

2 Riemann 和の極限としての定積分

2.1 交代級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad (\text{調和級数})$$

N.Oresme (1350 頃) の計算：

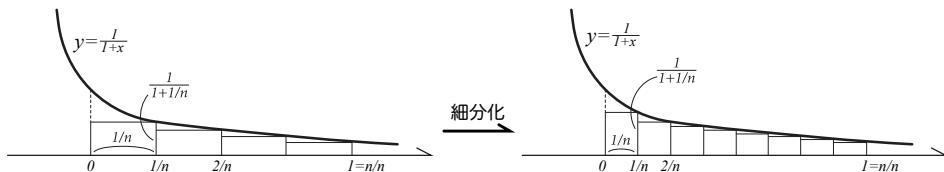
$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &> 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = +\infty \end{aligned}$$

偶数番目を負にすると・・・

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

これは下図のような長方形の面積の総和に等しく、 n を大きくすれば分割は細分され長方形群とグラフの間の隙間は無くなって行き、長方形の面積の総和はグラフの下の面積に収束します：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2.$$



本来定積分はこのように面積を意識したものとして定義されます。

2.2 本来の積分の定義

定義 2.2.1 [本来の定積分の定義] 区間 $[a, b]$ を有限個の小区間に分割し、

$$\Delta : a = d_0 < d_1 < \cdots < d_n = b$$

各小区間 $[d_{k-1}, d_k]$ 内から 1 点ずつ (自由に) ピックアップします：

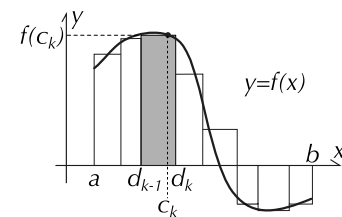
$$d_{k-1} \leq c_k \leq d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & c_1 & c_2 & & c_k & & c_n & b \\ \hline d_0 & d_1 & d_2 & & d_{k-1} & d_k & & d_n \end{array}$$

小区間の長さ $d_k - d_{k-1}$ に各点 c_k での関数値

$f(c_k)$ を掛け合わせたものの総和：

$$\sum_{k=1}^n f(c_k)(d_k - d_{k-1})$$



を考え、(区間の分割 Δ とピックアップ $\{c_k\}$ によって定まる) リーマン和と呼びます。

$f(x)$ が連続関数であるとき、区間の分割を極限まで細かくして行くと、リーマン和の値は、分割の仕方や小区間からの点のピックアップの仕方に依存せずに、 f と a, b のみによって決まるある実数に収束することが知られており、その値の事を

$$\int_a^b f(x) dx$$

で表し、関数 f の、区間 $[a, b]$ 上での定積分と言います。

また、便宜上次のように定めます：

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (a < b), \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

最初はこのようにして (微分とは無関係に) 定められた積分でしたが、その後微分の逆演算としての積分に一致することが発見され、発展しました。

2.3 区分布積法による極限值計算

問題 2.3.1 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right)$ を求めて下さい。

【解答例】 ある区間を幅 $\frac{1}{n}$ の小区間で等分すると、分割点は一般に $\frac{k}{n}$ であり、各小区間から（右）端点をピックアップした場合リーマン和は一般に

$$\sum_k f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \quad (2.1)$$

の形をしているはずですが、問題の和はこの形になっているのでしょうか？ そこで問題の式の中にある k, n を $\frac{k}{n}$ の形に変形してみます：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right) = \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{n} \right) \frac{1}{n}$$

すると 1 つの $\frac{1}{n}$ が浮いている以外、全ての k, n が上手く $\frac{k}{n}$ の形でまとめることが出来ました。これが (2.1) だとすれば、

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \log \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{n} \right), \quad \text{すなわち} \quad f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{3}x \right)$$

を考えれば良いことが分かります。

次に積分区間がどこなのかですが、これは x に対応している $\frac{k}{n}$ がどこからどこまで動くかを見てやります。ただし、 n は最終的に $n \rightarrow \infty$ の極限を取りますから、 n はもの凄く大きい値だと思ってみておきます。

まず $k=1$ から始まっていますが、この時は $\frac{1}{n} \approx 0$ です。また最後は $k=n$ ですから $\frac{k}{n} = \frac{n}{n} = 1$ まで考えているわけです。従って積分範囲は $[0, 1]$ となります。

区間 $[0, 1]$ の n 等分割：

$$0 = d_0 < d_1 = \frac{1}{n} < d_2 = \frac{2}{n} < \cdots < d_n = \frac{n}{n} = 1$$

