

2 π の数値計算

May I tell a story purposing to render clear the ratio circular perimeter breadth, revealing one of the problems most famous in modern days, and the greatest man of science anciently known...

2.1 Gregory-Leibniz 級数

$\frac{1}{1+x^2}$ を積分すると、原始関数が $\text{Tan}^{-1}x$ ですから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Tan}^{-1}x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

となります。その一方で等比級数の和の公式：

$$1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1)$$

を使って変形してみると

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

ですから

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

となって π の級数表示として古くから良く知られている Gregory-Leibniz 級数が得られます。これによって π の近似計算が可能になります：

$$\pi = 4 - \underbrace{\frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7}}_{\text{近似値}} + \underbrace{\left(\frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots \right)}_{\text{誤差}}.$$

しかし詳しく計算してみると下に示すようになかなか誤差が小さくなっていきません (MGL_n は、奇数 n に対して $\frac{4}{n}$ の項までの和を表します)：

$$MGL_1 = 4.00000000000000 \dots$$

$$MGL_3 = 3.46666666666666 \dots$$

$$MGL_5 = 3.3396825396825 \dots$$

$$MGL_7 = 3.2837384837384 \dots$$

$$MGL_9 = 3.2523659347188 \dots$$

2.2 $\tan x$ の加法定理

次にこの奇妙な積分はどうでしょう：

$$16 \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int_0^{\frac{1}{239}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

訳の分からない式が出て来ましたが、原始関数は $\text{Tan}^{-1}x$ でしたから

$$16 \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int_0^{\frac{1}{239}} \frac{1}{1+x^2} dx = 4 \left(4\text{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \text{Tan}^{-1}\frac{1}{239} \right)$$

となっています。 $\text{Tan}^{-1}x$ は $\tan$ が x になる様な角度のことでしたから、括弧の中身は、これを全部角度だと思ってしまえば、『 $\tan$ が $\frac{1}{5}$ である様な角の 4 倍角から $\tan$ が $\frac{1}{239}$ である様な角を引いたもの』と読める事がわかります。

そこで $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{1}{5}$ と置けば、 $\tan$ の加法定理から、

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\theta = \frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{5}{12^2}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{144-25}{144}} = \frac{120}{119}$$

$$\tan \left(4\theta - \text{Tan}^{-1}\frac{1}{239} \right) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119 \cdot 239}} = \frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = 1$$

となって、結局この角 $4\theta - \text{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$ は $\tan$ が 1 ですからこれは $\frac{\pi}{4}$ である事がわかります。従ってその 4 倍角は π ですから、めでたく

$$16 \int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int_0^{\frac{1}{239}} \frac{1}{1+x^2} dx = 4 \left(4\text{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \text{Tan}^{-1}\frac{1}{239} \right) = \pi$$

となります。

事実 2.2.1 [Gregory-Leibniz 級数 (Madhava,1350-1425; J.Gregory,1671; G.W.von Leibniz,1674)]

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

事実 2.2.2 [Machin の式 (J. Machin, 1706)]

$$\pi = 16\text{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - 4\text{Tan}^{-1}\frac{1}{239}.$$

ここでさっきと同じ様に級数展開して有限項までの和：

$$M_n = 16 \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1} \right]_0^{\frac{1}{239}} - 4 \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1} \right]_0^{\frac{1}{239}}$$

