3　積分の復習・Euler の公式

目標
C1. 基本的な関数の原始関数を知っている C2. 三角関数・指数関数のべき級数展開を知っている
B1. 三角関数の複素指数表示を応用できる 演習問題 3.4、3.5 B2. 標準的な積分計算ができる 演習問題 3.6、3.7
A1. 難しい積分計算もできる 演習問題 3.8、3.9、3.10

3.1　基本的な計算技術

■部分積分：

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

■置換積分：

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt,$$

$$\int_a^b f(h(x))h'(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t)dt.$$

特に $h(x)$ が 1 対 1 なら $\displaystyle\int_{h^{-1}(\alpha)}^{h^{-1}(\beta)} f(h(x))h'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$

■ King property：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b \{f(x)+f(a+b-x)\}\,dx$$

3.2　さまざまな関数の原始関数

■べき関数

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \quad (p \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$

■指数・対数関数

$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C \quad \int \log|x|dx = x\log|x| - x + C$$

■三角関数

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C \quad \int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

■双曲線関数

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C \quad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C \quad \int \tanh x\,dx = \log|\cosh x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x + C \quad \int \frac{1}{\sinh^2 x}dx = -\frac{1}{\tanh x} + C$$

■逆三角関数・逆双曲線関数関連

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{Tan}^{-1}x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \tanh^{-1}x + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C \quad (|x|<1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \mathrm{Sin}^{-1}x + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{Sin}^{-1}x\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sinh^{-1}x = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1}x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\} + C$$

3.3 関数のべき級数展開

右辺を部分積分すれば

$$\begin{aligned}\sin x &= \int_0^x \cos t\,dt \\ &= [(t-x)\cos t]_0^x - \int_0^x (t-x)(-\sin t)dt \\ &= x + \int_0^x (t-x)\sin t\,dt\end{aligned}$$

が得られますので、これを繰り返して何度も部分積分を実行すると

$$\begin{aligned}&= x + \left[\frac{1}{2}(t-x)^2\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2\cos t\,dt \\ &= x - \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2\cos t\,dt \\ &= x - \left[\frac{1}{3\cdot 2}(t-x)^3\cos t\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{3\cdot 2}(t-x)^3(-\sin t)dt \\ &= x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \int_0^x \frac{1}{3\cdot 2}(t-x)^3\sin t\,dt \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{1}{4!}(t-x)^4\cos t\,dt \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \int_0^x \frac{1}{5!}(t-x)^5\sin t\,dt \\ &\quad\vdots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &\qquad + (-1)^n\int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}(t-x)^{2n+1}\sin t\,dt\end{aligned}$$

となる事が分かります。ここで $n\to\infty$ の極限値を取ると、最後の項はどんどん小さくなっていきますから：

$$\left|(-1)^n\int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}(t-x)^{2n+1}\sin t\,dt\right| \le \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0$$

$\sin x$ をべき級数で表す事が出来ます：

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots.$$

演習問題 3.1 任意の正数 $a>0$ に対して、

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

であることを示してください。

$2a$ より大きな整数 m をとり、更に $m<n$ とします。

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{\overbrace{a\cdots a}^{m\text{ 個}}\cdot\overbrace{a\cdots a}^{n-m\text{ 個}}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)\cdots n} = \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a^m}{m!}\cdot\frac{a}{2a}\cdots\frac{a}{2a} = \frac{a^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

なので、

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{a^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \to 0 \quad (n\to+\infty)$$

となり、従ってはさみうちの原理により、題意は示されました。 □

演習問題 3.2 全く同様な議論で $\cos x$ のべき級数展開を求めてください。

$$\begin{aligned}\cos x - 1 &= -\int_0^x 1\cdot\sin t\,dt \\ &= -[(t-x)\sin t]_0^x + \int_0^x (t-x)\cos t\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}(t-x)^2\cos t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2(-\sin t)dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2\sin t\,dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + \left[\frac{1}{6}(t-x)^3\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{6}(t-x)^3\cos t\,dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 - \left[\frac{1}{24}(t-x)^4\cos t\right]_0^x + \int \frac{1}{24}(t-x)^4(-\sin t)dt \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \left[\frac{1}{5!}(t-x)^5\sin t\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{5!}(t-x)^5\cos t\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \left[\frac{1}{6!}(t-x)^6\cos t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{6!}(t-x)^6(-\sin t)dt \\
&= -\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \frac{1}{6!}(t-x)^6\sin t\,dt \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos x = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} \\
+ (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{1}{(2n)!}(t-x)^{2n}\sin t\,dt
\end{aligned}
$$

