5　変数分離型

目標
C1. 変数分離型であるかどうかの区別ができる
B1. いろいろな変数分離型方程式の一般解が求められる 演習問題 5.1、5.2、5.5
A1. 任意定数の扱いについてきちんと理解している A2. 接触変換・階数降下法を利用して一般解を求められる 演習問題 5.3、5.4、5.6、5.7

5.1　基本

変数分離型：　$y' = F(x)G(y)$

例 5.1.1 変数分離型の例

(1) $y' = (y-1)^2$　(2) $y' + 4x^3y^2 + 4x^3 = 0$　(3) $\sqrt{x}y' + 2xy = x$

5.1.1　一般的な解法

問題 5.1.2 次の 1 階微分方程式の一般解を求めてください。　$y' = 2x(y+1)$

以下 C は積分定数ですが、異なる行に現れるものは異なるものとします。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y+1}y' &= 2x \\
\int \frac{1}{y+1}dy &= \int 2x\,dx \\
\log|y+1| &= x^2 + C \quad (C \text{ は任意の定数}) \\
|y+1| &= e^{x^2+C} = e^C e^{x^2} \quad (e^C \text{ は任意の正の定数}) \\
y+1 &= \pm e^C e^{x^2} \\
y &= Ce^{x^2} - 1 \quad (C \neq 0 \text{ は任意の定数})
\end{aligned}$$

しかし、$C = 0$ の場合を考えると $y = -1$ となり、これは最初に両辺を $y+1$ で割ったときの分母が 0 の場合を意味していますが、$y = -1$ も微分方程式を満たしています。そこでこれらを合わせて一般解は

$$y = Ce^{x^2} - 1 \quad (C \text{ は任意の定数})$$

となります。 □

問題 5.1.3 次の 1 階微分方程式の一般解を求めてください。　$y' = 2xy^2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}y' &= 2x \\
\int \frac{1}{y^2}dy &= \int 2x\,dx \\
-\frac{1}{y} &= x^2 + C \quad (C \text{ は任意の定数}) \\
y &= \frac{1}{C - x^2}
\end{aligned}$$

$y = 0$ が 1 つの解であることは明らかですが、この解は一般解の任意定数 C にいかなる値を代入しても得ることはできませんが、任意定数 C の範囲を $C \to \pm\infty$ にまで広げて考えれば解 $y = 0$ も一般解の範疇で考えられることに注意します。

このような場合、解を

$$y = \frac{1}{C - x^2} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

とだけ書いても許されるようです（要するに一般解の一部と見做すわけです）。

演習問題 5.1 次の 1 階微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y' = (y-1)^2$　(2) $y' + 4x^3y^2 + 4x^3 = 0$　(3) $\sqrt{x}y' + 2xy = x$

演習問題 5.2 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' = (y-1)^2,\ y(1) = 0$　(2) $y' + 4x^3y^2 + 4x^3 = 0,\ y(0) = 1$

(3) $\sqrt{x}y' + 2xy = x,\ y(0) = -1$

5.2 接触変換

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ と置く： $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

> **問題 5.2.1** 次の方程式の一般解を求めてください。 $(y+1)y'' + (y')^2 = 0$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ と置けば、

$$(y+1)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0$$

であり、$p = 0$ もしくは

$$(y+1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p = 0$$

です。後者の場合、$y = -1$ でなければ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= -\frac{1}{y+1} \\
\int \frac{1}{p}dp &= -\int \frac{1}{y+1}dy \\
\log|p| &= -\log|y+1| + C \\
\log|p(y+1)| &= C \\
p(y+1) &= \pm \mathrm{e}^C
\end{aligned}$$

です。ここで改めて $C = \pm\mathrm{e}^C$ と置き直せば

$$\begin{aligned}
(y+1)y' &= C \\
\int (y+1)dy &= Cx + D \\
\frac{1}{2}y^2 + y &= Cx + D
\end{aligned}$$

が得られます（C, D は任意定数）。この一般解は、$p = 0$、すなわち y が定数関数の場合や、$y = -1$ の場合も含んでいます。 □

> **演習問題 5.3** 次の微分方程式の一般解を求めてください。
>
> (1) $yy'' = (y')^2$ (2) $(y-1)y'' = (y')^2$

5.3 階数降下法

y を含まない場合には $y' = p$ と置けば階数が 1 つ下がった方程式になります。

> **問題 5.3.1** 次の微分方程式の一般解を求めてください： $xy'' - y' = 0.$

$y' = p$ と置けば、

$$\begin{aligned}
xp' - p &= 0 \\
\frac{1}{x}p' - \frac{1}{x^2}p &= 0 \\
\left\{\frac{1}{x}p\right\}' &= 0 \\
y' = p &= Cx \\
y &= Cx^2 + D
\end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数であり、現れる行が異なれば異なるものとします）。 □

> **演習問題 5.4** (1) $y'' = y'$ (2) $y'y'' = 1$ (3) $y'' = 2x(y')^2$

5.4 問題演習

> **演習問題 5.5** 次の 1 階微分方程式の一般解と初期値問題の解を求めてください。
>
> (1) $y' = 3y,\ y(1) = 1$ (2) $y' = (y+1)^3,\ y(0) = 1$
>
> (3) $y' = \tan x \tan y,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$ (4) $\sqrt[3]{x}yy' + x^2y^2 = x^2,\ y(0) = 2$
>
> (5) $yy' + y' = x,\ y(2) = 2$ (6) $y' = \mathrm{e}^{2x-y},\ y(0) = 0$
>
> **演習問題 5.6** (1) $yy'' + (y')^2 - 1 = 0$ (2) $y^2y'' = (y')^3$
>
> **演習問題 5.7** (1) $xy'' - y' + 1 = 0$ (2) $xy'' + y' = 4x$ (3) $y'' + (y')^2 + 1 = 0$