ですから増減表は以下の通りです：

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$2-\sqrt{5}$	$\cdots$	3	$\cdots$	$2+\sqrt{5}$	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	/	$-$	0		$+$		0		$-$		/
$f''(x)$	/		$+$		0		$-$		0	$+$	/
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$\frac{6-4\sqrt{5}}{\mathrm{e}^{2-\sqrt{5}}}$	$\nearrow$	$6\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	$\frac{6+4\sqrt{5}}{\mathrm{e}^{2+\sqrt{5}}}$	$\searrow$	0

変曲点は２点 $\left(2 \pm \sqrt{5}, \frac{6 \pm 4\sqrt{5}}{\mathrm{e}^{2\pm\sqrt{5}}}\right)$（複号同順）です。 □

7 次の増減表等を元に、それぞれの関数のグラフの概形を描いてください。

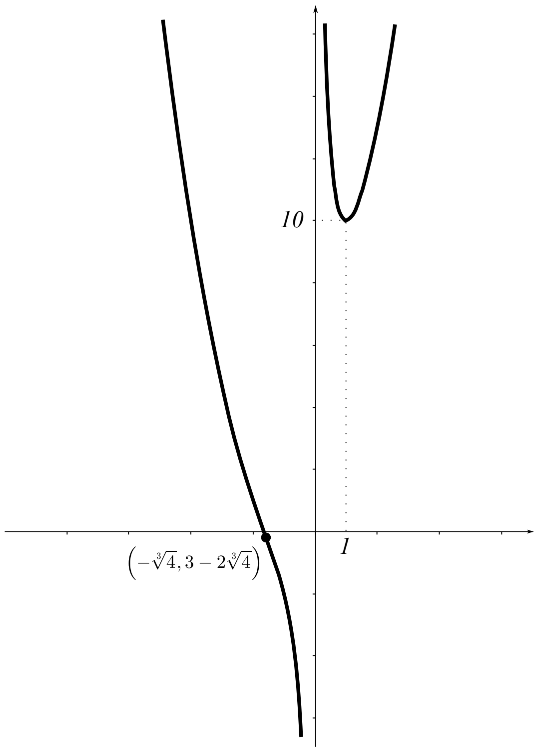
(1)

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt[3]{4}$	$\cdots$	0		$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	/	$-$			/	/	$-$	0	$+$	/
$f''(x)$	/	$+$	0	$-$	/	/	$+$			/
$f(x)$	$+\infty$	⤷	$3-2\sqrt[3]{4}$	⤵	$-\infty$	$+\infty$	⤷	10	⤴	$+\infty$

ただし、$\sqrt[3]{4} \approx 1.6$ です。

配点：(1)10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　(1)



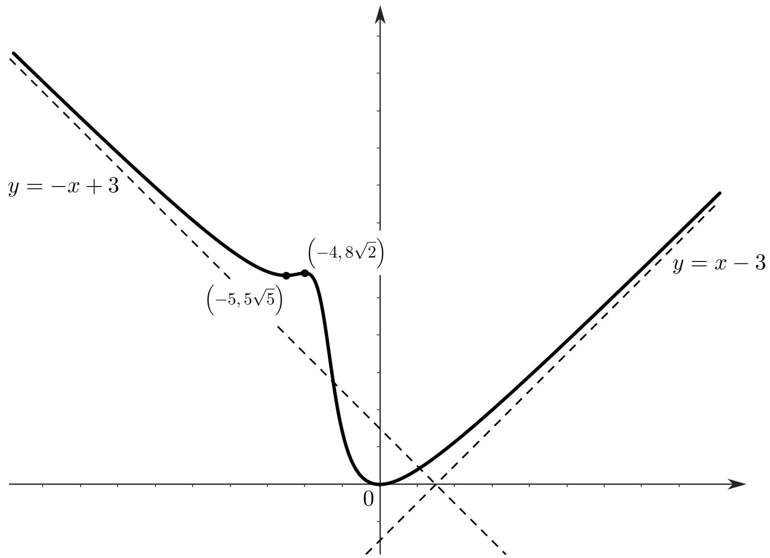
(2)

x	$-\infty$	$\cdots$	-5	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	$+\infty$
$g'(x)$	/	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	/
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$5\sqrt{5}$	$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ただし、直線 $y = \pm(x-3)$ は $x \to \pm\infty$ での漸近線（復号同順）です。

配点：(2)10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　(2)



□