

6 同次型

$y = xv$ と置けば、 $y' = v + xv'$ であり、

目標
C1. 同次型方程式の基本的な解法を知っている
B1. 簡単な同次型方程式の一般解・初期値問題の解が求められる 演習問題 6.3
A1. $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)$ 型の方程式が解ける 演習問題 6.4、6.5

6.1 一般論

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の型の微分方程式を同次型と言います。

$\frac{y}{x} = v$ 、すなわち、 $y = xv$ と置けば、

$$y' = v + xv'$$

ですからこれを元の方程式に代入すれば

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \\ v + xv' &= f(v) \\ v' &= \frac{1}{x} \{f(v) - v\} \\ \frac{1}{f(v) - v} v' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となって変数分離型に帰着されます ($f(v) = v$ のときは元々変数分離型です)。

問題 6.1.1 次の初期値問題の解を求めてください。

$$y' = \frac{2x - y}{x + 3y}, \quad y(0) = 1$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x - y}{x + 3y} \\ v + xv' &= \frac{2 - v}{1 + 3v} \\ xv' &= \frac{2 - v}{1 + 3v} - v \\ &= \frac{2 - 2v - 3v^2}{1 + 3v} \\ \frac{1 + 3v}{2 - 2v - 3v^2} v' &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1 + 3v}{2 - 2v - 3v^2} dv &= \int \frac{1}{x} dx \\ -\frac{1}{2} \log |2 - 2v - 3v^2| &= \log |x| + C \\ 2 \log |x| + \log |2 - 2v - 3v^2| &= -2C \\ x^2 |2 - 2v - 3v^2| &= e^{-2C} \\ x^2 (2 - 2v - 3v^2) &= \pm e^{-2C} \\ 2x^2 - 2xy - 3y^2 &= C \end{aligned}$$

となります。

初期条件によれば

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 &= C \\ -3 &= C \end{aligned}$$

ですから、求める解は $2x^2 - 2xy - 3y^2 + 3 = 0$ です。しかしこのままでは $x = 0$ のとき $y = \pm 1$ で良いことになりますから、 $y = 1$ の方だけを指定したいところです。さらに変形すると

$$\begin{aligned} y^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x^2 - 1 &= 0 \\ \left(y + \frac{x}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x^2 - 1 &= 0 \\ \left(y + \frac{x}{3}\right)^2 &= \frac{7x^2 + 9}{9} \\ y + \frac{x}{3} &= \pm \frac{\sqrt{7x^2 + 9}}{3} \end{aligned}$$

ですが、 $x = 0$ のとき $y = 1$ でしたから

$$y = \frac{-x + \sqrt{7x^2 + 9}}{3}$$

です。

□

演習問題 6.1 次の同次型微分方程式の一般解を求めてください。

$$(1) y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \quad (2) xyy' = x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2$$

(1) $y = xv$ と置けば、 $y' = v + xv'$ であり、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \\ v + xv' &= v^2 + v \\ xv' &= v^2 \\ \frac{1}{v^2}v' &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{1}{v^2}dv &= \int \frac{1}{x}dx \\ -\frac{1}{v} &= \log|x| + C \\ -\frac{x}{y} &= \log|x| + C \\ y &= -\frac{x}{\log|x| + C} \end{aligned}$$

です。

(2) $y = xv$ と置けば、 $y' = v + xv'$ であり、

$$\begin{aligned} xyy' &= x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \\ xyy' &= x|x|\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + y^2 \\ v(v + xv') &= \frac{|x|}{x}\sqrt{1 + v^2} + v^2 \\ xvv' &= \frac{|x|}{x}\sqrt{1 + v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}v' &= \frac{1}{|x|} \\ \sqrt{1 + v^2} &= \begin{cases} \int \frac{1}{x}dx & x > 0 \\ -\int \frac{1}{x}dx & x < 0 \end{cases} \\ 1 + v^2 &= (\log|x| + C)^2 \\ 1 + \frac{y^2}{x^2} &= (\log|x| + C)^2 \\ y^2 &= x^2(\log|x| + C)^2 - 1 \end{aligned}$$

