8　１階線形微分方程式

目標
C1. 微分方程式が線形であるかどうか区別できる C2. 同次・非同次の区別を理解している
B1. 一般的な１階線形方程式が解ける 演習問題 8.1、8.2
A1. １階線形方程式の様々な解法を実行できる 演習問題 8.1（３通りの解法で）

8.1　線形微分方程式

既知関数 $P(x), Q(x)$ をつかって

$$y'(x) + P(x)y = Q(x)$$

の形に書ける１階の微分方程式を、１階線形微分方程式と言います。特にこの右辺（y や y' を含まない項）を非同次項（あるいは非斉次項）と呼び、非同次項が 0 である場合、この微分方程式は同次（もしくは斉次）であると言います。

$$y' + P(x)y = 0 \quad \text{（同次型）} \qquad y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{（非同次型）}$$

与えられた非同次方程式 $y' + P(x)y = Q(x)$ に対して、非同次項を 0 で置き換えて得られる同次方程式 $y' + P(x)y = 0$ は、元の非同次方程式に『対応した』同次方程式と言うことがあります。

例 8.1.1 線形微分方程式の例

$$(1)\ y' + 3y = 2\mathrm{e}^{3x} \qquad (2)\ y' + y = x \qquad (3)\ (x^2+2)y' + 2xy = 3x^3 + 6x$$

例 8.1.2 非線形微分方程式の例

$$(1)\ (y')^2 = 1 - y^2 \qquad (2)\ 2yy'' = 1 + (y')^2 \qquad (3)\ y' = xy^2 + x$$

『線形』とは、（対応した同次方程式の解が）線形性をもつと云う意味で、実際 y_1, y_2 が同次方程式 $y' + P(x)y = 0$ の解であって λ, μ が定数であるとき、

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(y_1' + P(x)y_1) + \mu(y_2' + P(x)y_2) = 0$$

となって、$\lambda y_1 + \mu y_2)$ もこの同次方程式の解になっています（解の任意の線形結合がまた解になる）。

8.2　積分因子法

問題 8.2.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' + x^2 y = x^3 + 1$$

$x^2 = \left(\frac{1}{3}x^3\right)'$ ですから

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} y\right)' = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} y' + x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} y = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}(y' + x^2 y)$$

となっていることに注目します。

つまり、方程式の両辺に $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}$ を掛ければ（この両辺に掛ける関数を積分因子と言います）

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} y' + x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} y &= (x^3+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} \\
\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} y\right)' &= (x^3+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} \\
\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} y &= \int (x^3+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}\,dx \\
&= \int x^3 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}\,dx + \int \underbrace{1}_{\text{せ}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}}_{\text{び}}\,dx \\
&= \int x^3 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}\,dx + x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} - \int x^3 \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}\,dx \\
&= x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} + C \\
y &= x + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}
\end{aligned}$$

を得ます。 □

要するにこの方法の肝は、特別な関数（積分因子）を掛けることによって、左辺を積の微分の結果の形にしてしまおうと云うことです。

見た感じで積分因子が想像出来るのであれば、非常に強力な解法であり、手短に解を得ることが出来ます。

8.3　定数変化法

問題 8.3.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' + x^2 y = x^3 + 1$$

対応した同次方程式：

$$y' + x^2 y = 0$$

の一般解を求めます。これは変数分離型であり、

$$\begin{aligned} y' &= -x^2 y \\ \frac{1}{y} y' &= -x^2 \\ \int \frac{1}{y} dy &= -\int x^2 dx \\ \log|y| &= -\frac{1}{3}x^3 + C \\ y &= \pm \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3 + C} \\ &= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3} \end{aligned}$$

です。

次に元の非同次方程式の解が

$$y = F(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}$$

の形であると仮定して $F(x)$ を求めることを考えます。

$$y' = F'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3} - F(x)x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}$$

ですから

$$\begin{aligned} y' + x^2 y &= x^3 + 1 \\ F'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3} &= x^3 + 1 \\ F'(x) &= (x^3+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} \\ F(x) &= \int (x^3+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} dx \\ &= x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3} + C \end{aligned}$$

が得られ、従って

$$y = x + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}$$

です。 □

8.4　解の構造に注目する方法

y_1, y_2 が共に非同次方程式：

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

の解であるとき、

$$(y_1 - y_2)' + P(x)(y_1 - y_2) = (y_1 + P(x)y_1) - (y_2 + P(x)y_2) = 0$$

から $y_1 - y_2$ は対応した同次方程式 $y' + P(x)y = 0$ の解であることが分かります。

従って、非同次方程式の解が１つ（y_1 とします）分かっていれば、その他の解は y_1 に対応する同次方程式の解を加えた形になっているはずです。

(非同次方程式の一般解) $=$ (非同次方程式の１つの解) $+$ (対応した同次方程式の一般解)

