4　微分方程式とその解

目標
C1. 一般解・特殊解・特異解の区別を知っている
B1. 簡単な積分型微分方程式の一般解が求められる 演習問題 4.6
B2. 簡単な積分型微分方程式の初期値問題が解ける 演習問題 4.7

4.1　微分方程式

定義 4.1.1 未知関数 $y(x)$ とその有限個の導関数 $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ を含む方程式：

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

を微分方程式と言います。微分方程式の中の未知関数 $y(x)$ の導関数の最高階数をその微分方程式の階数と言います。

例 4.1.2 以下は 1 階の微分方程式の例です：

$$y' = \cos x \tag{4.1}$$

$$y' = 3y \tag{4.2}$$

$$y = xy' - \frac{(y')^2}{4} \tag{4.3}$$

$$y + xy' = \frac{y}{y^2+1} \tag{4.4}$$

4.2　解

定義 4.2.1 微分方程式を満たす関数 $y = f(x)$ をその微分方程式の解と言います。また、x と y のみの関係式 $F(x, y) = 0$ を解と呼ぶ場合もあります。

例 4.2.2 (1) 次の関数は全て微分方程式 (4.1) の解です：

$$y = \sin x, \qquad y = \sin x + 1, \qquad y = \sin x - 7.$$

(2) 次の関数は全て微分方程式 (4.2) の解です：

$$y = \mathrm{e}^{3x}, \qquad y = 2\mathrm{e}^{3x}, \qquad y = -\pi \mathrm{e}^{3x}.$$

(3) 次の関数は全て微分方程式 (4.3) の解です：

$$y = x - \frac{1}{4}, \qquad y = -2x - 1, \qquad y = x^2.$$

(4) 次の関係式は全て微分方程式 (4.4) の解です：

$$\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 0, \quad \log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 3, \quad \log y - \frac{1}{2y^2} + \log x + 1 = 0.$$

実際、どの場合も両辺を x で微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}y' + \frac{1}{y^3}y' + \frac{1}{x} &= 0 \\ \frac{y^2+1}{y^3}y' &= -\frac{1}{x} \\ xy' &= -\frac{y^3}{y^2+1} \\ &= \frac{y}{y^2+1} - y \end{aligned}$$

となって微分方程式を満たしています。

演習問題 4.1 (1) 任意の定数 C に対して、関数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x + C$ は微分方程式：

$$y' = x^2 - 2$$

の解であることを確認してください。

(2) 任意の定数 C に対して、関数 $y = C\mathrm{e}^{2x}$ は微分方程式：

$$y' = 2y$$

の解であることを確認してください。

(3) 任意の定数 C, D に対して、関数 $y = C\cos\sqrt{5}x + D\sin\sqrt{5}x$ は微分方程式：

$$y'' + 5y = 0$$

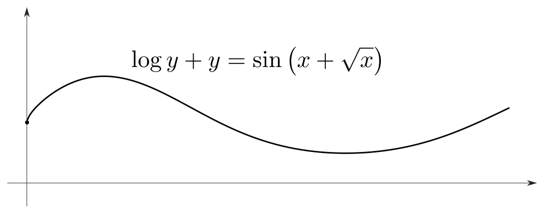
の解であることを確認してください。

4.2.1　なぜ関係式 $F(x, y) = 0$ を“解”と呼ぶのか

変数 x, y の関係式 $F(x, y) = 0$ は一般には平面内の曲線を表しており、特に『y は x の関数である』とも、『x は y の関数である』とも明示的には主張していません。

この関係式を $y = P(x)$ の形、もしくは $x = Q(y)$ の形に変形することは出来ない場合が多いのですが、この『出来ない』には、そもそも y が x の関数でないから出来ない場合と、y は x の関数ではあるが、書き表すための適当な記号がないために単に『書くことが出来ない』場合の 2 通りがあります。ここで問題にしているのはもちろん前者であって、後者ではありません。

例えば $\log y + y = \sin(x + \sqrt{x})$ は下図のように y が x の関数であることを示唆しますが、これを記述する適当な記号がありません（後者の例です）。



ただし、さらに深く数学を学べば、Lambert の W 関数と云うものの存在を知り、$y = W\left(\mathrm{e}^{\sin(x+\sqrt{x})}\right)$ と書くことができるようになります。

