4　微分方程式とその解

目標
C1. 一般解・特殊解・特異解の区別を知っている
B1. 簡単な積分型微分方程式の一般解が求められる 演習問題 4.6
B2. 簡単な積分型微分方程式の初期値問題が解ける 演習問題 4.7

4.1　微分方程式

定義 4.1.1 未知関数 $y(x)$ とその有限個の導関数 $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ を含む方程式：

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

を微分方程式と言います。微分方程式の中の未知関数 $y(x)$ の導関数の最高階数をその微分方程式の階数と言います。

例 4.1.2 以下は 1 階の微分方程式の例です：

$$y' = \cos x \qquad (4.1)$$

$$y' = 3y \qquad (4.2)$$

$$y = xy' - \frac{(y')^2}{4} \qquad (4.3)$$

$$y + xy' = \frac{y}{y^2+1} \qquad (4.4)$$

4.2　解

定義 4.2.1 微分方程式を満たす関数 $y = f(x)$ をその微分方程式の解と言います。また、x と y のみの関係式 $F(x, y) = 0$ を解と呼ぶ場合もあります。

例 4.2.2 (1) 次の関数は全て微分方程式 (4.1) の解です：

$$y = \sin x, \qquad y = \sin x + 1, \qquad y = \sin x - 7.$$

(2) 次の関数は全て微分方程式 (4.2) の解です：

$$y = \mathrm{e}^{3x}, \qquad y = 2\mathrm{e}^{3x}, \qquad y = -\pi\mathrm{e}^{3x}.$$

(3) 次の関数は全て微分方程式 (4.3) の解です：

$$y = x - \frac{1}{4}, \qquad y = -2x - 1, \qquad y = x^2.$$

(4) 次の関係式は全て微分方程式 (4.4) の解です：

$$\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 0, \quad \log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 3, \quad \log y - \frac{1}{2y^2} + \log x + 1 = 0.$$

演習問題 4.1 (1) 任意の定数 C に対して、関数 $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x + C$ は微分方程式：

$$y' = x^2 - 2$$

の解であることを確認してください。

(2) 任意の定数 C に対して、関数 $y = C\mathrm{e}^{2x}$ は微分方程式：

$$y' = 2y$$

の解であることを確認してください。

(3) 任意の定数 C, D に対して、関数 $y = C\cos\sqrt{5}x + D\sin\sqrt{5}x$ は微分方程式：

$$y'' + 5y = 0$$

の解であることを確認してください。

4.2.1　なぜ関係式 $F(x,y)=0$ を“解”と呼ぶのか

関係式 $x^2-2x+y^2=0$ は円周を表していますが、例えば x に 1 を入力してみると $y=\pm 1$ となって出力 y はただ１つには定りませんので、y は x の関数ではありません。

しかし曲線上の点 $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の近くだけを見れば、$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ に対応している点は $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ しかありませんね。これは他の（$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ に近い）入力値に関しても同様です。従って、ローカルに見れば、この関係式（曲線）によって y は x の関数になっていると見ることができます。

演習問題 4.2　　$y+(x-1)y'=0$

左辺は積の微分の形になっているので

$$\{(x-1)y\}'=0$$
$$(x-1)y=C\quad（C\text{ は任意の定数}）$$

が解になります。

特に $C=0$ に対応する解として $y=0$（定数関数）がありますが、では $x=1$ は解と言えるのでしょうか？

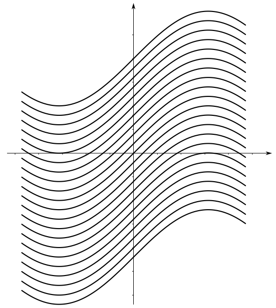
関数というものを $y=P(x)$ の型のものだけに限定して考えていると、$x=1$ などと云うものは関数とは考えることは出来ません。しかし今見たような『関係式の示唆する関数』の視点から見れば、直線 $x=1$ も『x,y の関係式』の一種であり、従って解であると考えることが出来るでしょう。　□

