

11 Bernoulli 型、Riccati 型

目標
C1. Bernoulli 型方程式の基本解法を知っている C2. Riccati 型方程式の基本解法を知っている
B1. Bernoulli 型方程式の一般解・初期値問題の解が求められる 演習問題 11.1、11.3
B2. 特殊解が与えられたときに Riccati 型方程式の一般解が求められる 演習問題 11.2、11.5、11.6、11.7

11.1 Bernoulli 型

$$P(x)y' + Q(x)y = R(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

の型の方程式を Bernoulli 型方程式と言います。

両辺を y^α で割れば

$$P(x)\frac{y'}{y^\alpha} + Q(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = R(x)$$

であり、 $\frac{1}{y^{\alpha-1}} = z$ と置けば

$$z' = -(\alpha - 1)\frac{y'}{y^\alpha}$$

ですから元の方程式は

$$\frac{P(x)}{1-\alpha}z' + Q(x)z = R(x)$$

となって z に関する 1 階線形微分方程式に帰着されます。

問題 11.1.1 次の Bernoulli 型の方程式の一般解を求めてください。

$$(1) y' - 2y = e^{5x}y^4 \quad (2) xy' + y = x\sqrt{y}$$

(1) 両辺を y^4 で割れば

$$\frac{1}{y^4}y' - 2\frac{1}{y^3} = e^{5x}$$

であり、 $\frac{1}{y^3} = z$ とおけば

$$z' = -3\frac{1}{y^4}$$

であって

$$-\frac{1}{3}z' - 2z = e^{5x}$$

$$z' + 6z = -3e^{5x}$$

です。対応する z の同次方程式： $z' + 6z = 0$ の一般解は $z = Ce^{-6x}$ です。また z の非同次方程式が $z = ke^{5x}$ の型の解をもつと仮定すれば

$$5ke^{5x} + 6ke^{5x} = -3e^{5x}$$

$$11k = -3$$

$$k = -\frac{3}{11}$$

ですから、 $z = -\frac{3}{11}e^{5x}$ は 1 つの解です。

従って z の非同次方程式の一般解は

$$z = -\frac{3}{11}e^{5x} + Ce^{-6x}$$

です。 $z = \frac{1}{y^3}$ でしたから、

$$\frac{1}{y^3} = -\frac{3}{11}e^{5x} + Ce^{-6x}$$

が元の方程式の一般解です。

(2) 両辺を $\sqrt{y}$ で割れば

$$\frac{x}{\sqrt{y}}y' + \sqrt{y} = x$$

$$\frac{2x}{2\sqrt{y}}y' + \sqrt{y} = x$$

$$2x(\sqrt{y})' + \sqrt{y} = x$$

ここで $x > 0$ のときは

$$\sqrt{x}(\sqrt{y})' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

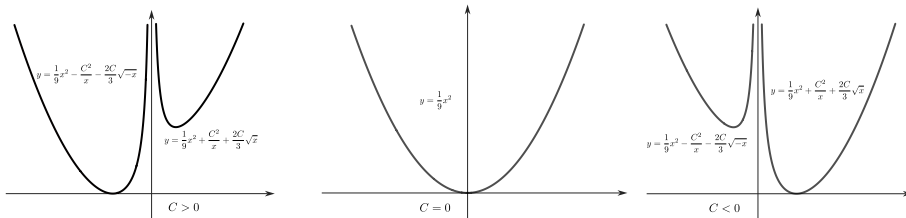
$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x}\sqrt{y})' &= \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
 \sqrt{x}\sqrt{y} &= \int \frac{1}{2}\sqrt{x}dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C \\
 \sqrt{y} &= \frac{1}{3}x + \frac{C}{\sqrt{x}} \quad (x > 0) \\
 y &= \frac{1}{9}x^2 + \frac{C^2}{x} + \frac{2C}{3}\sqrt{x} \quad (x > 0)
 \end{aligned}$$

となり、 $x < 0$ のときは

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{-x}(\sqrt{y})' + \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sqrt{y} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-x} \\
 \sqrt{-x}(\sqrt{y})' - \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sqrt{y} &= \frac{1}{2}\sqrt{-x} \\
 (\sqrt{-x}\sqrt{y})' &= \frac{1}{2}\sqrt{-x} \\
 \sqrt{-x}\sqrt{y} &= \int \frac{1}{2}\sqrt{-x}dx \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{-x}^3 + C \\
 \sqrt{y} &= \frac{1}{3}x + \frac{C}{\sqrt{-x}} \quad (x < 0) \\
 y &= \frac{1}{9}x^2 - \frac{C^2}{x} - \frac{2C}{3}\sqrt{-x} \quad (x < 0)
 \end{aligned}$$