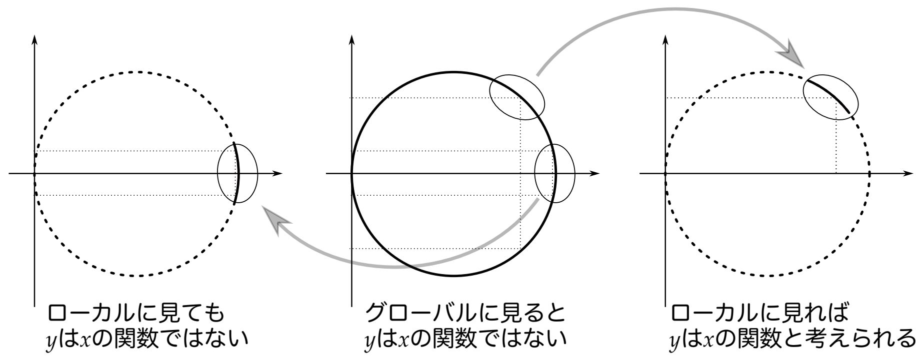
変数 x, y の関係式 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ は中心 $(1, 0)$・半径 1 の円周を表していますが、例えば x に 1 を入力してみると $y = \pm 1$ となって出力 y はただ１つには定りませんので、y は x の関数ではありません。

> 強いて言えば
> $$y = \pm\sqrt{2x - x^2}, \qquad x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$$
> と云うふうな『プラスマイナスの付いた』擬似関数の形には変形できるでしょう。

しかし関係式（＝曲線）の全体を見るのではなく、曲線の一部分だけを見るとどうでしょうか。

例えば先の曲線上の点 $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の近くだけを見れば、$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ に対応している点は $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ しかありませんね。これは他の（$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ に近い）入力値に関しても同様です。従って、ローカルに見れば、この関係式（曲線）によって y は x の関数になっていると見ることができます。

> （今回は可能なので具体的に書けば）そこにある曲線は $y = \sqrt{2x - x^2}$ であり、この点の近くでは『y は x の関数になっている』ことが確認できます（もちろん『具体的に書けるからそうだ』と言いたいわけではありませんよ）。



ただし、曲線上の点 $(2, 0)$ の付近では、どんなに狭い範囲に制限して見ても１つの入力 x に対して対応する出力 y は２つありますから、y は x の関数ではありません。これは一見困ることのように思えるのですが、もう少し調べれば y を x の関数と思うことは出来なくても、x はちゃんと y の関数になっていることが分かります。

つまり関係式 $F(x, y) = 0$ は、直接グローバルに明示しているわけではないけれども、ローカルには y が x の関数であること、あるいは x が y の関数であることを示唆していると十分考えられますので、この『直接明示されているわけではないが、示唆される関数関係』（陰関数）の意味で、x と y の関係式を微分方程式の解（＝関数）と考える場合があるわけです。

演習問題 4.2　　$y + (x - 1)y' = 0$

左辺は積の微分の形になっているので

$$\{(x - 1)y\}' = 0$$
$$(x - 1)y = C \quad （C \text{ は任意の定数}）$$

が解になります。

特に $C = 0$ に対応する解として $y = 0$（定数関数）がありますが、では $x = 1$ は解と言えるのでしょうか？

関数というものを $y=P(x)$ の型のものだけに限定して考えていると、$x=1$ などと云うものは関数とは考えることは出来ません。『普通に』考えてしまうと $x=1$ のとき

$$\begin{aligned} y+(x-1)y' &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

となってしまい、『ん？　$(x,y)=(1,0)$ の１点ってことですか？』となります。

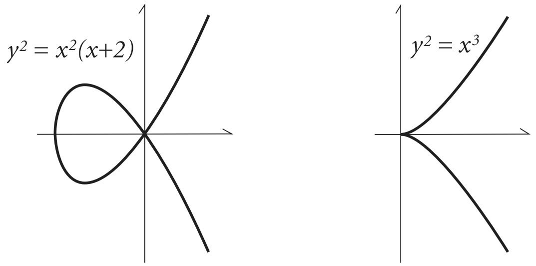
しかし今見たような『関係式の示唆する関数』の視点から見れば、直線 $x=1$ も『x,y の関係式』の一種であり、従って解であると考えることが出来るでしょう。

また解 $(x-1)y=C$ を x で微分するのではなく y で微分すれば

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}y+(x-1)=0$$

となり、$x=1$ が解であることも納得できるでしょう。

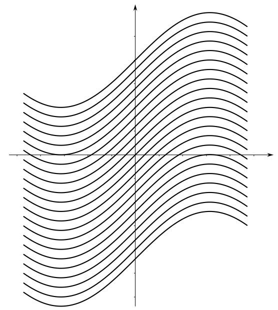
この場合 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$ ですから感覚的には $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\infty$ であって、$(x-1)y'=0\times\infty$ が釣り合う感じでしょうか。 □

