5　変数分離型

目標
C1. 変数分離型であるかどうかの区別ができる
B1. いろいろな変数分離型方程式の一般解が求められる 演習問題 5.1、5.2、5.5
A1. 任意定数の扱いについてきちんと理解している A2. 接触変換・階数降下法を利用して一般解を求められる 演習問題 5.3、5.4、5.6、5.7

5.1　基本

既知関数 F, G によって

$$y' = F(x)G(y)$$

の形に表される１階微分方程式を変数分離型と言います。

例 5.1.1 変数分離型の例

(1) $y' = (y-1)^2$　　(2) $y' + 4x^3y^2 + 4x^3 = 0$　　(3) $\sqrt{x}y' + 2xy = x$

(2) は、$y' = -4x^3(y^2+1)$ と変形されます。
(3) は、$y' = \sqrt{x}(1-2y)$ と書けます。

5.1.1　一般的な解法

$G(y) \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{G(y)}y' &= F(x) \\ \left\{\int \frac{1}{G(y)}dy\right\}' &= F(x) \\ \int \frac{1}{G(y)}dy &= \int F(x)dx \end{aligned}$$

となるので、両辺の積分が計算できれば解が求まり、その際積分定数として任意定数が出現しますから一般解が求まると考えられます。

また、$G(y) = 0$ の解 $y = c$ が存在する場合は、$y = c$ も解になることに注意します。

問題 5.1.2 次の１階微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' = 2x(y+1)$$

以下 C は積分定数ですが、異なる行に現れるものは基本的に異なるものであるとします。

$$\begin{aligned} y' &= 2x(y+1) \\ \frac{1}{y+1}y' &= 2x \\ \int \frac{1}{y+1}dy &= \int 2x\,dx \\ \log|y+1| &= x^2 + C \quad (C \text{ は任意の定数}) \\ |y+1| &= \mathrm{e}^{x^2+C} \\ &= \mathrm{e}^C\mathrm{e}^{x^2} \quad (\mathrm{e}^C \text{ は任意の正の定数}) \\ y+1 &= \pm\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{x^2} \\ y &= C\mathrm{e}^{x^2} - 1 \quad (C \neq 0 \text{ は任意の定数}) \end{aligned}$$

しかし、$C = 0$ の場合を考えると $y = -1$ となり、これは最初に両辺を $y+1$ で割ったときの分母が 0 の場合を意味しています。
$y = -1$ も、$y' = 0, 2x(y+1) = 0$ から確かに微分方程式を満たしています。そこでこれらを合わせて一般解は

$$y = C\mathrm{e}^{x^2} - 1 \quad (C \text{ は任意の定数})$$

となります。　□

問題 5.1.3 次の１階微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' = 2xy^2$$

$$y' = 2xy^2$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2}y' &= 2x\\ \int\frac{1}{y^2}dy &= \int 2x\,dx\\ -\frac{1}{y} &= x^2+C \quad (C\text{ は任意の定数})\\ y &= \frac{1}{C-x^2}\end{aligned}$$

最初の方程式の形を見れば、$y=0$ が１つの解であることは明らかですが、残念ながらこの解は今求めた一般解の任意定数 C にいかなる値を代入しても得ることはできません。そう云う意味ではこれは特異解であるわけですが、任意定数 C の範囲を有限値だけではなく $C\to\infty$ もしくは $C\to-\infty$ の極限にまで広げて考えれば解 $y=0$ も一般解の範疇で考えられることに注意します。

このような場合、解を

$$y=\frac{1}{C-x^2}\quad (C\text{ は任意の定数})\quad\text{または}\quad y=0$$

とは書かずに、

$$y=\frac{1}{C-x^2}\quad (C\text{ は任意の定数})$$

とだけ書いても許されるようです（要するに一般解の一部と見做すわけです）。

演習問題 5.1 次の１階微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y'=(y-1)^2$ (2) $y'+4x^3y^2+4x^3=0$ (3) $\sqrt{x}y'+2xy=x$