これは直線のパラメータ表示と同じ形式になっていることに注目すべきです。

問題 8.4.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' + x^2 y = x^3 + 1$$

対応した同次方程式の一般解は先に見た通り

$$y = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}$$

です。

あとは元の非同次方程式の解を１つ、何でも良いですから見つけて仕舞えば終了です。

方程式を、『y を変換して右辺の形にした』と見れば、微分したり x^2 を掛けたりする変換の話なのですから、変換前の y も多項式であっておかしくないと思われるでしょう。問題はその次数ですが、微分によって次数が１つ下がりますが、x^2 を掛けると次数は２つ上がってしまいます。その結果が 3 次式なのですから、元は 1 次式であったと考えるのが良いでしょう。

そこで $y = ax + b$ の形の関数が解であったと仮定して係数 a, b を求めてみましょう。すると

$$
\begin{aligned}
(ax+b)' + x^2(ax+b) &= x^3 + 1 \\
a + ax^3 + bx^2 &= x^3 + 1
\end{aligned}
$$

でなくてはなりませんから、$a = 1, b = 0$ であることが分かります。つまり、関数 $y = x$ は元の非同次型微分方程式の解の１つなのです。

以上から求める非同次方程式の一般解は

$$y = x + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3}$$

です。 □

8.4.1　連立１次方程式の解の構造

一般に定数項が 0 である連立１次方程式は同次（あるいは斉次）であると言い、これに対して定数項が 0 でない方程式は非同次であると言います。

$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が既知のとき $M\mathbb{Y} = \mathbb{Q}$ を満たす未知の $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求める非同次方程式を考えると、係数行列は正則でなく解は１つ（１組）に定まりません：

$$
\begin{cases}
2x - 4y = 2 \\
-x + 2y = -1
\end{cases}
$$

要するに２本とも同じ式であって、直線 $x - 2y = 1$ 上の点は全てこの連立方程式を満たす事になります。つまり無限に存在する解の全体（これを一般解と云う事にします）は直線のパラメータ表示：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

となるわけですが、この一般解を構成する２つの要素に注目します。

まず最初の $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ですが、直線のパラメータ表示においてこの直線が『通る点』の部分であり、ここは『通る点』であれば何でも良かったわけですから別に $(1, 0)$ でなくても $(3, 1)$ などでも良い筈です。これを方程式論の言葉で言い直せば、『通る点』とは直線の方程式を満たす点ですから、元の連立方程式の解の１つであり、従ってこの部分は連立方程式の１つの解であれば何でも良いと言えます。

次にもう一方の $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ですが、係数行列 M を掛けてみると

$$M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となっている様に、最初の連立方程式において定数項を $\mathbb{o}$ で置き換えて得られる方程式（これを元の非同次方程式に対応した同次方程式と言います）$M\mathbb{f} = \mathbb{o}$ の一般解が $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ になっています。つまり、象徴的に書けば次のようになっているのです：

$$\boxed{\text{（非同次式の一般解）} = \text{（非同次式の解の一つ）} + \text{（対応した同次式の一般解）}}$$

関数に対してその導関数を対応させる変換 D を

$$Dy = y'$$

とし、関数に別の関数 $P(x)$ を掛ける変換 $P(x)I$ を

$$P(x)Iy = P(x)y$$

とすると、今回見ていた微分方程式は

$$(D + P(x)I)y = Q(x)$$

と書くことができ、$M = D + P(x)I$ とすれば $My = Q$ ですから、全く同じ形式の問題であることが見て取れるでしょう。

8.5　問題演習

演習問題 8.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y' + 3y = 2\mathrm{e}^{3x}$　　(2) $y' + y = x$　　(3) $(x^2+2)y' + 2xy = 3x^3 + 6x$

(1) 【積分因子法】両辺に e^{3x} を掛ければ

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3x}y' + 3\mathrm{e}^{3x}y &= 2\mathrm{e}^{6x} \\ \left(\mathrm{e}^{3x}y\right)' &= 2\mathrm{e}^{6x} \\ \mathrm{e}^{3x}y &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{6x} + C \\ y &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-3x} \end{aligned}$$

です。

【定数変化法】対応した同次方程式は $y' = -3y$ であり、その一般解は明らかに $y = C\mathrm{e}^{-3x}$ です。そこで $y = K(x)\mathrm{e}^{-3x}$ が非同次式の解であると仮定すると

$$\begin{aligned} K'(x)\mathrm{e}^{-3x} - 3K(x)\mathrm{e}^{-3x} + 3K(x)\mathrm{e}^{-3x} &= 2\mathrm{e}^{3x} \\ K'(x) &= 2\mathrm{e}^{6x} \\ K(x) &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{6x} + C \end{aligned}$$