4.2.2　一般解と特殊解

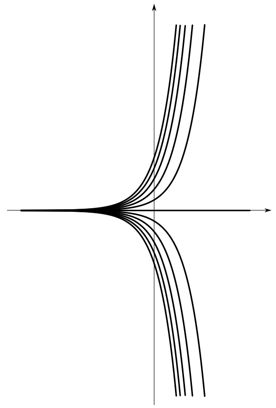
定義 4.2.3 n 階の微分方程式に対して、n 個の任意定数 $C_1,\dots,C_n$ を含む解を一般解（general solution）と言います。

一般解の任意定数を具体的な定数に置き換えて得られる解をその微分方程式の特殊解 (special solution) と言い、特殊解ではないような解を特異解 (singular solution) と言います。

例 4.2.4 (1) $y=\sin x+C$（C は任意の定数）は、微分方程式 (4.1) の一般解であり、$y=\sin x$, $y=\sin x+1$ や $y=\sin x-7$ は特殊解です。



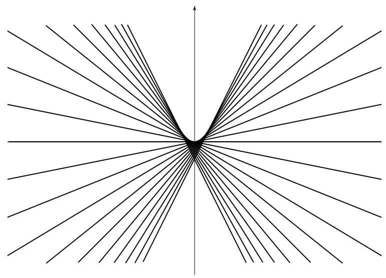
特殊解以外の解（つまり特異解）は存在しないことが知られています。



(2) $y=C\mathrm{e}^{3x}$ は微分方程式 (4.2) の一般解であり、$y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=2\mathrm{e}^{3x}$ や $y=-\pi\mathrm{e}^{3x}$ は特殊解です。

この方程式も、特異解はもちません。

(3) $y=Cx-\frac{C^2}{4}$ は微分方程式 (4.3) の一般解であり、$y=x-\frac{1}{4}$, $y=-2x-1$, は特殊解です。

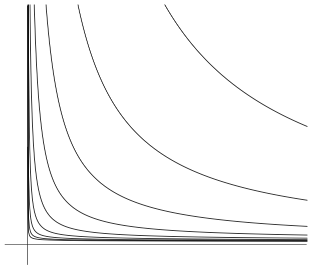


また $y=x^2$ は特異解です。この放物線は一般解の表す直線全てに接しているのが見てとれますね。このような曲線を一般解の表す曲線族（このケースでは直線族ですが）の包絡線と言います。

このように、任意定数を含む一般解は、必ずしも当該方程式の『すべての解』を表しているとは限らないことに注意してください。

(4) $\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x + C = 0$ は微分方程式 (4.4) の一般解であり、$\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 0$, $\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x = 3$ や $\log y - \frac{1}{2y^2} + \log x + 1 = 0$ は特殊解です。

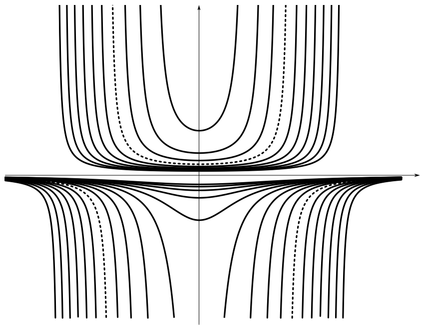
また、明らかに $y = 0$ は解ですが特殊解ではありませんので、これは特異解です。



(5) $y = \frac{1}{C - x^2}$ は微分方程式：

$$y' = 2xy^2$$

の一般解であり、$y = 0$ は特異解ですが、この特異解は一般解でもあると考える立場があります。なぜなら任意の定数 C が $\pm\infty$ となった場合に対応していると考えられるからです。微分方程式を解くにあたって、このような特異解については、（広い意味で一般解に含まれるので）わざわざ言及しなくても良いという慣例になっています。



演習問題 4.3 微分方程式：$(y')^2 + y^2 = 1$ の一般解と特異解を求めてください。

これはなかなかに難しい方程式ですが、『自乗の和が 1』というところに注目すれば三角関数が解になることが見えるでしょう。

一般解は $y = \sin(x + C)$ であり、その包絡線である $y = 1$ と $y = -1$ が特異解になっていますね。

あるいは方程式の両辺を微分すれば

$$(y')^2 + y^2 = 1$$

$$2y'y'' + 2yy' = 0$$

$$y'(y'' + y) = 0$$

が得られ、解は $y' = 0$ または $y'' = -y$ となります。前者は定数関数 $y = C$ ですが、方程式を満たすためには $C = \pm 1$ でなければなりません。