> ただし問題のある点が存在する場合もあります。
> 例えば $F(x,y)=x^2(x+2)-y^2$ のとき、方程式 $F(x,y)=0$ が表す曲線は下図左の様になりますが、原点では y を x の関数と見ることも、x を y の関数と見ることもどちらも出来ません。
>
> 
>
>
> node型特異点　　cusp型特異点
>
> また上図右の場合、$H(x,y)=x^3-y^2$ としたときの曲線 $H(x,y)=0$ の場合は、同様に原点において y を x の関数と見ることは出来ません。その一方で x を y の関数と見ることは一応できますが、残念ながら微分不可能な関数になってしまいます。
> このような、y を x の (微分可能な) 関数と見ることも、x を y の (微分可能な) 関数と見ることもどちらも出来ないような点のことを曲線の特異点と呼んでいます。

4.2.2　一般解と特殊解

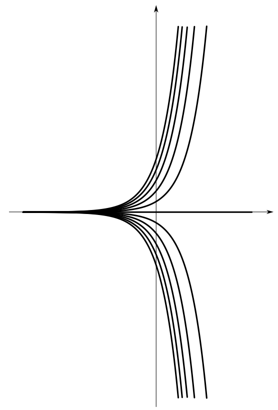
> **定義 4.2.3** n 階の微分方程式に対して、n 個の任意定数 $C_1,\dots,C_n$ を含む解を一般解（general solution）と言います。
>
> 一般解の任意定数を具体的な定数に置き換えて得られる解をその微分方程式の特殊解 (special solution) と言い、特殊解ではないような解を特異解 (singular solution) と言います。

例 4.2.4 (1) $y=\sin x+C$ (C は任意の定数) は、微分方程式 (4.1) の一般解であり、$y=\sin x$, $y=\sin x+1$ や $y=\sin x-7$ は特殊解です。



特殊解以外の解（つまり特異解）は存在しないことが知られています。

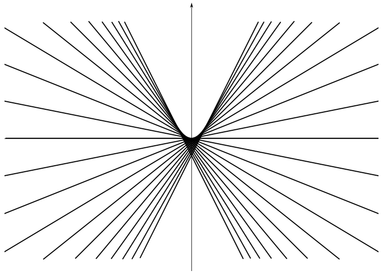
(2) $y=C\mathrm{e}^{3x}$ は微分方程式 (4.2) の一般解であり、$y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=2\mathrm{e}^{3x}$ や $y=-\pi\mathrm{e}^{3x}$ は特殊解です。



この方程式も、特異解はもちません。

(3) $y=Cx-\frac{C^2}{4}$ は微分方程式 (4.3) の一般解であり、$y=x-\frac{1}{4}$, $y=-2x-1$, は特

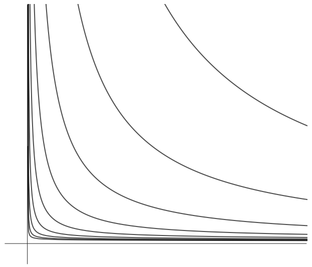
殊解です。



また $y=x^2$ は特異解です。この放物線は一般解の表す直線全てに接しているのが見てとれますね。このような曲線を一般解の表す曲線族（このケースでは直線族ですが）の包絡線と言います。

このように、任意定数を含む一般解は、必ずしも当該方程式の『すべての解』を表しているとは限らないことに注意してください。

(4) $\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x + C = 0$ は微分方程式 (4.4) の一般解であり、$\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 0$, $\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 3$ や $\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x + 1 = 0$ は特殊解です。

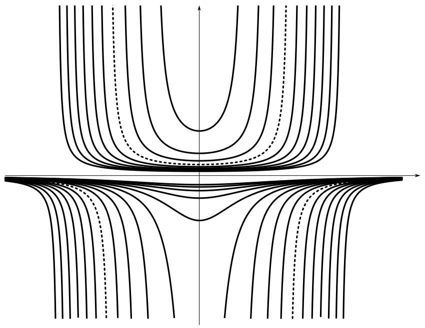


また、明らかに $y=0$ は解ですが特殊解ではありませんので、これは特異解です。

(5) $y = \frac{1}{C-x^2}$ は微分方程式：

$$y' = 2xy^2$$

の一般解であり、$y=0$ は特異解ですが、この特異解は一般解でもあると考える立場があります。なぜなら任意の定数 C が $\pm\infty$ となった場合に対応していると考えられるからです。微分方程式を解くにあたって、このような特異解については、（広い意味で一般解に含まれるので）わざわざ言及しなくても良いという慣例になっています。