を計算すると、下表の様になっています：

$$M_1 = 3.1832635983264 \dots$$

$$M_3 = 3.1416210293251 \dots$$

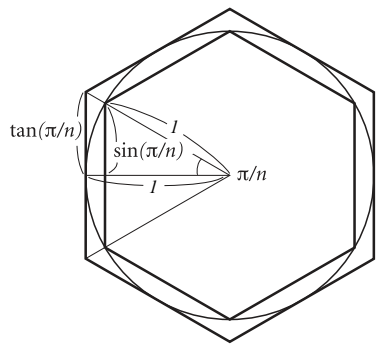
$$M_5 = 3.1415926824044 \dots$$

$$M_7 = 3.1415926536236 \dots$$

$$M_9 = 3.1415926535899 \dots$$

これは結構良い近似ですね。最初に見た Madhava-Gregory-Leibniz 級数の有限和と比べれば少ない回数でより精度の高い数値が得られています。

2.3 円の正多角形近似



円周率を計算する最も原始的な方法は円を正多角形で近似すると云うもので、紀元前 2000 年には既に正 6 角形による近似が行われていたようです。3 世紀には正 3072 角形で 3.14159 まです計算され（劉徽）、17 世紀には正 2^{62} 角形、35 桁の計算が得られていました（Ludolph van Ceulen 1610 頃）。

例えば半径 1 の円に外接・内接する正 6 角形 P_0, Q_0 を考えましょう（上図）。 Q_0 の 1 辺は 1 ですからその半周長 q_0 は 3 です。

一方 P_0 の 1 辺は $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 、半周長 p_0 は $2\sqrt{3}$ なので円の半周長 π が評価出来ます：

$$q_0 = 3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3.46410162 \dots = p_0.$$

次に外接・内接する正 12 角形 P_1, Q_1 を考えると、 Q_1 の 1 辺は $2 \sin \frac{\pi}{12}$ 、半周長 q_1 は $12 \sin \frac{\pi}{12}$ です。一方 P_1 の 1 辺は $2 \tan \frac{\pi}{12}$ 、半周長 p_1 は $12 \tan \frac{\pi}{12}$ となります：

$$q_1 = 12 \sin \frac{\pi}{12} = 3.10582854 \dots < \pi < 3.21539031 \dots = 12 \tan \frac{\pi}{12} = p_1.$$

一般に外・内接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の半周長 p_n, q_n による評価式は次の様になります：

$$q_n = 6 \cdot 2^n \sin \frac{\pi}{6 \cdot 2^n} < \pi < 6 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{6 \cdot 2^n} = p_n.$$

ここで $\tan \frac{\theta}{2} = t$ と置けば $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$ と書けるので、

$$\frac{\tan \theta \sin \theta}{\tan \theta + \sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}, \quad \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

と云う関係式が得られ、これを p_n, q_n に対して適用すれば、漸化式：

$$p_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} = \frac{p_n q_n}{\frac{p_n + q_n}{2}}, \quad q_{n+1} = \sqrt{p_{n+1} q_n}$$

が成り立っています。

2009 年 8 月、D.Takahashi（筑波大）は 74 時間の計算時間で π を 2 兆 5769 億 8037 万桁計算する事に成功しました（当時の世界記録）が、この計算に使われたアルゴリズムは、円の多角形近似に源流をもつ Gauß-Legendre 法と呼ばれるものでした（R.Brent, E.Salamin, 1975）：

$$\text{漸化式：} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$t_{n+1} - t_n = -2^n (a_{n+1} - a_n)^2 = -2^n (a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)$$

$$\text{初項：} \quad a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_0 = \frac{1}{4}, \quad \text{近似式：} \quad GL_n = \frac{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2}{t_n}.$$

実際の計算結果（下表）を見れば分かる様に、この方法は格段に早く収束するので 1980 年代から 2000 年代にかけて多くの世界記録を生み出してきました：

$$GL_1 = 3.14057925052216824831133126897582331177344 \dots$$

$$GL_2 = 3.14159264621354228214934443198269577431443 \dots$$

$$GL_3 = 3.14159265358979323827951277480186397438122 \dots$$

$$GL_4 = 3.14159265358979323846264338327950288419711 \dots$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716 \dots$$

2.4 計算機による π の数値計算

今紹介した Takahashi の世界記録までは、世界記録レベルの数値計算といえばスーパーコンピュータが主役であり、主に合衆国と日本でスーパーコンピュータの熾烈な開発競争が繰り広げられました。

しかし 2009 年 12 月 31 日、F.Bellard は検算も含めて 131 日掛けて世界記録を更新する 2 兆 7000 億桁の計算に成功しましたが、何と普通のパソコン (Linux, Intel Core i7 2.93 GHz × 4core) によるものだったため、世界に大きな衝撃を与えました。