(1) 一般解は

$$\begin{aligned}y' &= (y-1)^2\\ \frac{1}{(y-1)^2}y' &= 1\\ \int\frac{1}{(y-1)^2}dy &= \int dx\\ -\frac{1}{y-1} &= x+C\\ y-1 &= \frac{1}{C-x}\\ y &= \frac{1}{C-x}+1\end{aligned}$$

です（特異解 $y=1$ は $C\to\pm\infty$ に対応）。

(2)

$$\begin{aligned}y'+4x^3y^2+4x^3 &= 0\\ y' &= -4x^3(y^2+1)\\ \frac{1}{y^2+1}y' &= -4dx^3\\ \int\frac{1}{y^2+1}dy &= -\int 4x^3dx\\ \mathrm{Tan}^{-1}y &= -x^4+C\\ y &= \tan(C-x^4)\end{aligned}$$

ここで問題があります。最後の変形の部分ですが、$\mathrm{Tan}^{-1}y=C-x^4$ なので $-\frac{\pi}{2}<C-x^4<\frac{\pi}{2}$ であるはずです。しかし最終形態の $y=\tan(C-x^4)$ の部分にはそのような制限は見当たりません（と云うか、制限すべきものをしていません）。

$\tan x$ を $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ に制限したものの逆関数を $\mathrm{Tan}^{-1}x$ と書きましたがこれを $F_1(x)$ とし、例えば $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ に制限したものの逆関数を $F_2(x)$ とすれば、当たり前ですが

$$F_2(x)=F_1(x)+\pi$$

ですから、

$$F_2'(x)=F_1'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

が成り立っていて、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y^2+1}dy &= -\int 4x^3dx\\ F_2(y) &= -x^4+C\end{aligned}$$

でもあるわけなんです。

つまり、左辺の積分は $\mathrm{Tan}^{-1}y$ でなければならないわけではなく、どの範囲に制限したもの（の逆関数）であっても良かったわけです。どっちにしても積分定数がプラスされるのでそこでそれらの差は吸収されてしまうわけです。従ってこれを最終形態に変形するときには特に x の範囲を気にする必要はありません。

(3)

$$\sqrt{x}y'+2xy=x$$

$$
\begin{aligned}
y' &= \sqrt{x}(1-2y) \\
\frac{1}{2y-1}y' &= -\sqrt{x} \\
\int \frac{1}{2y-1}dy &= -\int \sqrt{x}dx \\
\frac{1}{2}\log|2y-1| &= -\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C \\
\log|2y-1| &= -\frac{4}{3}\sqrt{x}^3 + C \\
|2y-1| &= \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\sqrt{x}^3+C} \\
2y-1 &= C\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\sqrt{x}^3} \\
y &= C\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\sqrt{x}^3} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$C=0$ に対応する解 $y=\frac{1}{2}$ も含みます。

演習問題 5.2 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' = (y-1)^2,\ y(1)=0$　(2) $y' + 4x^3y^2 + 4x^3 = 0,\ y(0)=1$

(3) $\sqrt{x}y' + 2xy = x,\ y(0) = -1$

(1) 一般解は $y = \frac{1}{C-x} + 1$ ですから、初期条件より

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{C-1} + 1 \\
C &= 0
\end{aligned}
$$

ですから求める解は $y = -\frac{1}{x} + 1$ です。

(2) 一般解は $y = \tan(C - x^4)$ ですから初期条件により

$$
\begin{aligned}
1 &= \tan C \\
C &= \frac{\pi}{4} + n\pi
\end{aligned}
$$

です（n は任意の整数)。従って解は

$$
y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi - x^4\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x^4\right)
$$

です。

仮に一般解を $\mathrm{Tan}^{-1}y = -x^4 + C$ の形で書いた場合は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tan}^{-1}1 &= C \\
C &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