及びこの分割の各小区間から 1 つずつ取った点 $\{c_k\}$ （各区間の右端点です）：

$$\frac{k-1}{n} \leq c_k = \frac{k}{n} \leq \frac{k}{n}$$

と連続関数 $f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{3}x \right)$ に対して

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{1}{n}$$

は対応するリーマン和ですから、その $n \rightarrow \infty$ での極限は分割を細かくする極限であり、定積分：

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \log \left(1 + \frac{1}{3}x \right) dx$$

に収束します。従って

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right) &= \int_0^1 \log \left(1 + \frac{1}{3}x \right) dx \\ &= \left[(3+x) \log \left(1 + \frac{x}{3} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 (3+x) \frac{1}{1+\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} dx \\ &= 4 \log \frac{4}{3} - \int_0^1 dx \\ &= 4 \log \frac{4}{3} - 1 \end{aligned}$$

が分かります。□

【別解】 $3n$ をまとめて扱うことも出来ます：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right) = \sum_{k=1}^n 3 \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right) \frac{1}{3n}$$

これは幅 $\frac{1}{3n}$ で等分することに対応しており、 $g(x) = 3 \log(1+x)$ を考えます。

この場合 $\frac{k}{3n}$ の値は $k=1$ の時の $\frac{1}{3n} \approx 0$ から $k=n$ の時の $\frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$ まで動きますから、積分区間は $[0, \frac{1}{3}]$ を考えることになります。これを n 等分すれば 1 つ 1 つの小区間の幅は $\frac{1}{3n}$ です。

区間 $[0, \frac{1}{3}]$ の n 等分割：

$$0 = d_0 < d_1 = \frac{1}{3n} < d_2 = \frac{2}{3n} < \cdots < d_n = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

およびこの分割の各小区間から右端の点を取った集まり $\{p_k\}$ ：

$$\frac{k-1}{3n} \leq p_k = \frac{k}{3n} \leq \frac{k}{3n}$$

と連続関数 $g(x) = 3 \log(1+x)$ に対して

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right) = \sum_{k=1}^n g(p_k) \frac{1}{3n}$$

は対応するリーマン和ですから、その $n \rightarrow \infty$ での極限は分割を細かくする極限であり、定積分：

$$\int_0^{\frac{1}{3}} g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} 3 \log(1+x) dx$$

に収束します。従って

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{3n} \right) &= 3 \int_0^{\frac{1}{3}} \log(1+x) dx \\ &= 3 \left\{ \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} (1+x) \frac{1}{1+x} dx \right\} \\ &= 3 \left\{ \frac{4}{3} \log \frac{4}{3} - \int_0^{\frac{1}{3}} dx \right\} \\ &= 4 \log \frac{4}{3} - 1 \end{aligned}$$

が分かります。

□

演習問題 2.1 次の極限値を定積分に読み替えて求めてください。

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}} \\ (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k - \frac{1}{2}}{n} \pi \end{aligned}$$

(1) $f(x) = \sin x\pi$ とおき、 $[0, 1]$ を n 等分し、各小区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ の中から右端点 $\frac{k}{n}$ をとれば、これはリーマン和なので $n \rightarrow \infty$ で定積分 $\int_0^1 \sin x\pi dx$ に収束します。従って求める極限値は

$$\int_0^1 \sin x\pi dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos x\pi \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}(-1 - 1) = \frac{2}{\pi}$$

です。

(2) まず変形すると

$$\frac{k^4}{n^5} = \left(\frac{k}{n} \right)^4 \cdot \frac{1}{n}$$

ですから、 $f(x) = x^4$ とおき、 $[0, 1]$ を n 等分して、各小区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ の中から右端点 $\frac{k}{n}$ を取ればこれはリーマン和なので、 $n \rightarrow \infty$ のときこれは定積分 $\int_0^1 x^4 dx$ に収束します。従って求める極限値は

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

です。

(3) まず変形すると

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}}$$

ですから、 $f(x) = x e^x$ とおき、 $[0, 1]$ を n 等分して、各小区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ の中から右端点 $\frac{k}{n}$ を取ればこれはリーマン和なので、 $n \rightarrow \infty$ のときこれは定積分 $\int_0^1 x e^x dx$ に収束します。従って求める極限値は

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

です。

(4) これは

$$\sum_k f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

の形をしていませんので注意が必要です。そもそもなぜこの形だったかと言え、区間を幅 $\frac{1}{n}$ の小区間に等分割し、各小区間の中から勝手に点を選ぶときに小区間の端の点を選んだからこう書けたのであって、別のピックアップの仕方をすれば（つまり、小区間の端点以外をピックアップすれば）別の形になるはずで。