ここで $n \to \infty$ の極限値を取ると、最後の項はどんどん小さくなっていきますから、$\cos x$ をべき級数で表す事が出来ます：

$$
\cos x = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \cdots .
$$

演習問題 3.3 部分積分を繰り返す方法で e^x のべき級数表現を求めて下さい。

$$
\mathrm{e}^x - 1 = \left[(t-x)\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x (t-x)\mathrm{e}^t dt = x - \int_0^x (t-x)\mathrm{e}^t dt = \cdots
$$

まず

$$
\mathrm{e}^x - 1 = \int_0^x \mathrm{e}^t dt
$$

ですが、ここで右辺の被積分関数を $1 \cdot \mathrm{e}^t$ と考えて部分積分すれば

$$
\mathrm{e}^x - 1 = \left[(t-x)\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x (t-x)\mathrm{e}^t dt = x - \int_0^x (t-x)\mathrm{e}^t dt
$$

が得られますので、これを繰り返して何度も部分積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
&= x - \left[\frac{1}{2}(t-x)^2\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}(t-x)^2\mathrm{e}^t dt \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^t dt \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \left[\frac{1}{3\cdot 2}(t-x)^3\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{3\cdot 2}(t-x)^3\mathrm{e}^t dt \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \int_0^x \frac{1}{3\cdot 2}(t-x)^3\mathrm{e}^t dt \\
&\ \ \vdots \\
&= x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (-1)^n\int_0^x \frac{1}{n!}(t-x)^n\mathrm{e}^t dt
\end{aligned}
$$

となる事が分かります。

このままでも展開式がどうなるか分かるわけですが、きちんと証明するためには最後の項が $n \to \infty$ で 0 に収束することを言わなくてはなりません。しかし、

$$
\left|(-1)^n\int_0^x \frac{1}{n!}(t-x)^n\mathrm{e}^t dt\right| \le \int_0^x \frac{|t-x|^n}{n!}\mathrm{e}^t dt \le \int_0^x \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^x dt = \frac{x^n}{n!}\cdot x\mathrm{e}^x
$$

と云う評価と任意の x に対して

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0
$$

であることからすればこの最右辺は 0 に収束します。従って、部分積分を無限に繰り返した場合、最後の積分の項はどんどん小さくなって行きますから結局

$$
\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots
$$

と云う風に指数関数をべき級数で表す事が出来ます。 □

3.4 Euler の公式

まず三角関数と指数関数の Taylor 展開は

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

となっていました。

この指数関数の展開式で x の所を ix で置き換えると（細かい事は考えずに形式的にやります）、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

であって、実部と虚部に分けると（これも形式的にやって下さい）

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)$$

ですから、これは

$$= \cos x + i \sin x$$

と書けるであろう事が見て取れます。この計算では証明にはなっていませんが、おおよその見当としてはそう云う事です。実際にはきちんと証明も可能 (証明と言うより定義の問題か？）で

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成立します。これを一般に Euler の公式と呼んでいます。

また、ここで x のところを $-x$ に置き換えると

$$\mathrm{e}^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

ですから、

$$\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix} = 2\cos x, \quad \text{すなわち、} \quad \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix} = 2i\sin x, \quad \text{すなわち、} \quad \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} = \sin x$$

となって三角関数の指数関数表示が得られます。

3.5　三角関数の加法公式

Euler の公式を知っていると、ややこやしい三角関数の加法公式を覚えていなくてもすぐその場で瞬時に作り出す事ができるので便利です。

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= \mathrm{e}^{i(x+y)} \\
&= \mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy} \\
&= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\
&= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\sin(x+y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y
\end{aligned}$$