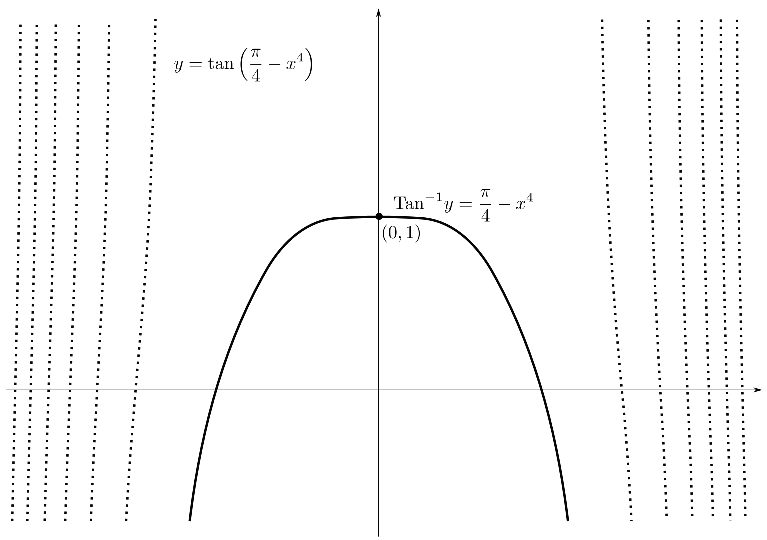
ですから、

$$
\mathrm{Tan}^{-1}y = -x^4 + \frac{\pi}{4} \quad \left(-\sqrt[4]{\frac{3\pi}{4}} < x < \sqrt[4]{\frac{3\pi}{4}}\right)
$$

あるいは

$$
y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x^4\right) \quad \left(-\sqrt[4]{\frac{3\pi}{4}} < x < \sqrt[4]{\frac{3\pi}{4}}\right)
$$

となって、初期条件の表す点と繋がった 1 本の枝のみが出てくることになります（初期条件の表す点から出発して、微分方程式（微分という局所的な情報）を使って解曲線を繋いでいくことを考えれば、この範囲を越えることはできませんからこれで良いのです)。



(3) 一般解は $y = C\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\sqrt{x}^3} + \frac{1}{2}$ であり、初期条件によれば

$$
-1 = C + \frac{1}{2}
$$

$$C = -\frac{3}{2}$$

ですから求める解は $y = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2}$ です。

□

5.2　接触変換

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ と置けば

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

となることに注意します。表面上 x を含まない場合に効果を発揮します。

問題 5.2.1 次の方程式の一般解を求めてください。

$$(y+1)y'' + (y')^2 = 0$$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ と置けば、

$$(y+1)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0$$

であり、$p = 0$ もしくは

$$(y+1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p = 0$$

です。後者の場合、$y = -1$ でなければ

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= -\frac{1}{y+1}\\ \int \frac{1}{p}dp &= -\int \frac{1}{y+1}dy\\ \log|p| &= -\log|y+1| + C\\ \log|p(y+1)| &= C\\ p(y+1) &= \pm\mathrm{e}^C\end{aligned}$$

です。ここで改めて $C = \pm\mathrm{e}^C$ と置き直せば

$$\begin{aligned}(y+1)y' &= C\\ \int (y+1)dy &= Cx + D\\ \frac{1}{2}y^2 + y &= Cx + D\end{aligned}$$

が得られます（C, D は任意定数）。この一般解は、$p = 0$、すなわち y が定数関数の場合や、$y = -1$ の場合も含んでいます。

□

演習問題 5.3 次の微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $yy'' = (y')^2$　　(2) $(y-1)y'' = (y')^2$

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ と置けば、

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2$$

ですから、$p = 0$ であるか、あるいは

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{y}\\ \int \frac{1}{p}dp &= \int \frac{1}{y}dy\\ \log|p| &= \log|y| + C\\ |p| &= \mathrm{e}^C|y|\end{aligned}$$

ですから改めて $\pm\mathrm{e}^C$ を C と書けば

$$\begin{aligned}y' &= Cy\\ \frac{1}{y}y' &= C\\ \int \frac{1}{y}dy &= Cx + D\\ \log|y| &= Cx + D\\ |y| &= \mathrm{e}^{Cx+D}\end{aligned}$$