となります。

□

演習問題 6.2 次の初期値問題の解を求めてください。

$$(1) y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}, y(1) = 1 \quad (2) xyy' = x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2, y(1) = 0$$

(1)

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{1}{\log|1| + C} \\ -1 &= C \end{aligned}$$

なので、解は $y = -\frac{x}{\log|x| - 1}$ です。

(2)

$$\begin{aligned} 0^2 &= 1^2(\log|1| + C)^2 - 1 \\ 1 &= C^2 \end{aligned}$$

から $C = \pm 1$ なら良く、求める解は $y^2 = x^2(\log|x| \pm 1)^2 - 1$ となります。

□

6.2 $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)$ 型

この型の微分方程式は $\begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}$ が正則であるかどうかによって解き方が変わります。

6.2.1 $\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0$

正則である場合は連立方程式：

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$$

はただ1つの解 $(x, y) = (\alpha, \beta)$ をもちます。すると

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ p\alpha + q\beta + r = 0 \end{cases}$$

ですから

$$ax + by + c = ax + by - (a\alpha + b\beta) = a(x - \alpha) + b(y - \beta)$$

$$px + qy + r = px + qy - (p\alpha + q\beta) = p(x - \alpha) + q(y - \beta)$$

と書くことができるので、 $X = x - \alpha, Y = y - \beta$ と置けば

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

であって、元の方程式は

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{pX + qY}\right)$$

という形に変形され、これは同次型です。

問題 6.2.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' = \frac{x + y - 1}{x - y - 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ ですから連立方程式：}$$

$$x + y = 1, \quad x - y = 3$$

を解けば $x = 2, y = -1$ です。そこで $X = x - 2, Y = y + 1$ と置けば

$$y' = \frac{dY}{dX}, \quad x + y - 1 = X + Y, \quad x - y - 3 = X - Y$$

ですから

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + Y}{X - Y}$$

と変形されます。ここで $Y = XV$ と置けば $Y' = V + XV'$ ですから (' は X での微分を表すとして)

$$V + XV' = \frac{1 + V}{1 - V}$$

$$XV' = \frac{1 + V^2}{1 - V}$$

$$\frac{1 - V}{1 + V^2} V' = \frac{1}{X}$$

$$\int \frac{1 - V}{1 + V^2} dV = \int \frac{1}{X} dX$$

$$\tan^{-1} V - \frac{1}{2} \log(1 + V^2) = \log |X| + C$$

$$2 \tan^{-1} V = \log(1 + V^2) X^2 + 2C$$

$$2 \tan^{-1} \frac{y + 1}{x - 2} = \log \{(x - 2)^2 + (y + 1)^2\} + 2C$$

が得られます。

□

6.2.2 $\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = 0$

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{px + qy + r}\right)$$

$q = 0$ のときは $p = 0$ もしくは $b = 0$ でなければなりません。

$p = 0$ の場合はもともと $f\left(\frac{ax+by+c}{r}\right)$ の形であって、更に $b = 0$ でもあるならば右辺は x のみの関数ですから積分型になっています。

一方 $b \neq 0$ の場合は $ax + by + c = v$ と置けば

$$a + by' = v' \quad \text{すなわち} \quad y' = \frac{1}{b}(v' - a)$$

であって

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{ax + by + c}{r}\right) \\ \frac{1}{b}(v' - a) &= f\left(\frac{v}{r}\right) \\ v' &= bf\left(\frac{v}{r}\right) + a \end{aligned}$$

などとすれば変数分離型に持ち込むことができます。

$b = 0$ の場合は ($q = 0$ でもありますから)、元々右辺は x のみの関数ですから積分型です。

以上から、あとは $q \neq 0$ の場合が問題となります。この場合は

$$ax + by = k(px + qy)$$

と書けるので、 $px + qy = v$ と置きます。すると

$$p + qy' = v' \quad y' = \frac{1}{q}(v' - p)$$

であって

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{ax + by + c}{px + qy + r}\right) \\ \frac{1}{q}(v' - p) &= f\left(\frac{kv + c}{v + r}\right) \end{aligned}$$