が得られます。

□



問題 11.1.2 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y' - 2y = e^{5x}y^4$, $y(0) = 2$ (2) $xy' + y = x\sqrt{y}$, $y(1) = 1$

(1) 一般解は

$$\frac{1}{y^3} = -\frac{3}{11}e^{5x} + Ce^{-6x}$$

でしたから、初期条件より

$$\frac{1}{8} = -\frac{3}{11} + C \quad \text{従って} \quad C = \frac{35}{88}$$

が分かり、解は

$$\frac{1}{y^3} = -\frac{3}{11}e^{5x} + \frac{35}{88}e^{-6x}$$

です。

(2) 一般解は $x > 0$ では

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}x + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

です。初期条件から

$$1 = \frac{1}{3} + C \quad \text{従って} \quad C = \frac{2}{3}$$

ですから、解は

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3\sqrt{x}}$$

です。

□

演習問題 11.1 [S 56 長技大] 次の Bernoulli 型微分方程式の一般解を求めて下さい：

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{x^2 y^3}{2}.$$

関数 $w(x) = \frac{1}{y^2(x)}$ を考えると、 $y^2(x) = \frac{1}{w(x)}$ だから、

$$2y(x)y'(x) = -\frac{w'(x)}{w^2(x)}$$

です。そこで元の方程式の両辺に $2y(x)$ を掛ければ

$$\begin{aligned} 2y(x)y'(x) + \frac{2y^2(x)}{x} &= -x^2y^4(x) \\ -\frac{w'(x)}{w^2(x)} + \frac{2}{xw(x)} &= -\frac{x^2}{w^2(x)} \\ w'(x) - \frac{2}{x}w(x) &= x^2 \\ w'(x) + \{-\log x^2\}'w(x) &= x^2 \end{aligned}$$

なので、両辺に $e^{-\log x^2} = x^{-2}$ を掛ければ

$$\begin{aligned} x^{-2}w'(x) - 2x^{-3}w(x) &= 1 \\ \{x^{-2}w(x)\}' &= 1 \end{aligned}$$

となります。この両辺を積分すれば

$$\begin{aligned} x^{-2}w(x) &= x + C \\ w(x) &= x^2(x + C) \\ \frac{1}{y^2(x)} &= x^2(x + C) \\ y^2(x) &= \frac{1}{x^2(x + C)} \end{aligned}$$

となってこれが求める解です (C は任意の定数)。

□

11.2 Riccati 型

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \quad (11.1)$$

の型の 1 階微分方程式を Riccati 型方程式と言います。

一般的な解法はありませんが、特殊解が 1 つ分かっているれば解ける形に変形することができます。

方程式 (11.1) の 1 つの解 (特殊解) z が分かっていると仮定します。つまり

$$z' = P(x) + Q(x)z + R(x)z^2 \quad (11.2)$$

が成り立っているものとします。このとき $y - z = v$ と置けば、 $y - z = v, y + z = v + 2z$ ですから (11.1)、(11.2) を辺々引いて

$$\begin{aligned} y' - z' &= Q(x)(y - z) + R(x)(y - z)(z + z) \\ v' &= Q(x)v + R(x)v(v + 2z) \\ v' - \{Q(x) + 2zR(x)\}v &= R(x)v^2 \end{aligned}$$

と変形され、これは先に見た Bernoulli 型の方程式になっています。

11.2.1 特殊解を利用して Bernoulli 型に帰着する解法

問題 11.2.1 次の Riccati 型方程式は定数関数である特殊解をもちます。このことを利用して一般解を求めてください。

$$y' + y^2 - 5y + 6 = 0$$

定数関数であれば $y' = 0$ ですから、残りの 2 次方程式の解が特殊解となるでしょう。つまり $y = 2$ あるいは $y = 3$ は特殊解になっています。

