

9 偏微分・完全微分型微分方程式

目標
C1. 偏導関数の定義を知っている
C2. 完全微分型微分方程式とはどんなものか知っている
B1. いろいろな関数の偏導関数が求められる 演習問題 10.1、10.2、10.3
B2. 微分方程式が完全微分型であるか判定できる 演習問題 10.4、10.5
A1. 完全微分型方程式のポテンシャル関数を求められる 演習問題 10.4、10.5

9.1 偏微分

9.1.1 関数の合成とその微分

2変数関数 $f(x, y)$ と2つの1変数関数 $g(t), h(t)$ があった時に、 $x = g(t), y = h(t)$ と云う関係式を使って合成関数 $k(t) = f(g(t), h(t))$ が得られます。このとき

$$\begin{aligned} \frac{k(t+p) - k(t)}{p} &= \frac{f(g(t+p), h(t+p)) - f(g(t), h(t))}{p} \\ &= \frac{f(g(t+p), h(t+p)) - f(g(t), h(t+p))}{p} \\ &\quad + \frac{f(g(t), h(t+p)) - f(g(t), h(t))}{p} \\ &= \frac{f(g(t+p), h(t+p)) - f(g(t), h(t+p))}{g(t+p) - g(t)} \cdot \frac{g(t+p) - g(t)}{p} \\ &\quad + \frac{f(g(t), h(t+p)) - f(g(t), h(t))}{h(t+p) - h(t)} \cdot \frac{h(t+p) - h(t)}{p} \end{aligned}$$

となりますが、ここで

$$F(x) = f(x, h(t+p)), \quad G(y) = f(g(t), y)$$

として、更に

$$g(t+p) = A, \quad g(t) = B, \quad h(t+p) = C, \quad h(t) = D$$

と置けば、これは

$$\frac{k(t+p) - k(t)}{p} = \frac{F(A) - F(B)}{A - B} \cdot \frac{g(t+p) - g(t)}{p} + \frac{G(C) - G(D)}{C - D} \cdot \frac{h(t+p) - h(t)}{p}$$

と書くことができ、平均値の定理によれば

$$\frac{k(t+p) - k(t)}{p} = F'(c) \cdot \frac{g(t+p) - g(t)}{p} + G'(d) \cdot \frac{h(t+p) - h(t)}{p}$$

となる様な c が $g(t)$ と $g(t+p)$ の間に、 d が $h(t)$ と $h(t+p)$ の間にそれぞれ存在します。さて、この $F'(t), G'(t)$ とは何なのでしょう？

9.1.2 偏微分

$F(x)$ は $f(x, y)$ の y 変数のところに $y = h(t+p)$ を代入して x のみを変数と考えた関数です。これが微分可能であれば今見た平均値の定理が成り立つでしょう。

G についても同様で、 $f(x, y)$ の x 変数のところに $x = g(t)$ を代入して y のみの関数と見たものが $G(y)$ であり、これが微分可能であれば平均値の定理が成り立ちます。

そこで2変数関数の『偏微分可能性』と云うものを次のように定めることにします：

定義 9.1.1 2変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して次の極限值が存在するとき：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a}$$

$f(x, y)$ は点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能であると言います。

また、 $f(x, y)$ が点 (a, b) において x に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における x に関する偏微分係数と言って以下の記号で表します：

$$f_x(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で x に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の (D における) x に関する偏導関数 (あるいは偏微分) と言って記号：

$$f_x(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

で表します。また、 x に関する偏導関数を求める事を単に x で偏微分すると言います。

全く同様に y による偏微分可能性も考えます。

定義 9.1.2 2変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して次の極限值が存在するとき：

$$\lim_{w \rightarrow b} \frac{f(a, w) - f(a, b)}{w - b}$$

$f(x, y)$ は点 (a, b) において変数 y に関して偏微分可能であると言います。

また、 $f(x, y)$ が点 (a, b) において y に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における y に関する偏微分係数と言って以下の記号で表します：

$$f_y(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で y に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の (D における) y に関する偏導関数 (あるいは偏微分) と言って記号：

$$f_y(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

で表します。また、 y に関する偏導関数を求める事を単に y で偏微分すると言います。

こうして定義される偏導関数という概念を使えば、先の式は

$$\frac{k(t+p) - k(t)}{p} = f_x(c, h(t+p)) \frac{g(t+p) - g(t)}{p} + f_y(g(t), d) \frac{h(t+p) - h(t)}{p}$$