ですから、求める一般解は

$$y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-3x}$$

です。

【解の構造法】対応した同次方程式 $y' = -3y$ の一般解は $y = C\mathrm{e}^{-3x}$ です。
　また、$y = k\mathrm{e}^{3x}$ が非同次式の解であると仮定すると

$$\begin{aligned} 3k\mathrm{e}^{3x} + 3k\mathrm{e}^{3x} &= 2\mathrm{e}^{3x} \\ k &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ですから、$y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ は１つの解です。

以上から非同次式の一般解は

$$y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-3x}$$

です。

(2) 【積分因子法】両辺に e^{x} を掛ければ

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x}y' + \mathrm{e}^{x}y &= x\mathrm{e}^{x} \\ (\mathrm{e}^{x}y)' &= x\mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{e}^{x}y &= \int x\mathrm{e}^{x}dx \\ &= x\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x}dx \\ &= x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C \\ y &= x - 1 + C\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

です。

【定数変化法】対応した同次方程式は $y' = -y$ であり、その一般解は明らかに $y = C\mathrm{e}^{-x}$ です。そこで $y = K(x)\mathrm{e}^{-x}$ が非同次式の解であると仮定すると

$$\begin{aligned} K'(x)\mathrm{e}^{-x} - K(x)\mathrm{e}^{-x} + K(x)\mathrm{e}^{-x} &= x \\ K'(x) &= x\mathrm{e}^{x} \\ K(x) &= \int x\mathrm{e}^{x}dx \\ &= x\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x}dx \\ &= x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C \end{aligned}$$

ですから、求める一般解は

$$y = x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}$$

です。

【解の構造法】対応した同次方程式 $y' = -y$ の一般解は $y = C\mathrm{e}^{-x}$ です。
　また、$y = ax + b$ が非同次式の解であると仮定すると

$$a + ax + b = x$$

ですから、$a=1, b=-1$ であり、$y=x-1$ は１つの解です。
　以上から非同次式の一般解は

$$y = x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}$$

です。

(3) 【積分因子法】このままで積の微分の形になっていますね！

$$\begin{aligned}(x^2+2)y' + 2xy &= 3x^3 + 6x\\ \left\{(x^2+2)y\right\}' &= 3x^3+6x\\ (x^2+2)y &= \frac{3}{4}x^4 + 3x^2 + C\\ y &= \frac{\frac{3}{4}x^4+3x^2+C}{x^2+2}\end{aligned}$$

です。

【定数変化法】対応した同次方程式は $\left\{(x^2+2)y\right\}'=0$ であり、その一般解は明らかに $y=\frac{C}{x^2+2}$ です。そこで $y=\frac{K(x)}{x^2+2}$ が非同次式の解であると仮定すると

$$\begin{aligned}(x^2+2)y &= K(x)\\ (x^2+2)y'+2xy &= K'(x)\\ 3x^3+6x &= K'(x)\\ K(x) &= \frac{3}{4}x^4+3x^2+C\end{aligned}$$

ですから、求める一般解は

$$y = \frac{\frac{3}{4}x^4+3x^2+C}{x^2+2}$$

です。

【解の構造法】対応した同次方程式 $\left\{(x^2+2)y\right\}'=0$ の一般解は $y=\frac{C}{x^2+2}$ です。
　また、$y=ax^2+bx+c$ が非同次式の解であると仮定すると

$$\begin{aligned}(x^2+2)(2ax+b)+2x(ax^2+bx+c) &= 3x^3+6x\\ 4ax^3+3bx^2+(4a+2c)x-3b &= 3x^3+6x\end{aligned}$$

ですから、$a=\frac{3}{4}, b=0, c=\frac{3}{2}$ であり、$y=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}$ は１つの解です。

　以上から非同次式の一般解は

$$y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{C}{x^2+2}$$

です。 □

演習問題 8.2 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y'+3y=2\mathrm{e}^{3x},\ y(0)=1$　　(2) $y'+y=x,\ y(1)=1$

(3) $(x^2+2)y'+2xy=3x^3+6x,\ y(-1)=1$

(1) 一般解は $y=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C\mathrm{e}^{-3x}$ でしたから、初期条件により

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{3}+C\\ C &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