$f(x) = \sin x\pi$ とおき、 $[0, 1]$ を n 等分し、各小区間 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ の中から中点 $\frac{k-\frac{1}{2}}{n}$ をとれば、これはリーマン和（の π 倍）なので $n \rightarrow \infty$ で定積分 $\pi \int_0^1 \sin x\pi dx$ に収束します。従って求める極限値は

$$\pi \int_0^1 \sin x\pi dx = \pi \frac{2}{\pi} = 2$$

です。

□

2.4 交代級数の順序交換

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

しかしこの級数の足す順番を微妙に入れ替えると、奇妙な事に

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

となってしまいます。つまり、足す順番を変えると総和が変わってしまうのです。

更に別の並び替えを試してみましょう。

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots$$

と並べ替えてみると総和はどうなるでしょうか。第 $3n$ 項目までの部分 S_{3n} は

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left\{ \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right\} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right)}_{2n \text{ 個}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2n-1}\right)}_{n \text{ 個}} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right)}_{\log 2 \text{ に収束する部分}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{1 + \frac{3}{2n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{2n-1}{2n}} \right) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

と書けますから、前半部分は既に見たように区分求積法により $n \rightarrow \infty$ で $\log 2$ に収束します。後者は、区間 $[0, 1]$ の n 等分割：

$$0 = d_0 < d_1 = \frac{1}{n} < d_2 = \frac{2}{n} < \cdots < d_n = \frac{n}{n} = 1$$

と、各小区間からの点のピックアップ：

$$d_{k-1} = \frac{k-1}{n} < \frac{2k-1}{2n} = c_k < \frac{k}{n} = d_k$$

によって作られるリーマン和：

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + c_k} (d_k - d_{k-1})$$

と考えられますから、 $n \rightarrow \infty$ において定積分：

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2} [\log(1+x)]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

に収束します。従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \log 2$$

となる事が分ります。今度は $\frac{3}{2}$ 倍になってしまいましたね。

2.5 Exercise

演習問題 2.2 (1) 次の極限值を求めて下さい：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}$$

ですから、 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ とおき、区間 $[0, 1]$ を n 等分します：

$$0 = d_0 < d_1 = \frac{1}{n} < d_2 = \frac{2}{n} < \cdots < d_n = \frac{n}{n} = 1$$

更に分割の各小区間から右端の点をピックアップした点の集まり $\{c_k\}$ ：

$$\frac{k-1}{n} \leq c_k = \frac{k}{n} \leq \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

を考えると

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{1}{n}$$

であってこれはリーマン和です。 $n \rightarrow \infty$ のとき分割の幅は小さくなって行きますから問題の極限值は定積分：

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

です。

□

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n}{n} \right)^2 \right\}.$$

区間 $[0, 2]$ の $2n$ 等分割：

$$0 = d_0 < d_1 = \frac{1}{n} < d_2 = \frac{2}{n} < \cdots < d_{2n} = \frac{2n}{n} = 2$$

およびこの分割の各小区間から 1 つずつ取った点 $\{c_k\}$ ：

$$\frac{k-1}{n} \leq c_k = \frac{k}{n} \leq \frac{k}{n}$$

と連続関数 $f(x) = x^2$ に対して

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^{2n} f(c_k) \frac{1}{n}$$

は対応するリーマン和ですから、その $n \rightarrow \infty$ での極限は分割を細かくする極限であり、定積分：

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

に収束します。

【別解】区分求積法を知らなくても計算出来ます：

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n}{n} \right)^2 \right\} &= \frac{1}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2\} \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} (2n)(2n+1) \{2(2n) + 1\} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(4 + \frac{1}{n} \right) \\ &\rightarrow \frac{8}{3} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

□

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}.$$

$$\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

ですから、区間 $[0, 2]$ の $2n$ 等分割：

$$0 = d_0 < d_1 = \frac{1}{n} < d_2 = \frac{2}{n} < \cdots < d_{2n} = \frac{2n}{n} = 2$$

およびこの分割の各小区間から 1 つずつ取った点 $\{c_k\}$ ：

$$\frac{k-1}{n} \leq c_k = \frac{k}{n} \leq \frac{k}{n}$$

と連続関数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ に対して

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{2n} f(c_k) \frac{1}{n}$$

は対応するリーマン和ですから、その $n \rightarrow \infty$ での極限は分割を細かくする極限であり、定積分：

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = [\log(1+x)]_0^2 = \log 3$$

