

9 偏微分・完全微分型微分方程式

全く同様に y による偏微分可能性も考えます。

事実 9.1.2 g, h が微分可能、 f が偏微分可能であって、更に f_x, f_y が連続関数であるならば、合成 $k(t) = f(g(t), h(t))$ が定義できる範囲において

$$k'(t) = f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)$$

$$f'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

あるいは以下のようにも書きます：

$$\frac{dk}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) \frac{dg}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) \frac{dh}{dt}(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

9.1 偏微分

定義 9.1.1 2変数関数 $f(x, y)$ と点 (a, b) に対して次の極限值が存在するとき：

$$\lim_{v \rightarrow a} \frac{f(v, b) - f(a, b)}{v - a}$$

$f(x, y)$ は点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能であると言います。

また、 $f(x, y)$ が点 (a, b) において x に関して偏微分可能である時、上記のように存在する極限値を $f(x, y)$ の点 (a, b) における x に関する偏微分係数と言って以下の記号で表します：

$$f_x(a, b), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(a, b)}.$$

更に関数 $f(x, y)$ が平面内の領域 D の各点で x に関して偏微分可能であるとき、 D の各点にその点での偏微分係数を対応させて得られる関数を $f(x, y)$ の (D における) x に関する偏導関数 (あるいは偏微分) と言って記号：

$$f_x(x, y), \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

で表します。また、 x に関する偏導関数を求める事を単に x で偏微分すると言います。

9.1.1 実際の計算

事実 9.1.3 $f(x, y)$ が点 (a, b) において変数 x に関して偏微分可能である事は、 $f(x, y)$ において $y = b$ として得られる1変数関数 $f(x, b)$ が点 $x = a$ において微分可能である事と同じ事です。

$f(x, y)$ の変数 x に関する偏導関数は、 $f(x, y)$ において x 以外の変数 (つまり y) を定数だと考え、従って x の1変数関数と思って形式的に x で微分した結果と一致します。

問題 9.1.4 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$(1) z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2$$

(2)

$$z_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

演習問題 9.1 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = \frac{3x - 4y}{x + 2y} \quad (2) z = x \log \frac{y}{x} \quad (3) z = e^{3x} \sin 2y \quad (4) z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

演習問題 9.2 次の各関数を偏微分して下さい。

$$(1) z = \frac{x - y}{x + y} \quad (2) z = xy\sqrt{x^2 - y^2} \quad (3) z = \frac{e^x}{x^2 + y^2} \quad (4) z = \log_y x$$

9.1.2 高階の偏導関数

一般に2変数関数の2階(2次)の偏導関数は $f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y)$ の4種類あります。

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

問題 9.1.5 次の各関数の第2次偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = x^3 - 3xy + y^3 \quad (2) z = e^{3x} \sin 2y$$

$$(1) f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yx} = -3, \quad f_{yy} = 6y$$

$$(2) z_{xx} = 9e^{3x} \sin 2y, \quad z_{xy} = 6e^{3x} \cos 2y, \quad z_{yx} = 6e^{3x} \cos 2y, \quad z_{yy} = -4e^{3x} \sin 2y$$

f_{xy}, f_{yx} が存在して連続関数であるならばこれらは等しい事が知られています。

演習問題 9.3 次の各関数の第2次までの偏導関数を求めて下さい。

$$(1) z = (x + y^2)^3 \quad (2) z = x \log(x^2 + y^2)$$

$$(3) z = x \log \frac{y}{x} \quad (4) z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

9.2 完全微分型

ある2変数関数を使って $U(x, y(x))$ の形で表される x の関数があったとき、 x で微分すれば

$$U'(x, y(x)) = U_x(x, y(x)) + U_y(x, y(x))y'(x)$$

という形になります。従って、もしも

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \quad (9.1)$$

という微分方程式があって、

$$U_x(x, y) = P(x, y), \quad U_y(x, y) = Q(x, y)$$

となるような2変数関数 $U(x, y)$ が存在するのであれば、この微分方程式は

$$U'(x, y(x)) = 0$$

と変形され、解は

$$U(x, y(x)) = C$$

であることが分かります。このようなタイプの微分方程式を完全微分型と言い、 $U(x, y)$ をポテンシャル関数と言うことがあります。

また微分方程式 (9.1) は分母を払って

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

の形で書かれることもあります。

微分方程式 $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ が完全微分型であって、 P, Q が偏微分可能で偏導関数が連続である場合は、

$$P_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} U_x(x, y) = U_{xy}(x, y)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} U_y(x, y) = U_{yx}(x, y)$$

から

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y)$$

が成り立っていることが分かります。

逆にこの関係が成り立っていれば、 $U_x = P, U_y = Q$ となる U を求めることが出来て、完全微分型であることが分かります。

問題 9.2.1 次の完全微分型微分方程式のポテンシャル関数 $U(x, y)$ を求めてください：

$$2x - 3y - 1 + (2y - 3x + 4)y' = 0$$

$U_x = 2x - 3y - 1$ ですから、

$$U = x^2 - 3yx - x + C(y)$$

と置けます。更に $U_y = 2y - 3x + 4$ なので

$$2y - 3x + 4 = -3x + C'(y)$$

$$2y + 4 = C'(y)$$

$$C(y) = y^2 + 4y + D$$

ですから、

$$U(x, y) = x^2 - 3xy - x + y^2 + 4y$$

が見つかります（定数はつけなくて良い）。□

演習問題 9.4 次の1階微分方程式が完全微分型であるかどうか判定してください。
また完全微分型である場合は、ポテンシャル関数を求めてください。

$$(1) 4x^2 - xy^2 + 1 + (3 - x^2y)y' = 0 \quad (2) \sin(xy) + \sin(xy)y' = 0$$

9.3 問題演習

演習問題 9.5 次の1階微分方程式が完全微分型であるかどうか判定してください。
また完全微分型である場合は、ポテンシャル関数を求めてください。

$$(1) 2x + y + 5 + (x - 2y + 6)y' = 0 \quad (2) 3x + 4y + 1 + (4x + 2y^2 - 1)y' = 0$$

$$(3) (\cos x \sin y)dx + (\sin x \cos y)dy = 0 \quad (4) e^{3x+y} + e^{3y-x}y' = 0$$

$$(5) y - \frac{1}{x^2} + xy' = 0 \quad (6) (\cos x + \sin y)dx + (e^y - x \cos y)dy = 0$$