が分かります。従って求める解は

$$y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x}$$

です。

(2) 一般解は

$$y = x-1+C\mathrm{e}^{-x}$$

でした。初期条件によれば

$$\begin{aligned}1 &= 1-1+C\mathrm{e}^{-1}\\ C &= \mathrm{e}\end{aligned}$$

が分かりますから求める解は

$$y = x-1+\mathrm{e}^{1-x}$$

です。

(3) 一般解は

$$y = \frac{\frac{3}{4}x^4+3x^2+C}{x^2+2}$$

です。初期条件によれば

$$1 = \frac{\frac{3}{4} + 3 + C}{1+2}$$
$$C = -\frac{3}{4}$$

ですから、求める解は

$$y = \frac{\frac{3}{4}x^4 + 3x^2 - \frac{3}{4}}{x^2+2}$$

です。 □

演習問題 8.3 次の１階線形微分方程式の一般解と初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$, $y(0) = 1$　(2) $y' - 3y = 4\mathrm{e}^{7x}$, $y(0) = 0$

(3) $y' - y = 3x$, $y(1) = 0$　(4) $y' + xy = (x+2)\mathrm{e}^{2x}$, $y(0) = 3$

(5) $xy' + y = 4x^3 - 2x$, $y(-1) = 2$　(6) $(x^2-4)y' + 2xy = x^3 - 4x$, $y(0) = 1$

(1) 両辺に e^{2x} を掛ければ

$$\begin{aligned} y' + 2y &= \mathrm{e}^{-2x} \\ \mathrm{e}^{2x}y' + 2\mathrm{e}^{2x}y &= 1 \\ \left(\mathrm{e}^{2x}y\right)' &= 1 \\ \mathrm{e}^{2x}y &= x + C \\ y &= (x+C)\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

を得ます。

また初期条件によれば $1 = C$ ですから、求める初期値問題の解は $y = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ です。

(2) 対応した同次方程式：

$$y' - 3y = 0$$

の一般解は $y = C\mathrm{e}^{3x}$ です。また、元の非同次方程式の解を $y = k\mathrm{e}^{7x}$ の形で求めると、

$$7k\mathrm{e}^{7x} - 3k\mathrm{e}^{7x} = 4\mathrm{e}^{7x}$$

$$k = 1$$

ですから、元の非同次方程式の一般解は

$$y = \mathrm{e}^{7x} + C\mathrm{e}^{3x}$$

です。

また初期条件によれば

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + C \\ C &= -1 \end{aligned}$$

ですから、この初期値問題の解は

$$y = \mathrm{e}^{7x} - \mathrm{e}^{3x}$$

です。

(3) 対応した同次方程式：$y' = y$ の一般解は $y = C\mathrm{e}^x$ です。
また、元の非同次方程式の解を 1 次関数 $y = ax + b$ の形の範囲で探してみると

$$\begin{aligned} a - (ax+b) &= 3x \\ -ax + (a-b) &= 3x \end{aligned}$$

であれば良く、$a = -3, b = -3$ が得られます。つまり、$y = -3x - 3$ は１つの特殊解です。
以上から、求める一般解は

$$y = -3x - 3 + C\mathrm{e}^x$$

です。

また、与えられた初期条件によれば

$$\begin{aligned} 0 &= -3 - 3 + C\mathrm{e} \\ C &= \frac{6}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

が分かりますから、この初期値問題の解は

$$y = -3x - 3 + 6\mathrm{e}^{x-1}$$

です。

(4) 両辺に $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ を掛ければ

$$\begin{aligned} y' + xy &= (x+2)\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y' + x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y &= (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x} \\ \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y\right)' &= (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x} \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y &= \int (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x}dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x} + C \\ y &= \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

が得られます。

また、初期条件によれば

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + C \\ C &= 2 \end{aligned}$$

ですから、求める初期値問題の解は

$$y = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

です。

(5)

$$\begin{aligned} xy' + y &= 4x^3 - 2x \\ (xy)' &= 4x^3 - 2x \\ xy &= \int (4x^3 - 2x)dx \\ &= x^4 - x^2 + C \\ y &= x^3 - x + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

また初期条件から

$$2 = -1 + 1 - C$$

すなわち $C = -2$ が得られますから、初期値問題の解は

$$y = x^3 - x - \frac{2}{x}$$

です。

(6)

$$\begin{aligned} (x^2-4)y' + 2xy &= x^3 - 4x \\ \left\{(x^2-4)y\right\}' &= x^3 - 4x \\ (x^2-4)y &= \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + C \\ y &= \frac{\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + C}{x^2-4} \end{aligned}$$

初期条件によれば

$$1 = \frac{C}{-4}$$

から $C = -4$ が分かります。従って初期値問題の解は

$$y = \frac{\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 4}{x^2-4}$$

です。 □