です。同様に

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = \mathrm{e}^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n$$

も分かります。

演習問題 3.4 次の等式を証明してください。

(1) $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$　(2) $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$

(3) $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$ (4) $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$

演習問題 3.5 次の定積分の値を求めてください：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$

(1)

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix} + 4\mathrm{e}^{3ix}\mathrm{e}^{-ix} + 6\mathrm{e}^{2ix}\mathrm{e}^{-2ix} + 4\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-3ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{e}^{4ix} + \mathrm{e}^{-4ix}}{2} + 4\frac{\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{-2ix}}{2} + 3\right) \\
&= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + 4\cos 2x + 3)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix} - 4\mathrm{e}^{3ix}\mathrm{e}^{-ix} + 6\mathrm{e}^{2ix}\mathrm{e}^{-2ix} - 4\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-3ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{e}^{4ix} + \mathrm{e}^{-4ix}}{2} - 4\frac{\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{-2ix}}{2} + 3\right) \\
&= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x - 4\cos 2x + 3) dx \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x - 2\sin 2x + 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\cos^5 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(\mathrm{e}^{5ix} + 5\mathrm{e}^{4ix}\mathrm{e}^{-ix} + 10\mathrm{e}^{3ix}\mathrm{e}^{-2ix} + 10\mathrm{e}^{2ix}\mathrm{e}^{-3ix} + 5\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-4ix} + \mathrm{e}^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{e}^{5ix} + \mathrm{e}^{-5ix}}{2} + 5\frac{\mathrm{e}^{3ix} + \mathrm{e}^{-3ix}}{2} + 10\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx &= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right) dx \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{5}{3}\sin 3x + 10\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10\right) \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\sin^5 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32i}\left(\mathrm{e}^{5ix} - 5\mathrm{e}^{4ix}\mathrm{e}^{-ix} + 10\mathrm{e}^{3ix}\mathrm{e}^{-2ix} - 10\mathrm{e}^{2ix}\mathrm{e}^{-3ix} + 5\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-4ix} - \mathrm{e}^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{e}^{5ix} - \mathrm{e}^{-5ix}}{2i} - 5\frac{\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{-3ix}}{2i} + 10\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\sin 5x + 5\sin 3x + 10\sin x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx &= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right) dx \\
&= \frac{1}{16}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{5}{3}\cos 3x - 10\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10\right) \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

$\square$

積和変換の公式も、複素指数を使うと一発ですね。

3.6 問題演習 ～積分の復習～

演習問題 3.6

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x-1}{x-2}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} 3x(x^2-1)^4 dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 3^x dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ (7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x\,dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}\right)}\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}\mathrm{e}^x dx$ (9) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+x} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-x}\right) dx$

(10) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) dx$ (11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^x \left(\tan x + \log\frac{1}{\cos x}\right) dx$

(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx &= \int \frac{(x+1)^2+1}{x+1}dx \\ &= \int (x+1)dx + \int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x+1| + C\end{aligned}$$

(2)

$$\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx = \int \frac{x(x^2+1)+2x}{x^2+1}dx = \int x\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \log(x^2+1) + C$$

(3) $x^3-4x-1 = (x-2)(x^2+2x)-1$ なので、

$$\int \frac{x^3-4x-1}{x-2}dx = \int (x^2+2x)dx - \int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \log|x-2| + C$$

(4)

$$\int_1^{\sqrt{2}} 3x(x^2-1)^4 dx = \frac{3}{10}\int_1^{\sqrt{2}} 2x\cdot 5(x^2-1)^4 dx = \frac{3}{10}\left[(x^2-1)^5\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{3}{10}$$

(5)

$$\int_0^1 3^x dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\log 3}dx = \frac{1}{\log 3}\left[\mathrm{e}^{x\log 3}\right]_0^1 = \frac{2}{\log 3}$$

(6)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(7)

$$\tan^3 x = \tan x \tan^2 x = \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \frac{1}{2}2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x}{\cos x}$$

と変形すれば

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} - \log 2$$

です。

(8)