と変形され、変数分離型になります。

$x + y = v$ と置けば $1 + y' = v'$ であり、

$$\begin{aligned} v' - 1 &= \frac{v - 3}{v + 2} \\ v' &= \frac{2v - 1}{v + 2} \\ \frac{v + 2}{2v - 1} v' &= 1 \\ \int \frac{v + 2}{2v - 1} dv &= \int dx \\ \int \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2v - 1} \right) dv &= x + C \\ \frac{1}{2}v + \frac{5}{4} \log |2v - 1| &= x + C \\ \log |2v - 1|^5 &= 4x - 2v + 4C \\ (2v - 1)^5 &= \pm e^{4C} e^{4x - 2v} \\ (2x + 2y - 1)^5 &= C e^{2x - 2y} \end{aligned}$$

となります。

□

6.3 問題演習

演習問題 6.3 次の同次型方程式の一般解を求め、初期値問題の解を求めてください。

- (1) $y' = \frac{2x + y}{x}, y(1) = 0$ (2) $y' = \frac{x - y}{x + y}, y(1) = 1$
- (3) $xyy' = x^2 + y^2, y(2) = 1$
- (4) $x \left(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x} \right) y' = x + y \left(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x} \right), y(1) = 0$
- (5) $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}, y(2) = \pi$

(1) $y = xv$ と置けば $y' = v + xv'$ ですから、まず一般解を求めると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x + y}{x} \\ &= 2 + \frac{y}{x} \\ v + xv' &= 2 + v \end{aligned}$$

問題 6.2.2 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' = \frac{x + y - 3}{x + y + 2}$$

$$v' = \frac{2}{x}$$

$$v = 2 \log |x| + C$$

$$y = x \log x^2 + Cx$$

であって、初期条件によれば

$$0 = C$$

ですから、求める初期値問題の解は

$$y = x \log x^2$$

です。

(2) $y = xv$ と置けば $y' = v + xv'$ ですから、まず一般解を求めると

$$y' = \frac{x - y}{x + y}$$

$$= \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

$$v + xv' = \frac{1 - v}{1 + v}$$

$$xv' = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v}$$

$$-\frac{v+1}{v^2+2v-1}v' = \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{2v+2}{v^2+2v-1} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{1}{2} \log |v^2 + 2v - 1| = \log |x| + C$$

$$\log |v^2 + 2v - 1| + \log x^2 = -2C$$

$$\log |v^2 + 2v - 1| x^2 = -2C$$

$$(v^2 + 2v - 1)x^2 = C$$

$$y^2 + 2xy - x^2 = C$$

であって、初期条件によれば

$$1 + 2 - 1 = C$$

ですから、求める初期値問題の解は

$$y^2 + 2xy - x^2 = 2$$

です。しかしこれは $x = 1$ のときに

$$0 = y^2 + 2y - 3 = (y - 1)(y + 3)$$

を意味するため、 $y = -3$ をも許容しており、これを排除するために

$$y^2 + 2xy - x^2 = 2$$

$$(y + x)^2 - 2x^2 = 2$$

$$(y + x)^2 = 2x^2 + 2$$

$$y = -x \pm \sqrt{2x^2 + 2}$$

のうち + の方にとって

$$y = -x + \sqrt{2x^2 + 2}$$

となります。

(3)

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$\frac{y}{x}y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$\frac{y}{x} = v$ と置けば $y = xv$ ですから $y' = v + xv'$ であって、一般解は

$$v(v + xv') = 1 + v^2$$

$$xvv' = 1$$

$$vv' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \log |x| + C$$

$$y^2 = x^2 \log x^2 + 2Cx^2$$

となります。また初期条件によれば

$$1 = 4 \log 4 + 8C$$

$$C = \frac{1}{8} - \log 2$$

ですから、求める初期値問題の解は

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 \log x^2 + \left(\frac{1}{4} - 2 \log 2 \right) x^2 \\ &= x^2 \log \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x^2 \end{aligned}$$

ですが、 $y(2) = 1$ なので

$$y = \sqrt{x^2 \left(\log \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \right)}$$

です。

(4)

$$\begin{aligned} x \left(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x} \right) y' &= x + y \left(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x} \right) \\ \left(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x} \right) y' &= 1 + \frac{y}{x} \left(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