です。ここでもまた改めて $\pm\mathrm{e}^D$ を D と書き直して

$$y = D\mathrm{e}^{Cx}$$

が得られます（C, D は任意の定数）。$p=0$ は $C=0$ に相当し、$y=0$ も $D=0$ に相当しています。

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$ と置けば、

$$(y-1)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2$$

です。従って $p=0$ であるか、あるいは

$$(y-1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$$

です。これを解くと、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}&=\frac{1}{y-1}\\
\int\frac{1}{p}dp&=\int\frac{1}{y-1}dy\\
\log|p|&=\log|y-1|+C\\
|p|&=\mathrm{e}^C|y-1|\\
y'&=C(y-1)\\
\frac{1}{y-1}y'&=C\\
\log|y-1|&=Cx+D\\
|y-1|&=\mathrm{e}^{Cx+D}\\
y-1&=D\mathrm{e}^{Cx}\\
y&=D\mathrm{e}^{Cx}+1
\end{aligned}$$

が得られます（C, D は任意の定数）。これは $p=0$ の場合も含んでいます。　□

5.3　階数降下法

y を含まない場合には $y'=p$ と置けば階数が１つ下がった方程式になります。

問題 5.3.1

$$xy''-y'=0$$

$y'=p$ と置けば、

$$\begin{aligned}
xp'-p&=0\\
\frac{1}{x}p'-\frac{1}{x^2}p&=0\\
\left\{\frac{1}{x}p\right\}'&=0\\
\frac{p}{x}&=C\\
p&=Cx\\
y'&=Cx\\
y&=Cx^2+D
\end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数であり、現れる行が異なれば異なるものとします）。　□

演習問題 5.4 (1) $y''=y'$　(2) $y'y''=1$　(3) $y''=2x(y')^2$

(1) $y'=p$ と置けば

$$\begin{aligned}
p'&=p\\
\frac{1}{p}p'&=1\\
\log|p|&=x+C\\
p&=C\mathrm{e}^x\\
y&=\int C\mathrm{e}^x dx\\
&=C\mathrm{e}^x+D
\end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数であり、現れる行が異なれば異なるものとします）。

(2) $y'=p$ と置けば

$$\begin{aligned}
pp'&=1\\
2pp'&=2\\
(p^2)'&=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 &= 2x + C \\
p &= \pm\sqrt{2x+C} \\
y &= \pm\int\sqrt{2x+C}dx \\
&= \pm\frac{1}{3}(2x+C)^{\frac{3}{2}} + D \\
3(y-D) &= \pm(2x+C)^{\frac{3}{2}} \\
9(y-D)^2 &= (2x+C)^3
\end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数であり、現れる行が異なれば異なるものとします）。

(3) $y' = p$ と置けば

$$p' = 2xp^2$$

です。$p \neq 0$ であれば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^2}p' &= 2x \\
-\frac{1}{p} &= x^2 + C \\
p &= -\frac{1}{x^2+C} \\
y &= -\int\frac{1}{x^2+C}dx
\end{aligned}$$

であって、$C = 0$ の場合は $y = \frac{1}{x} + D$ であり、$C > 0$ の場合は

$$\begin{aligned}
y &= -\int\frac{1}{C\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)^2 + C}dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{C}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{C}} + D
\end{aligned}$$

です。

また $C < 0$ の場合は $C = -R^2$ と置けば

$$\begin{aligned}
y &= -\int\frac{1}{x^2-R^2}dx \\
&= \frac{1}{2R}\int\left(\frac{1}{x+R} - \frac{1}{x-R}\right)dx \\
&= \frac{1}{2R}\log\left|\frac{x+R}{x-R}\right| + D
\end{aligned}$$

です。

以上から

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} + D & (D\text{ は任意の定数}) \\ -\frac{1}{C}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{C} + D & (C > 0, D\text{ は任意の定数}) \\ \frac{1}{2R}\log\left|\frac{x+R}{x-R}\right| + D & (R \neq 0, D\text{ は任意の定数}) \end{cases}$$