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}\right)}\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}\mathrm{e}^x dx = \left[\mathrm{e}^{\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)}\right)}\right]_0^1 = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$$

(9) 見た目に圧倒されますが、落ち着いて共通部分を探しくくってみると

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+x} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right)'$$

に気がつくでしょう。

$$\int_0^{\log 2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+x} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-x}\right) dx = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right]_0^{\log 2} = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}} - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2\left(\sqrt{\mathrm{e}} - 1\right)$$

(10)

$$\mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \left(\mathrm{e}^x\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$\int_1^2 \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \left[\mathrm{e}^x\frac{1}{x^2}\right]_1^2 = \frac{\mathrm{e}^2}{4} - \mathrm{e}$$

(11)

$$\mathrm{e}^x\left(\tan x + \log\frac{1}{\cos x}\right) = \{-\mathrm{e}^x\log(\cos x)\}'$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^x\left(\tan x + \log\frac{1}{\cos x}\right)dx = [\mathrm{e}^x\log(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^0 = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\log 2$$

□

演習問題 3.7

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^{2024}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^2-1}{x(\log x)^2}dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ (5) $\displaystyle\int \sqrt{1-\sqrt{4-x}}dx$ (6) $\displaystyle\int \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}dx$

(1) $1-x=z$ と置けば、$dx=-dz$ であって、$x:0\to 1$ のとき $z:1\to 0$ ですから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2(1-x)^{2024}dx &= \int_1^0 (1-z)^2 z^{2024}(-1)dz\\ &= \int_0^1 \left(z^{2026}-2z^{2025}+z^{2024}\right)dz\\ &= \left[\frac{1}{2027}z^{2027}-\frac{2}{2026}z^{2026}+\frac{1}{2025}z^{2025}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2027}-\frac{2}{2026}+\frac{1}{2025}\\ &= \frac{2}{2027\cdot 2026\cdot 2025}\end{aligned}$$

です。

(2) $\log x = z$ と置けば、$\frac{1}{x}dx=dz$ です：

$$\int \frac{(\log x)^2-1}{x(\log x)^2}dx = \int \frac{z^2-1}{z^2}dz = \int \left(1-\frac{1}{z^2}\right)dz = z+\frac{1}{z}+C = \log x + \frac{1}{\log x}+C$$

(3) $1+\sqrt{x}=y$ と置けば $x=(y-1)^2$ なので $dx=2(y-1)dy$ であり、$x:0\to 1$ のとき $y:1\to 2$ ですから：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx &= \int_1^2 \frac{2(y-1)}{\sqrt{y}}dy\\ &= 2\int_1^2\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy\\ &= \left[\frac{4}{3}\sqrt{y}^3-4\sqrt{y}\right]_1^2\\ &= \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)-4(\sqrt{2}-1)\\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{8}{3}\end{aligned}$$

です。

(4) $1+\sqrt{x}=y$ と置けば、$x=(y-1)^2$、$dx=2(y-1)dy$ です：

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx &= \int \frac{1+(y-1)^2}{y}2(y-1)dy\\ &= \int \frac{2y^3-6y^2+8y-4}{y}dy\\ &= \int\left(2y^2-6y+8-\frac{4}{y}\right)dy\\ &= \frac{2}{3}y^3-3y^2+8y-4\log|y|+C\\ &= \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^3-3\left(1+\sqrt{x}\right)^2+8\left(1+\sqrt{x}\right)-4\log\left|1+\sqrt{x}\right|+C\end{aligned}$$

(5) $1-\sqrt{4-x}=z$ と置けば、

$$\begin{aligned}(1-z)^2 &= 4-x\\ x &= 4-(1-z)^2\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} &= -2(1-z)(-1) = 2(1-z)\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\sqrt{4-x}}\,dx &= \int \sqrt{z}2(1-z)dz\\ &= 2\int\left(z^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{3}{2}}\right)dz\\ &= 2\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right)+C\\ &= \frac{4}{3}\sqrt{z}^3-\frac{4}{5}\sqrt{z}^5+C\\ &= \frac{4}{3}\sqrt{1-\sqrt{4-x}}^{\,3}-\frac{4}{5}\sqrt{1-\sqrt{4-x}}^{\,5}+C\\ &= \frac{4}{15}\left(2+3\sqrt{4-x}\right)\sqrt{1-\sqrt{4-x}}^{\,3}+C\end{aligned}$$

