

1 微分の復習

目標
C1. 基本的な関数の導関数を知っている
B1. 微分可能性・導関数の定義を理解し、説明できる
B2. 一般的な関数の微分計算ができる 演習問題 1.4、1.5
A1. 逆双曲線関数が関係する微積分を認識している 演習問題 1.2、1.3

1.1 定義

定義 1.1.1 [連続性] $\lim_{b \rightarrow a} f(b) = f(a)$ であるとき、関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であると言います。

定義 1.1.2 [微分可能性] 関数 $f(x)$ は点 $x = a$ を含むある開区間の内部全体で定義されているとします。次の極限值：

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が有限値として存在するとき、関数 $f(x)$ は点 $x = a$ で微分可能であると言います。またこの存在する極限値のことを関数 $f(x)$ の点 $x = a$ における微分係数と言ひ、次の記号で表します：

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}.$$

$b - a = h$ と置けば、 $b \rightarrow a$ である事と $h \rightarrow 0$ である事は全く同じ事です。だから上に書いた形ではなく、次の様な形：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

の極限値が存在することを示しても良いでしょう。

また、関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で微分可能であれば、

$$f(b) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) \rightarrow f'(a) \cdot 0 = 0 \quad (b \rightarrow a)$$

となっており、これは $f(x)$ が点 $x = a$ で連続であることを意味します。

定義 1.1.3 [導関数] 関数 $f(x)$ が開区間 (c, d) 内の各点で微分可能であるとき、関数 $f(x)$ は区間 (c, d) で微分可能であると言ひ、区間内の各点 x に対してその点での微分係数を対応させて得られる関数のことを関数 $f(x)$ の（この区間における）導関数または微分と言ひ、記号

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}(x), \quad \frac{df(x)}{dx}$$

などで表します。導関数を求めることを『微分する』とも言ひます。

1.2 微分の基本的な性質

事実 1.2.1

【線形性】 a, b : 実数

$$\{af(x) + bg(x)\}' = af'(x) + bg'(x)$$

【積・商】

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

【合成関数】

$$(f \circ g)'(x) = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

1.3 基本的な関数の導関数

事実 1.3.1 [基本的な関数の導関数] $r(\neq 0), c$ は定数

■べき関数

$$\frac{d}{dx}c = 0 \quad \frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1} \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■指数・対数関数

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

■三角関数

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

■逆三角関数

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Cos}^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Sin}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Tan}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

1.4 双曲線関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

演習問題 1.1 双曲線関数の導関数を求めてください。

$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

□

演習問題 1.2 双曲線関数の逆関数を求めてください。ただし $\cosh x$ に関しては、定義域を $[0, +\infty)$ に制限したものの逆関数を求めてください。

$\cosh x$ の導関数は $\sinh x$ であって、 $x < 0$ のとき $(\cosh x)' < 0$ 、 $x > 0$ のとき $(\cosh x)' > 0$ です。

従って $\cosh x$ の定義域を $[0, +\infty)$ に制限したものは単調増加関数であって逆関数が存在します。逆関数を求めると

$$y = \cosh x \quad (x \geq 0) \xrightarrow{\text{逆関数}} x = \cosh y \quad (y \geq 0)$$

$$= \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$2xe^y = e^{2y} + 1$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$(e^y - x)^2 = x^2 - 1$$

です。ここで $y \geq 0$ のとき $e^y \geq e^{-y}$ ですから $e^y \geq x$ なので

$$e^y - x = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

が得られます。これが $\cosh x$ の定義域を $[0, +\infty)$ に制限したものの逆関数です。

$$\cosh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

一方 $(\sinh x)' = \cosh x > 0$ ですから $\sinh x$ は単調増加関数であり、逆関数が存在します。

$$y = \sinh x \xrightarrow{\text{逆関数}} x = \sinh y$$

$$= \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$(e^y - x)^2 = 1 + x^2$$

ですが、 $x \leq 0$ ならば明らかに $e^y - x > 0$ であり、 $x > 0$ ならば $e^y > e^{-y}$ であって、これは $y > 0$ を意味し

$$x < 2x = e^y - e^{-y} < e^y$$

が分かり、結局この場合も $e^y - x > 0$ ですから

$$e^y - x = \sqrt{1 + x^2}$$

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

が得られます。

$$\sinh^{-1}x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

$\tanh x$ も単調増加関数ですから逆関数が存在して

$$y = \tanh x \xrightarrow{\text{逆関数}} x = \tanh y$$

$$= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

$$x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$$

$$x + 1 = (1 - x)e^{2y}$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

です。

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

□

演習問題 1.3 逆双曲線関数の導関数を求めてください。

$$(\cosh^{-1}x)' = \left\{ \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right\}' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\sinh^{-1}x)' = \left\{ \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right\}' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\tanh^{-1}x)' = \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}(-1) \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