更に 2010 年 8 月には、S.Kondo, A.J.Yee が一気に 5 兆桁までの計算に成功しました。これもパソコン (Windows Server, Intel Xeon X5680 3.33 GHz × 6core × 2CPU) によるものです (検算が簡素化されているため不十分との見方あり)。

どちらの場合も使用された近似式はインドの天才 S. Ramanujan の公式 (1914) :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

を更に改良した高速型の D.V. and G.V. Chudnovsky の公式 (1989) でした :

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n)!(n!)^3 (640320)^{3n+\frac{3}{2}}}$$

まさに『わけわからん!』としか言い様がありませんが、どうやって思いつくんでしょうね? 当の Ramanujan は証明と云う概念を持っていなかったため、『寝ている間に神様が僕の舌に書き込んだんだ』とか意味不明なことを言っていた様です。

具体的な計算を見ると下表の様にもの凄い早さで収束しています :

$$R_1 = \underline{3.14159265358979387799890582630601309421664} \dots$$

$$R_2 = \underline{3.14159265358979323846264906570275889815667} \dots$$

$$R_3 = \underline{3.14159265358979323846264338327955527315997} \dots$$

$$R_4 = \underline{3.14159265358979323846264338327950288419766} \dots$$

$$C_1 = \underline{3.14159265358979323846264338358735068847586} \dots$$

$$C_2 = \underline{3.14159265358979323846264338327950288419716} \dots$$

(R_n は Ramanujan の公式、 C_n は Chudnovsky Bros. の公式の有限和によるものです)

その後も Yee とパートナー (S.Kondo, S.V.Ness, P.Trueb, E.H.lwao) によって同様の計算は推し進められ、現在のところ円周率の数値計算の世界記録は、Google cloud による分散コンピューティングを使った 31 兆 4159 億 2653 万 5897 桁です (2019)。

遡れば、2002 年 11 月に東大の Y. Kanada が 1 兆 2411 億桁の驚異的な世界記録 (当時) を叩き出した時の計算式は $\tan^{-1}$ 系の公式 (K.Takano, 1982) :

$$\pi = 48 \tan^{-1} \frac{1}{49} + 128 \tan^{-1} \frac{1}{57} - 20 \tan^{-1} \frac{1}{239} + 48 \tan^{-1} \frac{1}{110443}$$

でした。このタイプのアルゴリズムは (先に数値計算を見た様に) Gauß-Legendre 法などに比べて速度的に劣っており、80 年代には使われなくなっていました。確かにこの時も実に 600 時間ほど掛かっています。

しかし 90 年代に Takahashi と共に Chudnovsky 兄弟との熾烈な世界記録合戦をくり抜けた Kanada は、低速アルゴリズムにも様々な面から追究の余地はありと考へ、メモリの使い方の改善など技術的な革新を進めることによって往年の $\tan^{-1}$ 法でも高速アルゴリズムと比べて遜色のない計算が出来る事を示しました。

実は半世紀ほど前 (1949)、人類史上初めてコンピュータを用いた本格的な π の計算が行われ、あの真空管約 1 万 8000 本、重量 30t の ENIAC が 70 時間かけて小数点以下 2037 桁まで正しく π の値を求めた時に使われた計算式は、ほかでもない、今日見た Machin の $\tan^{-1}$ の式

$$\pi = 16 \tan^{-1} \frac{1}{5} - 4 \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

だったんです。なんだかわくわくしませんか?

2.5 問題演習

演習問題 2.1 Tangent の加法定理を証明して下さい :

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

【解答例】

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

ですから辺々割れば、

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

が分かります。

□

演習問題 2.2 Tangent の加法定理を使って以下の各式を証明して下さい :

$$(1) 2\tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{J. Hermann, 1706})$$

$$(2) 5\tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{3}{79} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{L. Euler, 1755})$$

$$(3) \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{13} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{F.C.M. Störmer, 1896})$$