と書き直され、 $p \rightarrow 0$ において

$$(c, h(t+p)) \rightarrow (g(t), h(t)), \quad (g(t), d) \rightarrow (g(t), h(t))$$

ですから、これらの偏導関数が連続関数 (2変数関数の連続性です) であれば、 $p \rightarrow 0$ のとき

$$k'(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k(t+p) - k(t)}{p} = f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)$$

となることが分かります。

ここで、直観的に言えば “ $f = k, x = g, y = h$ ” なわけですから、この式を

$$f'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

あるいは

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

と書いても悪くないでしょう。

事実 9.1.3 g, h が微分可能、 f が偏微分可能であって、更に f_x, f_y が連続関数であるならば、合成 $k(t) = f(g(t), h(t))$ が定義できる範囲において

$$k'(t) = f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)$$

$$f'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

あるいは以下のようにも書きます：

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) \frac{dg}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) \frac{dh}{dt}(t) \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

9.1.3 実際の計算

事実 9.1.4 $f(x, y)$ が点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能である事は、 $f(x, y)$ において $y = b$ として得られる1変数関数 $f(x, b)$ が点 $x = a$ において微分可能である事と同じ事です。

$f(x, y)$ の変数 x に関する偏導関数は、 $f(x, y)$ において x 以外の変数 (つまり y) を定数だと考え、従って x の1変数関数と思って形式的に x で微分した結果と一致します。

問題 9.1.5 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$(1) z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2$$

$$(2) z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

演習問題 9.1 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = \frac{3x - 4y}{x + 2y} \quad (2) z = x \log \frac{y}{x} \quad (3) z = e^{3x} \sin 2y \quad (4) z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

$$(1) z_x = \frac{3(x + 2y) - (3x - 4y)}{(x + 2y)^2} = \frac{10y}{(x + 2y)^2}$$

$$z_y = \frac{(-4)(x + 2y) - (3x - 4y)2}{(x + 2y)^2} = -\frac{10x}{(x + 2y)^2}$$

$$(2) z_x = \log \frac{y}{x} - 1, \quad z_y = \frac{x}{y}.$$

$$(3) z_x = 3e^{3x} \sin 2y, \quad z_y = 2e^{3x} \cos 2y$$

$$(4) z_x = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad z_y = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

□

演習問題 9.2 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = \frac{x - y}{x + y} \quad (2) z = xy\sqrt{x^2 - y^2} \quad (3) z = \frac{e^x}{x^2 + y^2} \quad (4) z = \log_y x$$

$$(1) z_x = \frac{2y}{(x + y)^2}, \quad z_y = -\frac{2x}{(x + y)^2}.$$

$$(2) z_x = \frac{2x^2y - y^3}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{x^3 - 2xy^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$(3) z_x = \frac{e^x(x^2 - 2x + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z_y = -\frac{2ye^x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(4) z_x = \frac{1}{x \log y}, \quad z_y = -\frac{\log x}{y(\log y)^2}.$$

9.1.4 高階の偏導関数

2変数関数を偏微分した結果もまた2変数関数になっていますから、これを更にもう一度偏微分すると云う事も考えられます。いや、一度なんてけちくさい事は言わず何度でも可能な限り偏微分していい筈です。

そのようにして（もし可能なら、ですが）得られる高階の偏導関数は、普通に考えれば $(f_x)_x, (f_y)_x$ の様には書き表されるわけですが、いちいち括弧をつけるのも面倒ですから括弧を外して f_{xx}, f_{yx} の様に書きます。偏微分を示す添字の順序に注意して下さい。関数 f の近くにある方が先ですよ。 f_{xy} と書いたらまず x で偏微分して、更にもう一度今度は y で偏微分すると云う意味です。この様に、一般に2変数関数の2階（2次）の偏導関数は $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y)$ の4種類あります。