また後者は $y = \sin x, y = \cos x$ を解にもち、任意の定数 G, H によって $y = G\sin x + H\cos x$ は解になっています。しかし同様に方程式を満たすためには $G^2 + H^2 = 1$ である必要があり、$G = \cos C, H = \sin C$ となる角度 C をとれば

$$y = \cos C \sin x + \sin C \cos x = \sin(x + C)$$

となって先と同様の解を得ることになります。 □

演習問題 4.4 次の微分方程式の初期値問題を解いてください。

(1) $y' = \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ 　(2) $y' = 3y, \quad y(0) = -1$

(1) 一般解は $y = \sin x + C$ であり、初期条件から

$$3 = \sin\frac{\pi}{2} + C$$
$$2 = C$$

なので、求める解は $y = \sin x + 2$ です。

(2) 一般解は $y = Ce^{3x}$ であり、初期条件から $C = -1$ であれば良いので求める解は $y = -e^{3x}$ です。 □

4.3 積分形

$$y' = f(x)$$

の型の微分方程式を積分型と言います。一般に

$$f^{(n)} = f(x)$$

の型の場合も積分型と言います。両辺を積分すれば解が求まります（右辺の積分が計算可能であれば、の話ですが）。

演習問題 4.5 次の積分型微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y' = x + \frac{3}{x^4}$　(2) $y'' = \cos 3x - \sin 2x$

(1)
$$y' = x + \frac{3}{x^4}$$
$$y = \int \left(x + 3x^{-4}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - x^{-3} + C$$

従って一般解は
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3} + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

です。

(2)
$$y'' = \cos 3x - \sin 2x$$
$$y' = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$
$$y = -\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\sin 2x + Cx + D$$

ただし C, D は任意の定数とします。□

演習問題 4.6 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' = x + \frac{3}{x^4}$, $y(1) = 2$　(2) $y'' = \cos 3x - \sin 2x$, $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$

(1) 一般解は $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3} + C$ でしたから
$$2 = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{1^3} + C$$
$$\frac{5}{2} = C$$

であり、解は $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{2}$ です。

(2) 一般解は $y = -\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\sin 2x + Cx + D$ でしたから、
$$y' = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

であって、初期条件から得られる連立方程式：
$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{9} + \pi C + D \\ 0 = \frac{1}{2} + C \end{cases}$$

を解けば $C = -\frac{1}{2}$、$D = \frac{8}{9} + \frac{\pi}{2}$ がわかります。従って求める解は
$$y = -\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + \frac{8}{9} + \frac{\pi}{2}$$

です。□

4.4　問題演習

演習問題 4.7 次の積分型微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y' = x^3 - \frac{2}{x^2}\ (x > 0)$　(2) $y' = \sin 2x - \mathrm{e}^{3x}$　(3) $y' = \mathrm{e}^{7x-2}\mathrm{e}^{3-2x}$

(4) $y'' = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$　(5) $y'' = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x}$　(6) $y''' = 2x - 1$

演習問題 4.8 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' = x^3 - \frac{2}{x^2}\ (x > 0)$, $y(1) = 2$　(2) $y' = \sin 2x - \mathrm{e}^{3x}$, $y(0) = 0$

(3) $y' = \mathrm{e}^{7x-2}\mathrm{e}^{3-2x}$, $y(0) = 0$　(4) $y'' = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

(5) $y'' = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x}$, $y(1) = 1, y'(1) = 0$

(6) $y''' = 2x - 1$, $y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 0$

演習問題 4.9 次の（境界）条件を満たす解は存在するかどうか調べてください。存在する場合は解を求めてください。

(1) $y'' = 3$　$y(0) = -4,\quad y(2) = 4$

(2) $xy' = 1,$　$y(\mathrm{e}) = 1,\quad y(-\mathrm{e}) = 0$