【解答例】(2)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7^2}} &= \frac{14}{48} = \frac{7}{24} \\ \frac{\frac{7}{24} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{7^2}{24^2}} &= \frac{14 \cdot 24}{24^2 - 7^2} = \frac{336}{527} \\ \frac{\frac{1}{7} + \frac{336}{527}}{1 - \frac{336}{7 \cdot 527}} &= \frac{527 + 7 \cdot 336}{7 \cdot 527 - 336} = \frac{2879}{3353} \end{aligned}$$

によれば、

$$5\tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{2879}{3353}$$

である一方、

$$\frac{\frac{3}{79} + \frac{3}{79}}{1 - \frac{3^2}{79^2}} = \frac{6 \cdot 79}{79^2 - 3^2} = \frac{474}{6232}$$

によれば、

$$2\tan^{-1}\frac{3}{79} = \tan^{-1}\frac{474}{6232}$$

であるので

$$\frac{\frac{2879}{3353} + \frac{474}{6232}}{1 - \frac{2879 \cdot 474}{3353 \cdot 6232}} = \frac{2879 \cdot 6232 + 474 \cdot 3353}{3353 \cdot 6232 - 2879 \cdot 474} = \frac{19531250}{19531250} = 1$$

から

$$5\tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{3}{79} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

が得られます (他も同様)。

□

演習問題 2.3 演習問題 2.2 の各式と同じ様な式を他に見つかりますか？

【解答例】前後しますが演習問題 2.4 の結果から、

$$\tan^{-1}\frac{1}{a+b} + \tan^{-1}\frac{b}{a^2+ab+1} = \tan^{-1}\frac{1}{a}$$

となるので、例えば $a = 2, b = 1$ の時、

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

が分かります。

また、右辺を $\frac{\pi}{4}$ にしようとするならば $a = 1$ とすれば良く、例えば $b = 3$ とすると

$$\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$$

などが得られます。

□

演習問題 2.4

$$\tan \phi = \frac{1}{a+b}, \quad \tan \psi = \frac{b}{a^2+ab+1} \quad (a, b > 0)$$

である時に $\tan(\phi + \psi)$ を計算して下さい (L. Euler, 1737)。

【解答例】

$$\frac{\frac{1}{a+b} + \frac{b}{a^2+ab+1}}{1 - \frac{b}{(a+b)(a^2+ab+1)}} = \frac{(a^2+ab+1) + b(a+b)}{(a+b)(a^2+ab+1) - b} = \frac{a^2+2ab+b^2+1}{a^3+a^2b+a+a^2b+ab^2} = \frac{1}{a}$$

により、 $\tan(\phi + \psi)$ は $\frac{1}{a}$ です。

□

演習問題 2.5 $\tan x = \tan(100x)$ の、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲での実数解の個数を求めてください。

【解答例】 加法定理によれば

$$\tan(100x - x) = \frac{\tan(100x) - \tan x}{1 + \tan(100x) \tan x}$$

なので、 $\tan x = \tan(100x)$ であることは $\tan(99x) = 0$ であることと同値ですから、これを満たす x を題意の範囲で求めればよく、

$$x = \frac{\pi}{99}, \frac{2\pi}{99}, \dots, \frac{49\pi}{99}$$

の 49 個です。

□

演習問題 2.6 $\tan 1^\circ$ は無理数である事を証明して下さい（京大入試）。

【解答例】もし $\tan 1^\circ$ が有理数なら、加法定理から $\tan 2^\circ$ も有理数となり、これを繰り返せば $\tan 30^\circ$ も有理数と云う事になりますが、 $\tan 30^\circ = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であってこれは有理数ではありません。よって矛盾が生じるので $\tan 1^\circ$ が有理数であると言う最初の仮定は正しくありません。

□

2.6 今回の目標

A1 : π の数値計算に逆三角関数が使われた歴史があることを知っている。

A2 : 円周と正多角形の外周を比較して π を評価する方法があることを知っている。

B1 : Tangent の加法定理を使って Machin の式の類の等式を証明できる。

B2 : 簡単な正多角形を使って π の評価ができる。

C1 : 関連した演習問題が解ける。

C2 : π の数値計算の歴史を調べてまとめることができる。