別の記法では

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

などとも書きますが、この場合も関数に近い方が先です。従って後者はまず y で偏微分して次に x で偏微分すると云う事を示しています。

問題 9.1.6 次の各関数の第2次偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = e^{3x} \sin 2y$$

$$(1) f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y$$

$$(2) z_{xx} = 9e^{3x} \sin 2y, \quad z_{xy} = 6e^{3x} \cos 2y, \quad z_{yx} = 6e^{3x} \cos 2y, \quad z_{yy} = -4e^{3x} \sin 2y$$

今計算した関数ではいずれも $z_{xy} = z_{yx}$ が成り立っていますが、実は f_{xy}, f_{yx} が存在して連続関数であるならばこれらは等しい事が知られています。そして多くの関数はその条件を満たしており、結果的に言えば先ほど言った様な偏微分の順番に関する複雑さは実は気にしなくて良い事が分かります。

従って特に注意がない場合は f_{xy} と f_{yx} は等しいものと考えて計算して頂いて構いません。

演習問題 9.3 次の各関数の第2次までの偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = (x + y^2)^3 \quad (2) z = x \log(x^2 + y^2)$$

$$(3) z = x \log \frac{y}{x} \quad (4) z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

(1)

$$z_x = 3(x + y^2)^2, \quad z_y = 6y(x + y^2)^2, \\ z_{xx} = 6(x + y^2), \quad z_{xy} = z_{yx} = 12y(x + y^2), \quad z_{yy} = 6(x + y^2)(x + 5y^2).$$

(2)

$$z_x = \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \\ z_{xx} = \frac{2x(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z_{yy} = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(3)

$$z_x = \log \frac{y}{x} - 1, \quad z_y = \frac{x}{y}, \\ z_{xx} = -\frac{1}{x}, \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{1}{y}, \quad z_{yy} = -\frac{x}{y^2}$$

(4)

$$z_x = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad z_y = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} \\ z_{xx} = \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}^3}, \quad z_{xy} = z_{yx} = -\frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}^3}, \quad z_{yy} = \frac{2xy^2 - x^3}{y^2\sqrt{y^2 - x^2}^3}$$

□

9.2 完全微分型

ある2変数関数を使って $U(x, y(x))$ の形で表される x の関数があったとき、 x で微分すれば

$$U'(x, y(x)) = U_x(x, y(x)) + U_y(x, y(x))y'(x)$$

という形になります。従って、もしも

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \quad (9.1)$$

という微分方程式があって、

$$U_x(x, y) = P(x, y), \quad U_y(x, y) = Q(x, y)$$

となるような2変数関数 $U(x, y)$ が存在するのであれば、この微分方程式は

$$U'(x, y(x)) = 0$$

と変形され、解は

$$U(x, y(x)) = C$$

であることが分かります。このようなタイプの微分方程式を完全微分型と言い、 $U(x, y)$ をポテンシャル関数と言うことがあります。

また微分方程式 (9.1) は分母を払って

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

の形で書かれることもあります。

微分方程式 $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ が完全微分型であって、 P, Q が偏微分可能で偏導関数が連続である場合は、

$$P_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}U_x(x, y) = U_{xy}(x, y) \\ Q_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}U_y(x, y) = U_{yx}(x, y)$$

から

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y)$$

が成り立っていることが分かります。

逆にこの関係が成り立っていれば、 $U_x = P, U_y = Q$ となる U を求めることが出来て、完全微分型であることが分かります。

問題 9.2.1 次の完全微分型微分方程式のポテンシャル関数 $U(x, y)$ を求めてください：

$$2x - 3y - 1 + (2y - 3x + 4)y' = 0$$

$U_x = 2x - 3y - 1$ ですから、

$$U = x^2 - 3yx - x + C(y)$$

と置けます。更に $U_y = 2y - 3x + 4$ なので

$$2y - 3x + 4 = -3x + C'(y)$$

$$2y + 4 = C'(y)$$

$$C(y) = y^2 + 4y + D$$

ですから、

$$U(x, y) = x^2 - 3xy - x + y^2 + 4y$$

が見つかります（定数はつけなくて良い）。□

演習問題 9.4 次の1階微分方程式が完全微分型であるかどうか判定してください。また完全微分型である場合は、ポテンシャル関数を求めてください。

$$(1) 4x^2 - xy^2 + 1 + (3 - x^2y)y' = 0 \quad (2) \sin(xy) + \sin(xy)y' = 0$$

(1)