に収束します。

□

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2) \cdots (4n)}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2) \cdots (4n)} &= \sqrt[n]{\frac{1}{n^n} \cdot (3n+1)(3n+2) \cdots (4n)} \\ &= \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n} \right) \left(\frac{3n+2}{n} \right) \cdots \left(\frac{4n}{n} \right)} \\ &= \sqrt[n]{\left(3 + \frac{1}{n} \right) \left(3 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left(3 + \frac{n}{n} \right)} \end{aligned}$$

ですから、対数をとれば

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)} &= \frac{1}{n} \log \left(3 + \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(3 + \frac{n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(3 + \frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

であり、これは区間 $[0, 1]$ の n 等分と関数 $\log(3+x)$ に関するリーマン和ですから、 $n \rightarrow \infty$ の極限は区間分割を細かくする極限なのでリーマン和は定積分に収束します：

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)} &= \int_0^1 \log(3+x) dx \\ &= [(3+x) \log(3+x)]_0^1 - \int_0^1 dx \\ &= 4 \log 4 - 3 \log 3 - 1 \\ &= \log \frac{4^4}{3^3 \cdot e}\end{aligned}$$

従って求める極限値は $\frac{4^4}{3^3 e}$ です。

□

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad S_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} = \frac{1}{n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$$

ですから、区間 $[0, 1]$ の n 等分割：

$$0 = d_0 < d_1 = \frac{1}{n} < d_2 = \frac{2}{n} < \cdots < d_n = \frac{n}{n} = 1$$

およびこの分割の各小区間から 1 つずつ取った点 $\{c_k\}$ ：

$$\frac{k-1}{n} \leq c_k = \frac{k}{n} \leq \frac{k}{n}$$

と連続関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{1}{n}$$

是对应するリーマン和ですから、その $n \rightarrow \infty$ での極限は分割を細かくする極限であり、定積分：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

に収束します。

□

演習問題 2.3 交代級数：

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

の和の順序を替えて、奇数の逆数を 1 個、偶数の逆数を 2 個の順にしたものを考えます：

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

第 $3n$ 項目までの部分 S_{3n} を上手く計算してリーマン和と読み取ることによって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$ を求めてください。

$$S_{3n} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$

ですから、

$$\begin{aligned}S_{3n} &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}}\right) \frac{1}{n} \\ &\rightarrow \log 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} \log 2 \\ &= \frac{1}{2} \log 2\end{aligned}$$

分割小区間の右端の点をピックアップしていることに注意。

$$\text{分割： } 0 = d_0 < \frac{1}{n} = d_1 < \frac{2}{n} = d_2 < \cdots < d_n = 1$$

$$\text{小区間内の点: } \frac{k-1}{n} = d_{k-1} \leq c_k = \frac{k}{n} \leq d_k = \frac{k}{n}$$

□

ます:

$$\begin{aligned} S_{(M+N)n} &\rightarrow \log 2 + \frac{1}{2} \int_0^{M-N} \frac{1}{N+x} dx \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} [\log(N+x)]_0^{M-N} \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{M}{N} \end{aligned}$$

交代級数で項の絶対値が 0 に収束するものは収束しますから、部分和 $S_{(M+N)n}$ の収束から級数の収束が言えることになります。 □

演習問題 2.4 $M > N$ とします。交代級数:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

の和の順序を替えて、最初に奇数の逆数を順に M 個足し、偶数の逆数を順に N 個引きます。以後これを繰り返して行くと総和はどうなるでしょうか。

この順での部分和を S_n とするとき、 $(M+N)n$ 項目までの部分 and は

$$\begin{aligned} S_{(M+N)n} &= \left(\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2M-1}}_{M \text{ 個}} - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2N}}_{N \text{ 個}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2M+1} + \cdots + \frac{1}{4M-1} - \frac{1}{2N+2} - \cdots - \frac{1}{4N} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2(n-1)M+1} + \cdots + \frac{1}{2nM-1} - \frac{1}{2(n-1)N+2} - \cdots - \frac{1}{2nN} \right) \end{aligned}$$

となります。すると

$$S_{(M+N)n} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2nN} \right)}_{2nN \text{ 個}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2nN+1} + \frac{1}{2nN+3} + \cdots + \frac{1}{2nM-1} \right)}_{(M-N)n \text{ 個}}$$

ですが、ここで $2nM-1 = 2nN + 2n(M-N)-1$ であることによれば

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2nN} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{N + \frac{3}{2n}} + \cdots + \frac{1}{N + \frac{2n(M-N)-1}{2n}} \right) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

です。ここで前者は既に見たように区分求積法により $n \rightarrow \infty$ で $\log 2$ に収束します。また後者も、区間 $[0, M-N]$ の $(M-N)n$ 等分割において各分割区間の中点をピックアップして関数 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N+x}$ について考えたリーマン和ですから、これも定積分に収束し