$\frac{y}{x} = v$ と置けば $y = xv$ ですから $y' = v + xv'$ であって、一般解は

$$\begin{aligned} (\sin v - \cos v) (v + xv') &= 1 + v (\sin v - \cos v) \\ x (\sin v - \cos v) v' &= 1 \\ (\sin v - \cos v) v' &= \frac{1}{x} \\ -\cos v - \sin v &= \log |x| + C \\ -\cos \frac{y}{x} - \sin \frac{y}{x} &= \log |x| + C \end{aligned}$$

です。

また初期条件によれば

$$\begin{aligned} -\cos 0 - \sin 0 &= \log 1 + C \\ -1 &= C \end{aligned}$$

ですから、求める解は

$$\cos \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} = -\log |x| + 1$$

です。

(5) $\frac{y}{x} = v$ と置けば $y = xv$ ですから $y' = v + xv'$ であって、一般解は

$$y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$$

$$v + xv' = v + \tan v$$

$$\frac{1}{\tan v} v' = \frac{1}{x}$$

$$\log |\sin v| = \log |x| + C$$

$$\log \left| \frac{\sin \frac{y}{x}}{x} \right| = C$$

$$\frac{\sin \frac{y}{x}}{x} = \pm e^C$$

$$\sin \frac{y}{x} = Cx$$

です。

また初期条件によれば $C = \frac{1}{2}$ ですから求める解は

$$\sin \frac{y}{x} = \frac{x}{2}$$

です。

□

演習問題 6.4 微分方程式：

$$y' = \frac{x - y - 1}{x + y - 3}$$

の一般解を求めてください。

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ ですから連立方程式：}$$

$$x - y = 1, \quad x + y = 3$$

を解けば $x = 2, y = 1$ です。そこで $X = x - 2, Y = y - 1$ と置けば

$$y' = \frac{dY}{dX}, \quad x - y - 1 = X - Y, \quad x + y - 3 = X + Y$$

ですから、方程式は

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

と変形され、これは同次型です。ここで $Y = XV$ と置けば $Y' = V + XV'$ ですから (' $'$ は X での微分を表すとします)

$$V + XV' = \frac{1 - V}{1 + V}$$

$$\begin{aligned}
 XV' &= \frac{1-2V-V^2}{1+V} \\
 \frac{1+V}{V^2+2V-1}V' &= -\frac{1}{X} \\
 \frac{1}{2}\log|V^2+2V-1| &= -\int \frac{1}{X}dX \\
 \log|V^2+2V-1| &= -2\log|X|+C \\
 V^2+2V-1 &= \frac{C}{X^2} \\
 Y^2+2XY-X^2 &= C \\
 (y-1)^2+2(x-2)(y-1)-(x-2)^2 &= C \\
 y^2-2y+1+2xy-2x-4y+4-x^2+4x-4 &= C \\
 -x^2+2xy+y^2+2x-6y &= C
 \end{aligned}$$

が得られます。

【完全なる別解】右辺の分母・分子が x, y の 1 次式であって、分子の y の係数と分母の x の係数が絶対値が同じで符号だけ異なる場合、非常に簡単な解法があります。

方程式を変形すると

$$-x+y+1+(x+y-3)y'=0$$

ですが、左辺は次のように変形できます：

$$\begin{aligned}
 -x+y+1+(x+y-3)y' &= \left(-\frac{1}{2}x^2+xy+x\right)' - xy' + (x+y-3)y' \\
 &= \left(-\frac{1}{2}x^2+xy+x\right)' + (y-3)y' \\
 &= \left(-\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+x-3y\right)'
 \end{aligned}$$

従って一般解は

$$-x^2+2xy+y^2+2x-6y=C$$

となります（完全微分型微分方程式の項で学習します）。 □

(1) 連立方程式：

$$x+y=-1, \quad x-y=1$$

の解は $x=0, y=-1$ ですから、 $X=x, Y=y+1$ と置けば、

$$\frac{dY}{dX}=y', \quad x+y+1=X+Y, \quad x-y-1=X-Y$$

であって、

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{x+y+1}{x-y-1} \\
 \frac{dY}{dX} &= \frac{X+Y}{X-Y}
 \end{aligned}$$

