

10 完全微分型微分方程式 その2 積分因子

目標
C1. 完全微分型方程式の一般解の求め方を知っている
B1. 完全微分型方程式の一般解が求められる 演習問題 10.1、10.2、10.3、10.5
A1. ヒントを元に積分因子を求めて一般解を求めることが出来る 演習問題 10.4、10.6、10.7、10.8

10.1 完全微分型微分方程式の一般解

定義 10.1.1 微分方程式

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

は、

$$U_x(x, y) = P(x, y), \quad U_y(x, y) = Q(x, y)$$

となるような2変数関数 $U(x, y)$ が存在するとき、完全微分型であると言い、 $U(x, y)$ をポテンシャル関数と言います。

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

が完全微分型であって $U(x, y)$ がポテンシャルである場合、微分方程式は

$$\frac{d}{dx}U(x, y(x)) = 0$$

と変形されますから、

$$U(x, y) = C$$

は解であり、任意定数を1個含みますからこれは一般解です。

10.1.1 ポテンシャルの求め方 その2

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

が完全微分型であって $U(x, y)$ がポテンシャルである場合、(積分が定義される範囲の) 任意の a, b に対して

$$\int_a^x P(t, y)dt = \int_a^x U_x(t, y)dt = U(x, y) - U(a, y)$$

であり、また

$$\int_b^y Q(a, t)dt = \int_b^y U_y(a, t)dt = U(a, y) - U(a, b)$$

でもありますから、

$$U(x, y) = \int_a^x P(t, y)dt + \int_b^y Q(a, t)dt + U(a, b)$$

となっていることが分かります。従って一般解は

$$\int_a^x P(t, y)dt + \int_b^y Q(a, t)dt = C$$

と書くことが出来ます。 a, b は何でも良いのですが、大抵は0にしておいて、0の近くでの積分が発散するような場合は1などに変更すれば良いでしょう。

問題 10.1.2 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + xy^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x^2y \right) y' = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{t}{t^2 + y^2} + ty^2 \right) dt &= \left[\frac{1}{2} \log |t^2 + y^2| + \frac{1}{2} t^2 y^2 \right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \log y^2 + \frac{1}{2} x^2 y^2 \end{aligned}$$

$$\int_1^y \frac{1}{t} dt = [\log |t|]_1^y = \log |y|$$

ですから、一般解は

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} x^2 y^2 = C$$

です。

□

演習問題 10.1 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$\log y + \frac{1}{x^2} + \left(\frac{x}{y} + 4y\right)y' = 0$$

$x = 0, y = 0$ のところは発散しているので $x = 1, y = 1$ のところを使うことにしましょう。

$$\int_1^x \left(\log y + \frac{1}{t^2}\right) dt = \left[(\log y)t - \frac{1}{t}\right]_1^x = (x-1)\log y - \frac{1}{x} + 1$$

$$\int_1^y \left(\frac{1}{t} + 4t\right) dt = [\log t + 2t^2]_1^y = \log y + 2y^2 - 2$$

従って一般解は

$$x \log y - \frac{1}{x} + 2y^2 = C$$

です。

□

10.1.2 ポテンシャルの求め方 その3

問題 10.1.3 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(\cos x - \sin y)dx + (e^y - x \cos y)dy = 0$$

これが何の微分なのかを最初の方から予想していくと

$$\begin{aligned} & \cos x - \sin y + (e^y - x \cos y)y' \\ &= (\sin x - x \sin y)' + \underbrace{(x \cos y)y'}_{\text{帳尻合わせ}} + (e^y - x \cos y)y' \\ &= (\sin x - x \sin y)' + e^y y' \\ &= (\sin x - x \sin y + e^y)' \end{aligned}$$

ですから一般解は

$$\sin x - x \sin y + e^y = C$$

です。

あるいは、慣れてくれば最初の形のままで良いでしょう：

$$\begin{aligned} & (\cos x - \sin y)dx + (e^y - x \cos y)dy \\ &= d(\sin x - x \sin y) + x \cos y dy + d(e^y - x \cos y)dy \\ &= d(\sin x - x \sin y + e^y) \end{aligned}$$