□

事実 1.4.1

■双曲線関数

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

■逆双曲線関数

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \frac{d}{dx} \sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \frac{d}{dx} \tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$$

ただし、 $\cosh^{-1}x$ は、 $\cosh x$ の定義域を $[0, +\infty)$ に制限したものの逆関数とします。

1.5 Exercise 様々な関数の微分 ～導関数が印象的なケースを中心に～

演習問題 1.4 次の関数を微分してください。

- (1) $\frac{\sin x - 1}{\cos x}$ (2) $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ (3) $\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ (4) $\log |\cos x|$
- (5) $x \log x - x$ (6) $\frac{1}{2} \{ x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}) \}$

(1)

$$\left(\frac{\sin x - 1}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x - (\sin x - 1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + C$$

(2)

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)' = \frac{1}{2} \frac{(\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} + C$$

(3) $\log \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \log(1 + \sin x) - \log(1 - \sin x)$ と変形してから計算すると

$$\left(\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} - \frac{-\cos x}{1 - \sin x} \right) = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

です。

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C$$

$$(4) \quad \{\log |\cos x|\}' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

$$\int \tan x dx = -\log |\cos x| + C$$

$$(5) \quad (x \log x - x)' = \log x + 1 - 1 = \log x$$

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$(6) \quad \left(\frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right\} \right)' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \sqrt{1+x^2}.$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right\} + C.$$

□

演習問題 1.5 次の関数を微分してください：

$$(1) \log x - \frac{(x+1)\log(x+1)}{x} \quad (2)^* e^{\cos x} \{\sin(x + \sin x) - \sin \sin x\}$$

$$(3)^* (\tan x) \log(\cos x) + \tan x - x \quad (4)^* \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x \cos(2 \log x) - \frac{1}{5}x \sin(2 \log x)$$

$$(5) 2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} \quad (6) 2 \cos \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}$$

$$(1) \quad \left\{ \log x - \frac{(x+1)\log(x+1)}{x} \right\}' = \frac{1}{x} - \frac{\{\log(x+1) + 1\}x - (x+1)\log(x+1)}{x^2} \\ = \frac{(x+1)\log(x+1) - x\log(x+1)}{x^2} \\ = \frac{\log(x+1)}{x^2}$$

$$(2) \quad (e^{\cos x} \{\sin(x + \sin x) - \sin \sin x\})' \\ = -\sin x \cdot e^{\cos x} \{\sin(x + \sin x) - \sin \sin x\} \\ + e^{\cos x} \{\cos(x + \sin x)(1 + \cos x) - (\cos \sin x) \cos x\} \\ = e^{\cos x} \{\cos(x + \sin x) \cos x - \sin(x + \sin x) \sin x \\ + \cos(x + \sin x) - (\cos \sin x) \cos x + (\sin \sin x) \sin x\} \\ = e^{\cos x} \cos(2x + \sin x)$$

$$(3) \quad \{(\tan x) \log(\cos x) + \tan x - x\}' = \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x} + \frac{\tan x(-\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ = \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x} + \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \\ = \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$(4) \quad \left\{ \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x \cos(2 \log x) - \frac{1}{5}x \sin(2 \log x) \right\}' \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cos(2 \log x) - \frac{1}{10}x \{-\sin(2 \log x)\} \frac{2}{x} - \frac{1}{5} \sin(2 \log x) - \frac{1}{5}x \cos(2 \log x) \frac{2}{x} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2 \log x) \\ = \sin^2 \log x$$

$$\int \sin^2 \log x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x \cos(2 \log x) - \frac{1}{5}x \sin(2 \log x) + C$$

あなたならどうやって積分しますか？ まず倍角で次数を落として、部分積分を繰り返す方法でしょうか。

(5)

$$(2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x})' = 2 \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - 2\sqrt{x}(-\sin \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sin \sqrt{x}$$

(6)

$$(2 \cos \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x})' = -2 \sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt{x} \, dx &= 2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C \\ \int \cos \sqrt{x} \, dx &= 2 \cos \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$\sqrt{x} = t$ と置換して、更に部分積分という流れでしょうね。

□

演習問題 1.6 (1) $\tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\}$ の導関数が $\frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}$ となる事を示して下さい。

(2) 上の (1) の結果を使って次の積分を求めて下さい：

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx.$$

(3) 上の (2) の結果を見て何か考える事はありますか？

【解答例】 (1) 実際に微分すれば、

$$\left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2} \cdot \frac{1}{2x^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2x^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2} \\ &= \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} \end{aligned}$$

となります。

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx &= \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1} \right) \right\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{-1} \right) \right\} \\ &= \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1 \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(3) 正の関数を積分しているのに結果は負となっていました。これはオカシイ。しかし何がオカシイのでしょうか。