です。

(6) $x-\sqrt{x^2-1}=w$ と置けば、

$$\begin{aligned}(x-w)^2&=x^2-1\\ w^2+1&=2xw\\ x&=\frac{w^2+1}{2w}\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}&=\frac{2w\cdot 2w-(w^2+1)2}{4w^2}=\frac{w^2-1}{2w^2}\end{aligned}$$

ですから、以下のとおり：

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}dx&=\int\sqrt{w}\cdot\frac{w^2-1}{2w^2}dw\\ &=\frac{1}{2}\int\left(w^{\frac{1}{2}}-w^{-\frac{3}{2}}\right)dw\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}w^{\frac{3}{2}}+2w^{-\frac{1}{2}}\right)+C\\ &=\frac{1}{3}\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}^3+\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}+C\\ &=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}+C\end{aligned}$$

□

演習問題 3.8 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\log(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$　(2) $\displaystyle\int\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)dx$
(3) $\displaystyle\int(\sin x)\log(\sin x)\,dx$　(4) $\displaystyle\int_3^7\frac{\log(x+2)}{\log(24+10x-x^2)}dx$　(5) $\displaystyle\int\frac{x^{-\frac{7}{12}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}dx$

(1) まず

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)'=\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)'$$

ですから、部分積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\log(1-\sin x)}{1+\sin x}dx&=\left[\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)\log(1-\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-1}{\cos x}\frac{-\cos x}{1-\sin x}dx\\ &=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx\\ &=\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2-\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

が得られます。

(2) まず部分積分すれば

$$\begin{aligned}&\int\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)dx\\ &=\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{\text{ここがポイント}}\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx\\ &=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{4}\int(2x+1)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x}\sqrt{x+1}}dx\\ &=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}dx\\ &=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C\end{aligned}$$

が得られます。

(3) $\sin x$ が掛かっているので、何とか対数の中の $\sin x$ を $\cos x$ に変形できないか考えてみます。

$$\int(\sin x)\log(\sin x)\,dx=\int(\sin x)\frac{1}{2}\log\left(\sin^2 x\right)dx=\int(\sin x)\frac{1}{2}\log\left(1-\cos^2 x\right)dx$$

ですから、ここで $\cos x=z$ と置けば

$$\begin{aligned}\int(\sin x)\log(\sin x)\,dx&=-\frac{1}{2}\int\log(1-z^2)dz\\ &=-\frac{1}{2}z\log(1-z^2)+\frac{1}{2}\int\frac{-2z^2}{1-z^2}dz\\ &=-\frac{1}{2}z\log(1-z^2)+\int\frac{z^2}{z^2-1}dz\\ &=-\frac{1}{2}z\log(1-z^2)+z+\int\frac{1}{z^2-1}dz\\ &=-\frac{1}{2}z\log(1-z^2)+z+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} z\log(1-z^2) + z + \frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C \\
&= -\cos x \log\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C
\end{aligned}
$$

です。

(4)

$$
\begin{aligned}
J &= \int_3^7 \frac{\log(x+2)}{\log(24+10x-x^2)}dx \\
&= \int_3^7 \frac{\log(x+2)}{\log(x+2)(12-x)}dx \\
&= \int_3^7 \frac{\log(x+2)}{\log(x+2)+\log(12-x)}dx
\end{aligned}
$$

ここで $x = 10 - z$ と置けば、$dx = -dz$ であって $x : 3 \to 7$ のとき $z : 7 \to 3$ ですから

$$
\begin{aligned}
&= \int_7^3 \frac{\log(12-z)}{\log(12-z)+\log(z+2)}(-1)dz \\
&= \int_3^7 \frac{\log(12-z)}{\log(z+2)+\log(12-z)}dz \\
2J &= \int_3^7 \frac{\log(x+2)+\log(12-x)}{\log(x+2)+\log(12-x)}dx \\
&= \int_3^7 dx \\
&= 4 \\
J &= 2
\end{aligned}
$$