$$(4x^2 - xy^2 + 1)_y = -2xy, \quad (3 - x^2y)_x = -2xy$$

従ってこれは完全微分型です。

$U = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + C(y)$ と置けば、

$$U_y = \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + C(y) \right)_y$$

$$3 - x^2y = -x^2y + C'(y)$$

$$C'(y) = 3$$

$$C(y) = 3y + D$$

従って

$$U(x, y) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + 3y$$

です。

(2)

$$\{\sin(xy)\}_y = \cos(xy)x, \quad \{\sin(xy)\}_x = \cos(xy)y$$

従ってこれは完全微分型ではありません。□

9.3 問題演習

演習問題 9.5 次の1階微分方程式が完全微分型であるかどうか判定してください。また完全微分型である場合は、ポテンシャル関数を求めてください。

$$(1) 2x + y + 5 + (x - 2y + 6)y' = 0 \quad (2) 3x + 4y + 1 + (4x + 2y^2 - 1)y' = 0$$

$$(3) (\cos x \sin y)dx + (\sin x \cos y)dy = 0 \quad (4) e^{3x+y} + e^{3y-x}y' = 0$$

$$(5) y - \frac{1}{x^2} + xy' = 0 \quad (6) (\cos x + \sin y)dx + (e^y - x \cos y)dy = 0$$

(1)

$$(2x + y + 5)_y = 1, \quad (x - 2y + 6)_x = 1$$

従ってこれは完全微分型です。 $U = x^2 + xy + 5x + C(y)$ と置けば

$$U_y = x + C'(y)$$

$$x - 2y + 6 = x + C'(y)$$

$$C'(y) = -2y + 6$$

$$C(y) = -y^2 + 6y + D$$

です。従ってポテンシャル関数は

$$U(x, y) = x^2 + xy + 5x - y^2 + 6y$$

です。

(2)

$$(3x + 4y + 1)_y = 4, \quad (4x + 2y^2 - 1)_x = 4$$

ですからこれは完全微分型です。ポテンシャルを $U = \frac{3}{2}x^2 + 4xy + x + C(y)$ と置けば

$$C'(y) = D$$

$$U_y = 4x + C'(y)$$

$$4x + 2y^2 - 1 = 4x + C'(y)$$

$$C'(y) = 2y^2 - 1$$

$$C(y) = \frac{2}{3}y^3 - y + D$$

です。従って

$$U(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 4xy + x + \frac{2}{3}y^3 - y$$

です。

(3)

$$(\cos x \sin y)_y = \cos x \cos y, \quad (\sin x \cos y)_x = \cos x \cos y$$

ですからこれは完全微分型です。ポテンシャルを $U = \sin x \sin y + C(y)$ と置けば

$$\sin x \cos y = \sin x \cos y + C'(y)$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = D$$

ですから、

$$U(x, y) = \sin x \sin y$$

です。

(4)

$$(e^{3x+y})_y = e^{3x+y}, \quad (e^{3y-x})_x = -e^{3y-x}$$

したがってこれは完全微分型ではありません。

(5)

$$\left(y - \frac{1}{x^2}\right)_y = 1, \quad (x)_x = 1$$

ですからこれは完全微分型です。ポテンシャルを $U = xy + \frac{1}{x} + C(y)$ と置けば

$$U_y = x + C'(y)$$

$$x = x + C'(y)$$

となりますから、ポテンシャルは

$$U(x, y) = xy + \frac{1}{x}$$

です。

(6)

$$(\cos x + \sin y)_y = \cos y, \quad (e^y - x \cos y)_x = -\cos y$$

ですからこれは完全微分型ではありません。

□