定積分を原始関数を使って計算する根拠となる事実をもう一度よく確かめておきましょう。

事実 1.5.1 $f(x)$ は $[a, b]$ において連続であって、 $F(x)$ がこの区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の原始関数 (の1つ) であるとき、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

まず第一に、関数 $\tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\}$ は形式上 $x = 0$ で定義されていません。

$\tan^{-1}$ は通常の主値の範囲で考えているものとして極限値を計算してみると

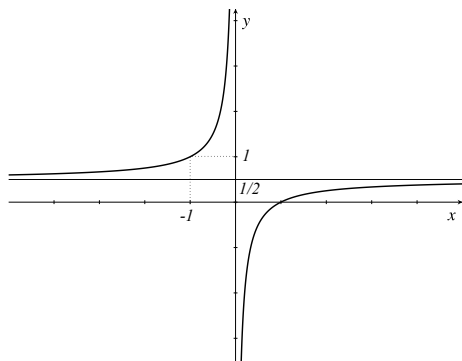
$$\lim_{x \downarrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

である一方、

$$\lim_{x \uparrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

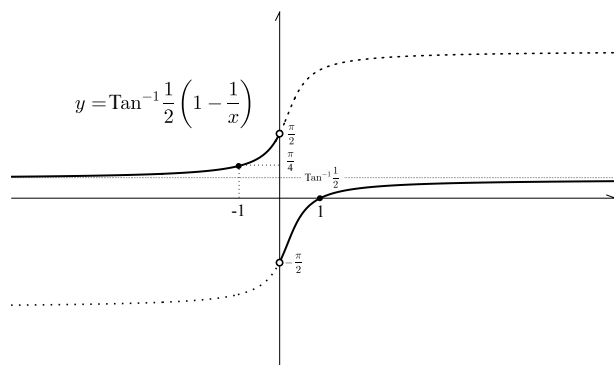
ですから、この関数は $x = 0$ の値をどのように定義したとしても連続関数にすらなりません。

$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ の増減表を書けば



x	-1	$\dots$	-0	$+0$	$\dots$	1
$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0

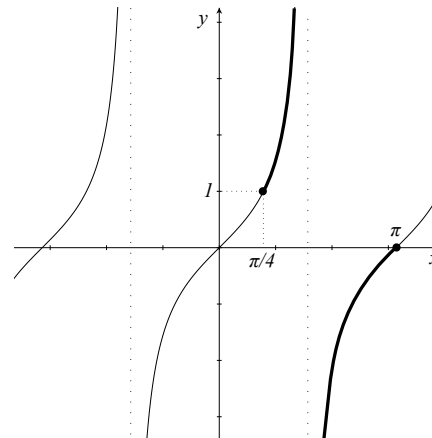
ですから、いわゆる主値をとった『普通の』 $\tan^{-1}$ と合成すると



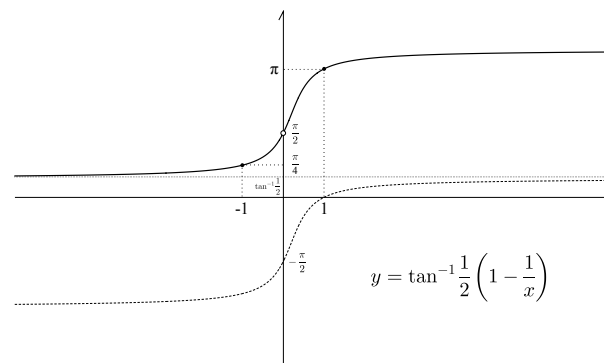
と云う風になってしまいます。これでは『 $\tan^{-1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ は区間 $(-1, 1)$ における $\frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}$ の原始関数である』とは言えません。

そこで $\tan$ の逆関数を考えるときに、通常の主値をとる（つまり $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に制限する）のではなく、例えば $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ に制限したものの逆関数を考えることにして（下図の通り、い

わゆる単調増加ではないが1対1ではある）



関数 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ と合成すれば



となりますから、 $x = 0$ のときに $y = \frac{\pi}{2}$ と定義し直せば、つまり、

$$f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

と定めれば（ただし、 $\tan^{-1}$ は、 $\tan$ の定義域を $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ に制限したものの逆関数とします）、 $f(x)$ は $[-1, 1]$ で連続かつ微分可能な $\frac{2}{4x^2 + (x-1)^2}$ の原始関数の一つです。この関数を使えば、

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx = [f(x)]_{-1}^1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

となります。

あるいは、積分範囲を分けて計算してみると広義積分になっていて

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx + \int_0^1 \frac{2}{4x^2 + (x-1)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \uparrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{-1} \right) \right\} \\
&\quad + \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1} \right) \right\} - \lim_{x \downarrow 0} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

となってちゃんと正の値が出て来ます。

□