$y = v + 2$ と置きます。すると

$$\begin{aligned} 0 &= (v + 2)' + (v + 2)^2 - 5(v + 2) + 6 \\ &= v' + v^2 - v \end{aligned}$$

$$v' - v = -v^2$$

$$\frac{1}{v^2}v' - \frac{1}{v} = -1$$

$$\left(-\frac{1}{v}\right)' - \frac{1}{v} = -1$$

ですから、 $-\frac{1}{v} = w$ と置けば

$$\begin{aligned} w' + w &= -1 \\ e^x w' + e^x w &= -e^x \\ (e^x w)' &= -e^x \\ e^x w &= -\int e^x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^x w &= -e^x + C \\
w &= -1 + Ce^{-x} \\
-\frac{1}{v} &= -1 + Ce^{-x} \\
\frac{1}{v} &= 1 + Ce^{-x} \\
\frac{1}{y-2} &= 1 + Ce^{-x} \\
y-2 &= \frac{1}{1+Ce^{-x}} \\
y &= 2 + \frac{1}{1+Ce^{-x}} \\
&= \frac{3e^x + 2C}{e^x + C}
\end{aligned}$$

が得られます（繰り返しになりますが、任意の定数 C は、現れる行が違えば異なるものとします）。□

今回のように特殊解が2つ以上分かっている場合は、それなりの一般論がありますが、まあ、そこまでする必要もないでしょう。

演習問題 11.2 Riccati 型方程式：

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

は、 $\frac{k}{x}$ の形の特殊解をもつことを確かめ、それを利用して一般解を求めてください。

$y = \frac{k}{x}$ が解であるとする

$$\begin{aligned}
-\frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2} &= \frac{2}{x^2} \\
0 &= k^2 - k - 2 \\
&= (k-2)(k+1)
\end{aligned}$$

となって $k = 2, -1$ であれば良いことが分かります。

そこで $y = v - \frac{1}{x}$ とおけば $y' = v' + \frac{1}{x^2}$ であって

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
v' + \frac{1}{x^2} + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{2}{x^2} \\
v' + v^2 - \frac{2}{x}v &= 0 \\
\frac{1}{v^2}v' + 1 - \frac{2}{x}\frac{1}{v} &= 0 \\
\left(\frac{1}{v}\right)' + \frac{2}{x}\left(\frac{1}{v}\right) &= 1 \\
x^2\left(\frac{1}{v}\right)' + 2x\left(\frac{1}{v}\right) &= x^2 \\
\left(x^2\frac{1}{v}\right)' &= x^2 \\
x^2\frac{1}{v} &= \frac{1}{3}x^3 + C \\
\frac{1}{v} &= \frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2} \\
v &= \frac{1}{\frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2}} \\
y + \frac{1}{x} &= \frac{1}{\frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2}} \\
y &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2}} \\
&= -\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + C} \\
&= \frac{2x^3 - C}{x^3 + C}
\end{aligned}$$

となります。□

11.3 問題演習

演習問題 11.3 次の Bernoulli 型の方程式の一般解と初期値問題の解を求めてください。

- (1) $y' + 3y = e^{2x}y^2$, $y(0) = 1$ (2) $y' - y = (x+1)y^2$, $y(0) = 2$
(3) $y^2y' + y^3 = x$, $y(1) = 1$ (4) $y' - xy = xy^4$, $y(1) = 1$

(1) 両辺を y^2 で割れば

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2}y' + \frac{3}{y} &= e^{2x} \\ -\frac{1}{y^2}y' - \frac{3}{y} &= -e^{2x}\end{aligned}$$

ここで両辺に e^{-3x} を掛ければ

$$\begin{aligned}e^{-3x}\left(-\frac{1}{y^2}y'\right) - 3e^{-3x}\frac{1}{y} &= -e^{-x} \\ \left(e^{-3x}\frac{1}{y}\right)' &= -e^{-x} \\ e^{-3x}\frac{1}{y} &= e^{-x} + C \\ \frac{1}{y} &= e^{2x} + Ce^{3x}\end{aligned}$$

です。また初期条件によれば

$$1 = 1 + C \quad \text{すなわち} \quad C = 0$$

ですから、求める初期値問題の解は

$$y = e^{-2x}$$

です。

(2) 両辺を y^2 で割れば

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2}y' - \frac{1}{y} &= x + 1 \\ e^x\frac{1}{y^2}y' + e^x\left(-\frac{1}{y}\right) &= (x+1)e^x \\ \left(-\frac{1}{y}e^x\right)' &= (x+1)e^x \\ -\frac{1}{y}e^x &= \int (x+1)e^x dx \\ &= (x+1)e^x - \int e^x dx \\ &= (x+1)e^x - e^x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} &= -x + Ce^{-x} \\ y &= \frac{1}{Ce^{-x} - x}\end{aligned}$$