です。 □

5.4　問題演習

演習問題 5.5 次の１階微分方程式の一般解と初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' = 3y,\ y(1) = 1$　　(2) $y' = (y+1)^3,\ y(0) = 1$

(3) $y' = \tan x \tan y,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$　　(4) $\sqrt[3]{x}yy' + x^2y^2 = x^2,\ y(0) = 2$

(5) $yy' + y' = x,\ y(2) = 2$　　(6) $y' = \mathrm{e}^{2x-y},\ y(0) = 0$

(1) 一般解は $y = C\mathrm{e}^{3x}$ ですから初期条件により $C = \mathrm{e}^{-3}$ です。従って初期値問題の解は $y = \mathrm{e}^{3x-3}$ です。

(2)

$$\begin{aligned}
y' &= (y+1)^3 \\
\frac{1}{(y+1)^3}y' &= 1 \\
\int\frac{1}{(y+1)^3}dy &= \int dx \\
-\frac{1}{2}\frac{1}{(y+1)^2} &= x + C \\
(y+1)^2 &= \frac{1}{C-2x}
\end{aligned}$$

初期条件から

$$(1+1)^2 = \frac{1}{C - 2\cdot 0}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

ですので、求める初期値問題の解は

$$(y+1)^2 = \frac{1}{\frac{1}{4} - 2x} = \frac{4}{1-8x}$$

です。

(3)

$$\begin{aligned} y' &= \tan x \tan y \\ \frac{1}{\tan y} y' &= \tan x \\ \int \frac{\cos y}{\sin y} dy &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ \log|\sin y| &= -\log|\cos x| + C \quad \text{（C は任意の定数）} \\ |\sin y| &= \frac{\mathrm{e}^C}{|\cos x|} \\ \sin y &= \frac{C}{\cos x} \quad \text{（C は任意の 0 でない定数）} \end{aligned}$$

また、$\sin p = 0$ であるような定数 p に対して、$y = p$ は最初の微分方程式を満たしており、$\sin y = 0$ もまた解であり、これは先に求めた一般解の定数 C が 0 の場合に対応しています。従って一般解は

$$\sin y = \frac{C}{\cos x} \quad \text{（C は任意の定数）}$$

となります。

また初期条件によれば

$$1 = C$$

ですから求める解は $\sin y = \frac{1}{\cos x}$ です。

(4)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} y y' + x^2 y^2 &= x^2 \\ y y' &= \frac{x^2(1-y^2)}{\sqrt[3]{x}} \\ \frac{y}{1-y^2} y' &= x^{\frac{5}{3}} \\ \int \frac{y}{1-y^2} dy &= \int x^{\frac{5}{3}} dx \\ -\frac{1}{2}\log|1-y^2| &= \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + C \\ \log|1-y^2| &= -\frac{6}{8} x^{\frac{8}{3}} + C \\ |1-y^2| &= \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}} + C} \\ 1 - y^2 &= C\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}} \\ y^2 &= C\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}} + 1 \end{aligned}$$

解 $y^2 = 1$ は任意定数 C が 0 の場合に対応しています。

また初期条件によれば

$$\begin{aligned} 4 &= C + 1 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

ですから、求める解は

$$y^2 = 3\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}} + 1$$

です。

(5)

$$\begin{aligned} yy' + y' &= x \\ (y+1)y' &= x \\ \int (y+1) dy &= \int x\, dx \\ \frac{1}{2}y^2 + y &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ y^2 + 2y &= x^2 + C \end{aligned}$$

また初期条件によれば

$$8 = 4 + C, \quad \text{すなわち} \quad C = 4$$

ですから、求める解は $y^2 + 2y = x^2 + 4$ です（$(y+1)^2 - x^2 = 5$ でも良いですね）。

(6)

$$
\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^{2x-y} \\
\mathrm{e}^y y' &= \mathrm{e}^{2x} \\
\int \mathrm{e}^y dy &= \int \mathrm{e}^{2x} dx \\
\mathrm{e}^y &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C \\
y &= \log\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C\right)
\end{aligned}
$$