演習問題 4.3 微分方程式：$(y')^2 + y^2 = 1$ の一般解と特異解を求めてください。

これはなかなかに難しい方程式ですが、『自乗の和が 1』というところに注目すれば三角関数が解になることが見えるでしょう。

一般解は $y=\sin(x+C)$ であり、その包絡線である $y=1$ と $y=-1$ が特異解になっていますね。

あるいは方程式の両辺を微分すれば

$$\begin{aligned}(y')^2 + y^2 &= 1\\ 2y'y'' + 2yy' &= 0\\ y'(y''+y) &= 0\end{aligned}$$

が得られ、解は $y'=0$ または $y''=-y$ となります。前者は定数関数 $y=C$ ですが、方程式を満たすためには $C=\pm 1$ でなければなりません。

また後者は $y=\sin x, y=\cos x$ を解にもち、任意の定数 G,H によって $y=G\sin x + H\cos x$ は解になっています。しかし同様に方程式を満たすためには $G^2+H^2=1$ である必要があり、$G=\cos C, H=\sin C$ となる角度 C をとれば

$$y = \cos C \sin x + \sin C \cos x = \sin(x+C)$$

となって先と同様の解を得ることになります。 □

演習問題 4.4 次の微分方程式の初期値問題を解いてください。
(1) $y' = \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$　　(2) $y' = 3y, \quad y(0) = -1$

(1) 一般解は $y = \sin x + C$ であり、初期条件から

$$\begin{aligned}3 &= \sin\frac{\pi}{2} + C\\ 2 &= C\end{aligned}$$

なので、求める解は $y=\sin x + 2$ です。

(2) 一般解は $y = C\mathrm{e}^{3x}$ であり、初期条件から $C=-1$ であれば良いので求める解は $y=-\mathrm{e}^{3x}$ です。 □

4.3　積分形

$$y' = f(x)$$

の型の微分方程式を積分型と言います。一般に

$$f^{(n)} = f(x)$$

の型の場合も積分型と言います。両辺を積分すれば解が求まります（右辺の積分が計算可能であれば、の話ですが）。

演習問題 4.5 次の積分型微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y' = x + \frac{3}{x^4}$　　(2) $y'' = \cos 3x - \sin 2x$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= x + \frac{3}{x^4} \\ y &= \int \left(x + 3x^{-4}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x^{-3} + C \end{aligned}$$

従って一般解は

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3} + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

です。

(2)

$$\begin{aligned} y'' &= \cos 3x - \sin 2x \\ y' &= \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x + C \\ y &= -\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\sin 2x + Cx + D \end{aligned}$$

ただし C, D は任意の定数とします。 □

演習問題 4.6 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' = x + \frac{3}{x^4}$, $y(1) = 2$　　(2) $y'' = \cos 3x - \sin 2x$, $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$

(1) 一般解は $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3} + C$ でしたから

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{1^3} + C \\ \frac{5}{2} &= C \end{aligned}$$

であり、解は $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{2}$ です。

(2) 一般解は $y = -\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\sin 2x + Cx + D$ でしたから、

$$y' = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

であって、初期条件から得られる連立方程式：

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{9} + \pi C + D \\ 0 = \frac{1}{2} + C \end{cases}$$

を解けば $C = -\frac{1}{2}$、$D = \frac{8}{9} + \frac{\pi}{2}$ がわかります。従って求める解は

$$y = -\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + \frac{8}{9} + \frac{\pi}{2}$$

です。 □

4.4　問題演習

演習問題 4.7 次の積分型微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y' = x^3 - \frac{2}{x^2}\ (x > 0)$　　(2) $y' = \sin 2x - \mathrm{e}^{3x}$　　(3) $y' = \mathrm{e}^{7x-2}\mathrm{e}^{3-2x}$

(4) $y'' = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$　　(5) $y'' = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x}$　　(6) $y''' = 2x - 1$

演習問題 4.8 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' = x^3 - \frac{2}{x^2}\ (x > 0),\ y(1) = 2$　　(2) $y' = \sin 2x - \mathrm{e}^{3x},\ y(0) = 0$

(3) $y' = \mathrm{e}^{7x-2}\mathrm{e}^{3-2x},\ y(0) = 0$　　(4) $y'' = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right),\ y(0) = 0, y'(0) = 0$

(5) $y'' = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x},\ y(1) = 1, y'(1) = 0$

(6) $y''' = 2x - 1,\ y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 0$

(1) まず一般解を求めると

$$\begin{aligned} y' &= x^3 - \frac{2}{x^2} \\ y &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