です。

(5) $x = z^{12}\ (0 \leq z)$ とおけば、$dx = 12z^{11}dz$ であって、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^{-\frac{7}{12}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}dx &= \int \frac{z^{-7}}{z^4+z^3}\cdot 12z^{11}dz \\
&= \int \frac{12z}{z+1}dz \\
&= 12\int dz - 12\int \frac{1}{z+1}dz \\
&= 12z - 12\log|z+1| + C \\
&= 12\sqrt[12]{x} - 12\log|\sqrt[12]{x}+1| + C
\end{aligned}
$$

です。□

演習問題 3.9

(1) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}dx$　(2) $\displaystyle\int (x^3+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\log x + x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^3+x^2+x}}dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{1+\log x}{1+x^x}dx$

(1) $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = z$ と置けば、

$$
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
$$

となることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}dx &= \int \frac{\sqrt{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}{\sqrt{1+x^2}}dx \\
&= \int \sqrt{z}dz \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{z}^3 + C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}^3 + C
\end{aligned}
$$

ですね。

(2)

$$
\begin{aligned}
\int (x^3+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}dx &= \int x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}dx + \int \underbrace{1}_{せ}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}}_{び}dx \\
&= \int x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}dx + x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} - \int x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}dx \\
&= x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} + C
\end{aligned}
$$

(3) 分母・分子を x^2 で割れば

$$
\int \frac{x-1}{x^2\log x + x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\log x + \frac{1}{x}}dx = \log\left|\log x + \frac{1}{x}\right| + C
$$

です。あるいは、部分分数分解（？）によれば

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2\log x+x}dx &= \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{\log x+1}{x\log x+1}dx \\ &= -\log|x| + \log|x\log x+1| + C\end{aligned}$$

でも良いでしょう。

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx \\ &= \int \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}}dx\end{aligned}$$

ここで $x+\frac{1}{x}=z$ と置けば

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{z\sqrt{z^2-2}}dz \\ &= \int \frac{z}{z^2\sqrt{z^2-2}}dz\end{aligned}$$

であり、更に、$\sqrt{z^2-2}=t$ と置けば

$$= \int \frac{1}{t^2+2}dt$$

あとは Tan^{-1} で行ける。

(5) $x^3+x^2+x \geq 0 \iff x \geq 0$ ですから、$x>0$ の範囲で考えます。

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^3+x^2+x}}dx &= \int \frac{x^2-1}{(x+1)^2 x\sqrt{x+1+\frac{1}{x}}}dx \\ &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}}dx\end{aligned}$$

ここで $\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}=t$ と置けば

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}}dx = dt$$

ですから、

$$J = \int \frac{1}{t^2+1}2dt = 2\mathrm{Tan}^{-1}t + C = 2\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}+C$$

となります。

(6)

$$\int \frac{1+\log x}{1+x^x}dx = \int \frac{(1+\log x)x^{-x}}{x^{-x}+1}dx = -\log|x^{-x}+1| + C$$

□

演習問題 3.10

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{\sin 4x}{\sin x}dx$　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\sin 3x\,dx$

(1) まず、

$$\begin{aligned}\sin x\sin 2x &= \frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{i2x}-\mathrm{e}^{-i2x}}{2i} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{i3x}-\mathrm{e}^{-ix}-\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-3x}}{4} \\ &= \frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned}\sin x\sin 2x\sin 3x &= \frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\sin 3x \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x) - \frac{1}{4}\sin 6x \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{6}\cos 6x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

となります。

(2)

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\sin x} = 4\cos x\cos 2x$$

ですが、

$$\cos x \cos 2x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{i2x} + \mathrm{e}^{-i2x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{i3x} + \mathrm{e}^{-i3x} + \mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{4} = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$$

なので

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = 2\left(\cos 3x + \cos x\right)$$

となって

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin x} dx = \frac{2}{3} \sin 3x + 2 \sin x + C$$

が得られます。

(3) 同様に和積変換して以下を得ます：

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - \cos 5x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{5} \sin 5x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{10}$$

□