初期条件によれば $C = \frac{1}{2}$ であり、解は $y = \log \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)$ です。 □

演習問題 5.6 (1) $yy'' + (y')^2 - 1 = 0$ (2) $y^2 y'' = (y')^3$

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ と置けば $p^2 \neq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 - 1 &= 0 \\
yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= 1 - p^2 \\
\frac{p}{1-p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{y} \\
-\frac{1}{2}\int \frac{-2p}{1-p^2} dp &= \int \frac{1}{y} dy \\
-\frac{1}{2}\log|1-p^2| &= \log|y| + C \\
y^2|1-p^2| &= \mathrm{e}^C \\
y^2(1-p^2) &= C \\
y^2p^2 &= y^2 - C \\
p &= \pm\sqrt{\frac{y^2-C}{y^2}} \\
\pm\frac{y}{\sqrt{y^2-C}}y' &= 1 \\
\pm\sqrt{y^2-C} &= x + D \\
y^2 - C &= (x+D)^2 \\
(x+D)^2 - y^2 &= C
\end{aligned}
$$

です（C, D は任意の定数であり、異なる行に現れているものは異なるものとする）。

$p = \pm 1$ の場合は $y = \pm x + K$ ですが、これは上の一般解に含まれています（$C = 0$）。

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ と置けば

$$y^2 p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^3$$

であり、$p = 0$ もしくは

$$y^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2$$

です。

後者は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{y^2} \\
\int \frac{1}{p^2} dp &= \int \frac{1}{y^2} dy \\
-\frac{1}{p} &= -\frac{1}{y} + C \\
p &= \frac{1}{\frac{1}{y} - C} \\
y' &= \frac{y}{1 - Cy} \\
\frac{1-Cy}{y}y' &= 1 \\
\int \left(\frac{1}{y} - C\right) dy &= 1 \\
\log|y| - Cy &= x + D \\
\log|y| &= x + Cy + D \\
|y| &= \mathrm{e}^{x+Cy+D} \\
y &= D\mathrm{e}^{x+Cy}
\end{aligned}
$$

となります（C, D は任意の定数）。前者は

$$p = 0 \quad \text{従って} \quad y = C$$

となりますが、これは一般解には含まれていません（$y = 0$ だけは、$C \to -\infty$ に対応していると考えられなくもないです）。

□

演習問題 5.7 (1) $xy'' - y' + 1 = 0$　(2) $xy'' + y' = 4x$　(3) $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

(1) $y' = p$ と置けば

$$\begin{aligned} xp' - p + 1 &= 0 \\ xp' &= p - 1 \\ \frac{1}{p-1}p' &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{p-1}dp &= \int \frac{1}{x}dx \\ \log|p-1| &= \log|x| + C \\ |p-1| &= \mathrm{e}^C|x| \\ p - 1 &= \pm\mathrm{e}^C x \\ y' &= Cx + 1 \\ y &= \frac{C}{2}x^2 + x + D \\ y &= Cx^2 + x + D \end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数）。$p = 1$ の場合、$y = x + D$ ですが、これは一般解において $C = 0$ に対応しています。

(2) $y' = p$ と置けば

$$\begin{aligned} xp' + p &= 4x \\ (xp)' &= 4x \\ xp &= 2x^2 + C \\ p &= 2x + \frac{C}{x} \\ y' &= 2x + \frac{C}{x} \\ y &= x^2 + C\log|x| + D \end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数）。

(3) $y' = p$ と置けば

$$\begin{aligned} p' + p^2 + 1 &= 0 \\ -p' &= p^2 + 1 \\ \frac{1}{p^2+1}p' &= -1 \\ \int \frac{1}{p^2+1}dp &= -x + C \\ \mathrm{Tan}^{-1}p &= -x + C \\ p &= \tan(C - x) \\ y &= \int \tan(C - x)dx \\ &= \log|\cos(C - x)| + D \end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数）。 □