です。また初期条件によれば

$$2 = \frac{1}{C} \quad \text{すなわち} \quad C = \frac{1}{2}$$

ですから求める初期値問題の解は

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{-x} - x}$$

となります。

(3)

$$\begin{aligned}y^2y' + y^3 &= x \\ 3y^2y' + 3y^3 &= 3x \\ e^{3x}3y^2y' + 3e^{3x}y^3 &= 3xe^{3x} \\ (e^{3x}y^3)' &= 3xe^{3x} \\ e^{3x}y^3 &= \int 3xe^{3x} dx \\ &= xe^{3x} - \int e^{3x} dx \\ &= xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C \\ y^3 &= x - \frac{1}{3} + Ce^{-3x}\end{aligned}$$

また初期条件によれば

$$1 = 1 - \frac{1}{3} + Ce^{-3} \quad \text{つまり} \quad C = \frac{1}{3}e^3$$

ですから、求める解は

$$y^3 = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3-3x}$$

となります。

(4) 両辺を y^4 で割れば

$$\frac{1}{y^4}y' - \frac{x}{y^3} = x$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{y^4}y' - 3x\frac{1}{y^3} &= 3x \\ e^{\frac{3}{2}x^2}\frac{3}{y^4}y' + 3xe^{\frac{3}{2}x^2}\left(-\frac{1}{y^3}\right) &= 3xe^{\frac{3}{2}x^2} \\ \left(-e^{\frac{3}{2}x^2}\frac{1}{y^3}\right)' &= 3xe^{\frac{3}{2}x^2} \\ -e^{\frac{3}{2}x^2}\frac{1}{y^3} &= \int 3xe^{\frac{3}{2}x^2}dx \\ &= e^{\frac{3}{2}x^2} + C \\ \frac{1}{y^3} &= -1 + Ce^{-\frac{3}{2}x^2} \\ y^3 &= \frac{1}{Ce^{-\frac{3}{2}x^2} - 1}\end{aligned}$$

となります。

また初期条件によれば

$$1 = -1 + Ce^{-\frac{3}{2}} \quad \text{従って} \quad C = 2e^{\frac{3}{2}}$$

ですから、この初期値問題の解は

$$y^3 = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}(1-x^2)} - 1}$$

となります。

□

演習問題 11.4 [H 10 東大工 (改)] 微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = y + xy^2$$

について、以下の問いに答えて下さい。

- (1) $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ はどんな微分方程式を満たすでしょうか。
- (2) 元の微分方程式の一般解を求めて下さい。

$y(x) = \frac{1}{z(x)}$ なので、 $\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{1}{z^2(x)} \frac{dz(x)}{dx}$ である事から、これを元の方程式に代入して

$$-\frac{1}{z^2(x)} \frac{dz(x)}{dx} = \frac{1}{z(x)} + \frac{x}{z^2(x)}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz(x)}{dx} &= -z(x) - x \\ \frac{dz(x)}{dx} + z(x) &= -x\end{aligned}$$

となり、これが求める方程式です。更にこの両辺に指数関数を掛ければ

$$\begin{aligned}e^x \frac{dz(x)}{dx} + e^x z(x) &= -xe^x \\ \{e^x z(x)\}' &= -xe^x \\ e^x z(x) &= -\int xe^x dx \\ &= -xe^x + \int e^x dx \\ &= (1-x)e^x + C \\ z(x) &= 1-x + Ce^{-x} \\ \frac{1}{y(x)} &= 1-x + Ce^{-x} \\ y(x) &= \frac{1}{1-x + Ce^{-x}}\end{aligned}$$

を得ます (C は任意の定数)。

□

演習問題 11.5 次の Riccati 型方程式の特殊解を 1 次関数の範囲で求め、それを利用して一般解を求めてください。

$$xy' = 2x + x^2 - (2x+1)y + y^2$$

$ax+b$ が解であると仮定すると

$$\begin{aligned}ax &= 2x + x^2 - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 \\ 0 &= -ax + 2x + x^2 - 2ax^2 - (2b+a)x - b + a^2x^2 + 2abx + b^2 \\ &= (a-1)^2x^2 + 2(1-a-b+ab)x + b(b-1)\end{aligned}$$