であり、また初期条件から

$$2 = \frac{1}{4} + 2 + C \quad \text{すなわち} \quad C = -\frac{1}{4}$$

です。従って初期値問題の解は

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{4}$$

です。

ただし、この方程式のように方程式が『意味をなさない点（x の値)』がある場合は、問題のように『$x > 0$』と指定していれば問題ありませんが、そうでない場合は注意が必要です。$x = 0$ を跨いだ積分はできないので、$x > 0$ の部分と $x < 0$ の部分は別々に計算されなければなりません。

すると任意定数 C もそれぞれの場合に独立に現れることになりますから、$x > 0$ の部分での任意定数 C と、$x < 0$ の部分での任意定数 C は違う値でも構わないということになるわけです。

従って『$x > 0$ という制限のない場合』の厳密な一般解は

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} + C_+ & (0 < x) \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} + C_- & (x < 0) \end{cases}$$

となります（C_+, C_- は任意の定数)。

この場合、初期値問題の解も、$x < 0$ の部分は任意定数を含んだままで良くなってしまいます。

(2) まず一般解を求めると

$$\begin{aligned} y' &= \sin 2x - \mathrm{e}^{3x} \\ y &= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C \end{aligned}$$

であり、また初期条件から

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + C \\ \frac{5}{6} &= C \end{aligned}$$

です。従って初期値問題の解は

$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + \frac{5}{6}$$

です。

(3) まず一般解を求めると

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{e}^{7x-2}\mathrm{e}^{3-2x} \\ &= \mathrm{e}^{5x+1} \\ y &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x+1} + C \end{aligned}$$

であり、また初期条件から

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{e}}{5} + C \\ -\frac{\mathrm{e}}{5} &= C \end{aligned}$$

です。従って初期値問題の解は

$$y = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x+1} - \frac{\mathrm{e}}{5}$$

です。

(4) まず一般解を求めると

$$y'' = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y' = \frac{1}{5}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + C$$
$$y = -\frac{1}{25}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + Cx + D$$

であり、また初期条件から

$$0 = -\frac{1}{25\sqrt{2}} + D$$
$$D = \frac{1}{25\sqrt{2}}$$
$$0 = -\frac{1}{5\sqrt{2}} + C$$
$$C = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

です。従って初期値問題の解は

$$y = -\frac{1}{25}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{5\sqrt{2}}x + \frac{1}{25\sqrt{2}}$$

です。

(5) まず一般解を求めると

$$y'' = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x}$$
$$y' = -\frac{3}{x} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$y = -3\log|x| - \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} + Cx + D$$

であり、また初期条件から

$$1 = -3\log 1 - \frac{4}{15} + C + D$$
$$0 = -\frac{3}{1} - \frac{2}{3} + C$$

であり、これを解いて $C = \frac{11}{3}, D = -\frac{12}{5}$ です。従って初期値問題の解は

$$y = -3\log|x| - \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} + \frac{11}{3}x - \frac{12}{5}$$

です。

(6) まず一般解を求めると

$$y''' = 2x - 1$$
$$y'' = x^2 - x + C$$
$$y' = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Cx + D$$
$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{C}{2}x^2 + Dx + E$$

であり、また初期条件から

$$0 = C$$
$$1 = D$$
$$2 = E$$

です。従って初期値問題の解は

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x + 2$$

です。 □

演習問題 4.9 次の（境界）条件を満たす解は存在するかどうか調べてください。存在する場合は解を求めてください。

(1) $y'' = 3 \qquad y(0) = -4, \quad y(2) = 4$

(2) $xy' = 1, \qquad y(\mathrm{e}) = 1, \quad y(-\mathrm{e}) = 0$

(1) 一般解は $y = \frac{3}{2}x^2 + Cx + D$ です（C, D は任意の定数）。$y(0) = -4$ によれば $D = -4$ であり、また $y(2) = 4$ によれば

$$4 = 6 + 2C - 4 = 2 + 2C$$

から $C = 1$ です。

従って問題の（境界）条件を満たす解は存在して $y = \frac{3}{2}x^2 + x - 4$ です。

(2) $y' = \frac{1}{x}$ ですので一般解は

$$y = \begin{cases} \log(-x) + C_- & x < 0 \\ \log x + C_+ & 0 < x \end{cases}$$

です（C_+, C_- は任意の定数）。

問題の（境界）条件を満たすには $C_+ = 0, C_- = -1$ であれば良く、解は存在して

$$y = \begin{cases} \log(-x) - 1 & x < 0 \\ \log x & 0 < x \end{cases}$$

です。 □