その2の解法も参考まで：

$$\int_0^x (\cos t - \sin y)dt = [\sin t - t \sin y]_0^x = \sin x - x \sin y$$

$$\int_0^y e^t dt = e^y - 1$$

ですから一般解は

$$\sin x - x \sin y + e^y = C$$

です。

□

演習問題 10.2 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(1) (3x+4y)dx + (4x-5y)dy = 0 \quad (2) (y^2 e^x + x e^{-y})dx + (2y e^x - \frac{1}{2} x^2 e^{-y})dy = 0$$

(1)

$$\begin{aligned} (3x+4y)dx + (4x-5y)dy &= d\left(\frac{3}{2}x^2 + 4xy\right) - 4x dy + (4x-5y)dy \\ &= d\left(\frac{3}{2}x^2 + 4xy\right) - 5y dy \\ &= d\left(\frac{3}{2}x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2\right) \end{aligned}$$

ですから求める一般解は

$$\frac{3}{2}x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2 = C$$

です。

(2)

$$\begin{aligned}
 & (y^2 e^x + x e^{-y}) dx + \left(2y e^x - \frac{1}{2} x^2 e^{-y} \right) dy \\
 &= d \left(y^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^{-y} \right) - 2y e^x dy + \frac{1}{2} x^2 e^{-y} dy + \left(2y e^x - \frac{1}{2} x^2 e^{-y} \right) dy \\
 &= d \left(y^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^{-y} \right)
 \end{aligned}$$

ですから一般解は

$$y^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^{-y} = C$$

です。

□

演習問題 10.3 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(1) \ x + y + 1 + (x - y^2 + 3)y' = 0$$

$$(2) \ y \cos x + \cos x + \sin y + (x \cos y + \cos y + \sin x)y' = 0$$

(1) 【その 2 の解法】

$$\begin{aligned}
 \int_0^x (t + y + 1) dt &= \left[\frac{1}{2} t^2 + (y + 1)t \right]_0^x = \frac{1}{2} x^2 + (y + 1)x \\
 \int_0^y (-t^2 + 3) dt &= \left[-\frac{1}{3} t^3 + 3t \right]_0^y = -\frac{1}{3} y^3 + 3y
 \end{aligned}$$

ですから、一般解は

$$\frac{1}{2} x^2 + (y + 1)x - \frac{1}{3} y^3 + 3y = C$$

です。

【その 3 の解法】

$$\begin{aligned}
 x + y + 1 + (x - y^2 + 3)y' &= \left(\frac{1}{2} x^2 + xy + x \right)' - xy' + (x - y^2 + 3)y' \\
 &= \left(\frac{1}{2} x^2 + xy + x \right)' + (-y^2 + 3)y' \\
 &= \left(\frac{1}{2} x^2 + xy + x \right)' + \left(-\frac{1}{3} y^3 + 3y \right)'
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 + xy - \frac{1}{3} y^3 + x + 3y \right)'$$

従って一般解は

$$\frac{1}{2} x^2 + xy - \frac{1}{3} y^3 + x + 3y = C$$

です。

(2) 【その 2 の解法】

$$\int_0^x (y \cos t + \cos t + \sin y) dt = [y \sin t + \sin t + t \sin y]_0^x = y \sin x + \sin x + x \sin y$$

$$\int_0^y \cos t dt = [\sin t]_0^y = \sin y$$

従って一般解は

$$(1 + y) \sin x + (1 + x) \sin y = C$$

です。

【その 3 の解法】

$$\begin{aligned}
 & y \cos x + \cos x + \sin y + (x \cos y + \cos y + \sin x)y' \\
 &= (y \sin x + \sin x + x \sin y)' - (\sin x)y' - (x \cos y)y' + (x \cos y + \cos y + \sin x)y' \\
 &= (y \sin x + \sin x + x \sin y)' + (\cos y)y' \\
 &= (y \sin x + \sin x + x \sin y + \sin y)'
 \end{aligned}$$

従って一般解は

$$(1 + y) \sin x + (1 + x) \sin y = C$$

です。

□

10.2 積分因子

1 階の微分方程式

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

が完全微分型でない場合でも、ある関数 $M(x, y)$ を掛けた

$$M(x, y)P(x, y) + M(x, y)Q(x, y)y' = 0$$

は完全微分型になることがあります。このような関数 $M(x, y)$ を積分因子 (integrating factor) と言います。

積分因子は 2 変数の場合には必ず存在することが知られています (Carathéodory の定理) が、実際にそれを求めるのは簡単ではありません。

ここでは積分因子に関する何らかの情報が与えられている場合を考えましょう。

問題 10.2.1 1 階微分方程式：

$$10x^3y - 2y^2 + (4x^4 - 3xy)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = x^m y^n$ の形であることが分かっています。