と変形されます。ここで $Y=VX$ と置けば、

$$Y'=V'X+V$$

であって

$$\begin{aligned}
 v'X+V &= \frac{1+V}{1-V} \\
 XV' &= \frac{1+V^2}{1-V} \\
 \frac{1-V}{1+V^2}V' &= \frac{1}{X} \\
 \int \frac{1-V}{1+V^2}dV &= \int \frac{1}{X}dX \\
 \tan^{-1}V - \frac{1}{2}\log(1+V^2) &= \log|X|+C \\
 2\tan^{-1}V &= \log(1+V^2)X^2+2C \\
 2\tan^{-1}\frac{Y}{X} &= \log(X^2+Y^2)+2C \\
 2\tan^{-1}\frac{y+1}{x} &= \log\{x^2+(y+1)^2\}+2C
 \end{aligned}$$

です。

(2) 連立方程式：

$$x-2y=-5, \quad 2x-y=-4$$

演習問題 6.5 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$(1) y' = \frac{x+y+1}{x-y-1} \quad (2) x-2y+5+(2x-y+4)y'=0 \quad (3) y' = \frac{x-2y+1}{2x-4y-2}$$

の解は $(x, y) = (-1, 2)$ ですから、 $X = x + 1, Y = y - 2$ と置きます。すると

$$\frac{dY}{dX} = y', \quad x - 2y + 5 = (x+1) - 2(y-2) = X - 2Y, \quad 2x - y + 4 = 2(x+1) - (y-2) = 2X - Y$$

ですから

$$\begin{aligned} x - 2y + 5 + (2x - y + 4)y' &= 0 \\ X - 2Y + (2X - Y)\frac{dY}{dX} &= 0 \\ \frac{dY}{dX} &= \frac{X - 2Y}{-2X + Y} \end{aligned}$$

と変形されます。ここで $V = \frac{Y}{X}$ と置けば、

$$\frac{dY}{dX} = V + XV'$$

ですから

$$\begin{aligned} V + XV' &= \frac{X - 2Y}{-2X + Y} \\ &= \frac{1 - 2V}{-2 + V} \\ XV' &= \frac{1 - V^2}{V - 2} \\ \frac{V - 2}{1 - V^2}V' &= \frac{1}{X} \\ \int \frac{V - 2}{1 - V^2}dV &= \int \frac{1}{X}dX \\ \int \left(-\frac{3}{2} \frac{1}{V+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{V-1} \right) dV &= \log |X| + C \\ \frac{1}{2} \log |V - 1| - \frac{3}{2} \log |V + 1| &= \log |X| + C \\ \log \left| \frac{V - 1}{(V + 1)^3} \right| &= \log X^2 + 2C \\ \log \left| \frac{V - 1}{X^2(V + 1)^2(V + 1)} \right| &= 2C \\ \log \left| \frac{Y - X}{(Y + X)^3} \right| &= 2C \\ \frac{Y - X}{(X + Y)^3} &= \pm e^{2C} \\ \frac{y - x - 3}{(x + y - 1)^3} &= C \end{aligned}$$

となります。

(3) $x - 2y = v$ と置けば $1 - 2y' = v'$ であって

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x - 2y + 1}{2x - 4y - 2} \\ \frac{1}{2}(1 - v') &= \frac{v + 1}{2v - 2} \\ 1 - v' &= \frac{v + 1}{v - 1} \\ v' &= \frac{-2}{v - 1} \\ (v - 1)v' &= -2 \\ \int (v - 1)dv &= -2 \int dx \\ \frac{1}{2}(v - 1)^2 &= -2x + C \\ (x - 2y - 1)^2 &= -4x + C \end{aligned}$$

となります。

【完全な別解】変形すると

$$x - 2y + 1 - (2x - 4y - 2)y' = 0$$

ですが、左辺は

$$\begin{aligned} x - 2y + 1 - (2x - 4y - 2)y' &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2xy + x \right)' + 2xy' - (2x - 4y - 2)y' \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2xy + x \right)' + (4y + 2)y' \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2xy + x + 2y^2 + 2y \right)' \end{aligned}$$

と変形されますから、一般解は

$$x^2 - 4xy + 2x + 4y^2 + 4y = C$$

です。

□