10 完全微分型微分方程式 その2 積分因子

目標
C1. 完全微分型方程式の一般解の求め方を知っている
B1. 完全微分型方程式の一般解が求められる 演習問題 10.1、10.2、10.4、10.5
A1. ヒントを元に積分因子を求めて一般解を求めることが出来る 演習問題 10.3、10.6、10.7、10.8

10.1 完全微分型微分方程式の一般解

定義 10.1.1 微分方程式

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

は、

$$U_x(x, y) = P(x, y), \quad U_y(x, y) = Q(x, y)$$

となるような $U(x, y)$ が存在するとき、完全微分型であると言い、 $U(x, y)$ をポテンシャル関数と言います。

完全微分型： $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, ポテンシャル： $U(x, y)$

$$\frac{d}{dx}U(x, y(x)) = 0$$

と変形され一般解は $U(x, y) = C$.

10.1.1 ポテンシャルの求め方 その2

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

が完全微分型であって $U(x, y)$ がポテンシャルである場合、(積分が定義される範囲の) 任意の a, b に対して一般解は

$$\int_a^x P(t, y)dt + \int_b^y Q(a, t)dt = C.$$

問題 10.1.2 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + xy^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x^2y\right)y' = 0$$

$$\int_0^x \left(\frac{t}{t^2 + y^2} + ty^2\right) dt = \left[\frac{1}{2} \log |t^2 + y^2| + \frac{1}{2}t^2y^2\right]_0^x = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \log y^2 + \frac{1}{2}x^2y^2$$

$$\int_1^y \frac{1}{t} dt = [\log |t|]_1^y = \log |y|$$

ですから、一般解は $\log \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$ です。 □

演習問題 10.1 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$\log y + \frac{1}{x^2} + \left(\frac{x}{y} + 4y\right)y' = 0$$

10.1.2 ポテンシャルの求め方 その3

問題 10.1.3 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(\cos x - \sin y)dx + (e^y - x \cos y)dy = 0$$

これが何の微分なのかを最初の方から予想していくと

$$\begin{aligned} \cos x - \sin y + (e^y - x \cos y)y' &= (\sin x - x \sin y)' + \underbrace{(x \cos y)y'}_{\text{帳尻合わせ}} + (e^y - x \cos y)y' \\ &= (\sin x - x \sin y)' + e^y y' \\ &= (\sin x - x \sin y + e^y)' \end{aligned}$$

ですから一般解は $\sin x - x \sin y + e^y = C$ です。あるいはこんな風でも良い：

$$\begin{aligned} & (\cos x - \sin y)dx + (e^y - x \cos y)dy \\ &= d(\sin x - x \sin y) + x \cos y dy + d(e^y - x \cos y)dy \\ &= d(\sin x - x \sin y + e^y) \end{aligned}$$

□

演習問題 10.2 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(1) (3x+4y)dx+(4x-5y)dy = 0 \quad (2) (y^2e^x+xe^{-y})dx+(2ye^x - \frac{1}{2}x^2e^{-y}) dy = 0$$

10.2 積分因子

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

が完全微分型でない場合でも、

$$M(x, y)P(x, y) + M(x, y)Q(x, y)y' = 0$$

は完全微分型になることがあります。このような関数 $M(x, y)$ を積分因子と言います。

問題 10.2.1 1階微分方程式：

$$10x^3y - 2y^2 + (4x^4 - 3xy)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = x^m y^n$ の形であることが分かっています。

- (1) 積分因子 $M(x, y)$ を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

(1)

$$\begin{aligned} P(x, y) &= x^m y^n (10x^3y - 2y^2) = 10x^{m+3}y^{n+1} - 2x^m y^{n+2} \\ Q(x, y) &= x^m y^n (4x^4 - 3xy) = 4x^{m+4}y^n - 3x^{m+1}y^{n+1} \end{aligned}$$

と置きます。

$$P_y = 10(n+1)x^{m+3}y^n - 2(n+2)x^m y^{n+1}$$

$$Q_x = 4(m+4)x^{m+3}y^n - 3(m+1)x^m y^{n+1}$$

ですから、 $P_y = Q_x$ となるためには連立方程式：

$$\begin{cases} 10(n+1) = 4(m+4) \\ 2(n+2) = 3(m+1) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 10n - 4m = 6 \\ 2n - 3m = -1 \end{cases}$$

が成り立てば良く、 $m = n = 1$ です。

従って元の方程式は

$$10x^4y^2 - 2xy^3 + (4x^5y - 3x^2y^2)y' = 0$$

と変形され、

$$\begin{aligned} \int_0^x (10t^4y^2 - 2ty^3)dt &= [2t^5y^2 - t^2y^3]_0^x = 2x^5y^2 - x^2y^3 \\ \int_0^y 0dt &= 0 \end{aligned}$$

から一般解は $2x^5y^2 - x^2y^3 = C$ です。

演習問題 10.3 1階微分方程式：

$$xy + y + (xy - x)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = x^m y^n$ の形であることが分かっています。

- (1) 積分因子 $M(x, y)$ を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

10.3 問題演習

演習問題 10.4 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(1) x + y + 1 + (x - y^2 + 3)y' = 0$$

$$(2) y \cos x + \cos x + \sin y + (x \cos y + \cos y + \sin x)y' = 0$$

演習問題 10.5 次の完全微分型方程式の一般解を求めてください。

$$(1) 2x - 3y - 1 + (2y - 3x + 4)y' = 0$$

$$(2) (4x^2 - xy^2 + 1)dx + (3 - x^2y)dy = 0 \quad (3) y + \frac{1}{x^2} + xy' = 0$$

演習問題 10.6 1階微分方程式：

$$4xy + 3y^3 + (3xy^2 + x^2)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = N(x)$ の形であることが分かっています。

- (1) 積分因子 $N(x)$ を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

演習問題 10.7 1階微分方程式：

$$3xy^2 + 2y + (2x^2y + x)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = x^n$ の形であることが分かっています。

- (1) n を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。

演習問題 10.8 1階微分方程式：

$$2xy + (y^2 - x^2)y' = 0$$

の積分因子は $M(x, y) = y^n$ の形であることが分かっています。

- (1) n を求めてください。
- (2) 微分方程式の一般解を求めてください。