- (1) 積分因子 $M(x, y)$ を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

(1)

$$P(x, y) = x^m y^n (10x^3y - 2y^2) = 10x^{m+3}y^{n+1} - 2x^m y^{n+2}$$

$$Q(x, y) = x^m y^n (4x^4 - 3xy) = 4x^{m+4}y^n - 3x^{m+1}y^{n+1}$$

と置きます。

$$P_y = 10(n+1)x^{m+3}y^n - 2(n+2)x^m y^{n+1}$$

$$Q_x = 4(m+4)x^{m+3}y^n - 3(m+1)x^m y^{n+1}$$

ですから、 $P_y = Q_x$ となるためには連立方程式：

$$\begin{cases} 10(n+1) = 4(m+4) \\ 2(n+2) = 3(m+1) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 10n - 4m = 6 \\ 2n - 3m = -1 \end{cases}$$

が成り立てば良く、 $m = n = 1$ です。

従って元の方程式は

$$10x^4y^2 - 2xy^3 + (4x^5y - 3x^2y^2)y' = 0$$

と変形されます。

$$\int_0^x (10t^4y^2 - 2ty^3)dt = [2t^5y^2 - t^2y^3]_0^x = 2x^5y^2 - x^2y^3$$

$$\int_0^y 0dt = 0$$

従って一般解は

$$2x^5y^2 - x^2y^3 = C$$

です。

演習問題 10.4 1 階微分方程式：

$$xy + y + (xy - x)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = x^m y^n$ の形であることが分かっています。

- (1) 積分因子 $M(x, y)$ を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

(1)

$$P(x, y) = x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+1}$$

$$Q(x, y) = x^{m+1}y^{n+1} - x^{m+1}y^n$$

と置けば、

$$P_y = (n+1)x^{m+1}y^n + (n+1)x^m y^n$$

$$Q_x = (m+1)x^m y^{n+1} - (m+1)x^m y^n$$

ですから、 $m = n = -1$ であれば $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ は完全微分型です。従って求める積分因子は

$$M(x, y) = \frac{1}{xy}$$

です。

(2)

$$\int_1^x \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = [t + \log |t|]_1^x = x - 1 + \log |x|$$

$$\int_1^y \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = [t - \log |t|]_1^y = y - 1 - \log |y|$$

従って一般解は

$$x + y + \log \left| \frac{x}{y} \right| = C$$

です。

□

10.3 問題演習

演習問題 10.5 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(1) \quad 2x - 3y - 1 + (2y - 3x + 4)y' = 0$$

$$(2) \quad (4x^2 - xy^2 + 1)dx + (3 - x^2y)dy = 0 \quad (3) \quad y + \frac{1}{x^2} + xy' = 0$$

(1)

$$\int_0^x (2t - 3y - 1)dt = [t^2 - 3yt - t]_0^x = x^2 - 3xy - x$$

$$\int_0^y (2t + 4)dt = [t^2 + 4t]_0^y = y^2 + 4y$$

ですから一般解は

$$x^2 - 3xy - x + y^2 + 4y = C$$

です。

【別解】

$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 3y - 1 + (2y - 3x + 4)y' \\ &= (x^2 - 3xy - x)' + 3xy' + (2y - 3x + 4)y' \\ &= (x^2 - 3xy - x)' + (2y + 4)y' \\ &= (x^2 - 3xy - x + y^2 + 4y)' \end{aligned}$$

ですから一般解は

$$x^2 - 3xy - x + y^2 + 4y = C$$

です。

(2)

$$\int_0^x (4t^2 - ty^2 + 1)dt = \left[\frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2y^2 + t \right]_0^x = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x$$

$$\int_0^y 3dt = 3y$$

ですから、一般解は

$$\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + 3y = C$$

です。

【別解】

$$\begin{aligned} 0 &= (4x^2 - xy^2 + 1)dx + (3 - x^2y)dy \\ &= \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x \right) dx + x^2y dy + (3 - x^2y)dy \\ &= \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x \right) dx + 3dy \\ &= d \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + 3y \right) \end{aligned}$$

ですから、一般解は

$$\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + 3y = C$$

です。

(3)

$$\int_1^x \left(y + \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[yt - \frac{1}{t} \right]_1^x = xy - \frac{1}{x} - y + 1$$

$$\int_0^y 1dt = y$$

ですから一般解は

$$xy - \frac{1}{x} = C$$

です。

【別解】

$$0 = y + \frac{1}{x^2} + xy' = \left(xy - \frac{1}{x}\right)' - xy' + xy' = \left(xy - \frac{1}{x}\right)'$$

ですから一般解は

$$xy - \frac{1}{x} = C$$

です。

□

演習問題 10.6 1 階微分方程式：

$$4xy + 3y^3 + (3xy^2 + x^2)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = N(x)$ の形であることが分かっています。

- (1) 積分因子 $N(x)$ を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

(1)

$$P(x, y) = N(x)(4xy + 3y^3)$$

$$Q(x, y) = N(x)(3xy^2 + x^2)$$

と置きます。

$$P_y = N(x)(4x + 9y^2)$$

$$Q_x = N'(x)(3xy^2 + x^2) + N(x)(3y^2 + 2x)$$

ですから、 $P_y = Q_x$ となる条件は

$$N(x)(4x + 9y^2) = N'(x)(3xy^2 + x^2) + N(x)(3y^2 + 2x)$$

$$0 = N'(x)(3xy^2 + x^2) - N(x)(6y^2 + 2x)$$

$$= (3y^2 + x) \{xN'(x) - 2N(x)\}$$

であり、少なくとも

$$xN'(x) - 2N(x) = 0$$

であれば条件を満たします。両辺を x^3 で割れば（これも積分因子ですね！）

$$\frac{1}{x^2}N'(x) - \frac{2}{x^3}N(x) = 0$$

$$\left\{\frac{1}{x^2}N(x)\right\}' = 0$$

$$N(x) = Cx^2$$

を得ますので、 $N(x) = x^2$ が積分因子となります。

(2) $P = 4x^3y + 3x^2y^3$, $Q = 3x^3y^2 + x^4$ ですから、

$$\int_0^x (4t^3y + 3t^2y^3)dt = [t^4y + t^3y^3]_0^x = x^4y + x^3y^3$$

$$\int_0^y 0dt = 0$$

により、一般解は

$$x^4y + x^3y^3 = C$$

です。

□

演習問題 10.7 1 階微分方程式：

$$3xy^2 + 2y + (2x^2y + x)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = x^n$ の形であることが分かっています。

- (1) n を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

(1)

$$P(x, y) = x^n(3xy^2 + 2y) = 3x^{n+1}y^2 + 2x^ny$$

$$Q(x, y) = x^n(2x^2y + x) = 2x^{n+2}y + x^{n+1}$$

と置けば、

$$\begin{aligned}P_y &= 6x^{n+1}y + 2x^n \\Q_x &= 2(n+2)x^{n+1}y + (n+1)x^n\end{aligned}$$

であり、完全微分型である、すなわち $P_y = Q_x$ であるためには $n = 1$ であれば良いことが分かります。

(2) そこで元の微分方程式の両辺に x を掛ければ

$$\begin{aligned}3x^2y^2 + 2xy + (2x^3y + x^2)y' &= (x^3y^2 + x^2y)' - 2x^3yy' - x^2y' + (2x^3y + x^2)y' \\&= (x^3y^2 + x^2y)'\end{aligned}$$

が得られ、一般解は

$$x^3y^2 + x^2y = C$$

です。

(2) 両辺に y^{-2} を掛ければ、方程式は

$$2\frac{x}{y} + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)y' = 0$$

となります。すると

$$2\frac{x}{y} + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)y' = \left(\frac{x^2}{y}\right)' + \frac{x^2}{y^2}y' + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)y' = \left(\frac{x^2}{y}\right)' + y' = \left(\frac{x^2}{y} + y\right)'$$

ですから一般解は

$$\frac{x^2}{y} + y = C$$

です。

□

演習問題 10.8 1 階微分方程式：

$$2xy + (y^2 - x^2)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = y^n$ の形であることが分かっています。

- (1) n を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

(1)

$$\begin{aligned}P(x, y) &= y^n(2xy) = 2xy^{n+1} \\Q(x, y) &= y^n(y^2 - x^2) = y^{n+2} - x^2y^n\end{aligned}$$

と置けば、

$$\begin{aligned}P_y &= 2(n+1)xy^n \\Q_x &= -2xy^n\end{aligned}$$

であり、 $P_y = Q_x$ となるのは $n = -2$ のときです。