ですから $a=1, b=0$ または $b=1$ が得られます。特に $y=x$ は 1 つの特殊解であることが分かります。

そこで $y = v + x$ と置けば、 $y' = v' + 1$ であって、

$$x(v' + 1) = 2x + x^2 - (2x + 1)(v + x) + (v + x)^2$$

$$xv' + x = 2x + x^2 - 2x^2 - (2v + 1)x - v + v^2 + 2vx + x^2$$

$$xv' = v^2 - v$$

$$xv' + v = v^2$$

$$\frac{x}{v^2}v' + \frac{1}{v} = 1$$

と変形されます。ここで $\frac{1}{v} = w$ と置けば $w' = -\frac{v'}{v^2}$ なので

$$-xw' + w = 1$$

$$w' - \frac{1}{x}w = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}w' - \frac{1}{x^2}w = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}w\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x}w = \frac{1}{x} + C$$

$$w = 1 + Cx$$

$$\frac{1}{v} = 1 + Cx$$

$$v = \frac{1}{1 + Cx}$$

$$y - x = \frac{1}{1 + Cx}$$

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{1}{1 + Cx} \\ &= \frac{1 + x + Cx^2}{1 + Cx} \end{aligned}$$

が得られます。

□

演習問題 11.6 次の Riccati 型方程式は $y = x^3$ を 1 つの解としてもつことを確かめ、これを利用して一般解を求めてください。

$$y' = \frac{2}{x^4}y^2 + x^2$$

$y = x^3$ のとき

$$y' = 3x^2, \quad \frac{2}{x^4}y^2 + x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

ですから、確かに解になっています。

そこで $y = x^3 + w$ と置けば、 $y' = 3x^2 + w'$ であって

$$y' = \frac{2}{x^4}y^2 + x^2$$

$$3x^2 + w' = \frac{2}{x^4}(x^3 + w)^2 + x^2$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + w' &= \frac{2}{x^4}(x^6 + 2x^3w + w^2) \\ &= 2x^2 + \frac{4}{x}w + \frac{2}{x^4}w^2 \end{aligned}$$

$$w' - \frac{4}{x}w = \frac{2}{x^4}w^2$$

$$\frac{w'}{w^2} + \frac{4}{x}\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{2}{x^4}$$

$$x^4 \frac{w'}{w^2} + 4x^3 \left(-\frac{1}{w}\right) = 2$$

$$\left(-x^4 \frac{1}{w}\right)' = 2$$

$$-x^4 \frac{1}{w} = 2x + C$$

$$\frac{1}{w} = -\frac{2x + C}{x^4}$$

$$w = \frac{x^4}{C - 2x}$$

$$y - x^3 = \frac{x^4}{C - 2x}$$

$$y = x^3 + \frac{x^4}{C - 2x}$$

$$= \frac{Cx^3 - x^4}{C - 2x}$$

が得られます。

□

演習問題 11.7 次の Riccati 型方程式がある定数関数を解にもつことを確かめ、それを利用して一般解を求めてください。

$$y' + xy^2 - (2x + 1)y + x + 1 = 0$$

$y = k$ が解であると仮定すると

$$0 + xk^2 - (2x + 1)k + x + 1 = 0$$

$$x(k^2 - 2k + 1) - k + 1 = 0$$

から $k = 1$ が解であることが分かります。

そこで $y = 1 + w$ と置けば、 $y' = w'$ であって

$$y' + xy^2 - (2x + 1)y + x + 1 = 0$$

$$w' + x(w + 1)^2 - (2x + 1)(w + 1) + x + 1 = 0$$

$$w' + x(w^2 + 2w + 1) - 2xw - 2x - w - 1 + x + 1 = 0$$

$$w' + xw^2 - w = 0$$

$$w' - w = -xw^2$$

$$\frac{w'}{w^2} - \frac{1}{w} = -x$$

$$e^x \frac{w'}{w^2} + e^x \left(-\frac{1}{w} \right) = -xe^x$$

$$\left(-e^x \frac{1}{w} \right)' = -xe^x$$

$$e^x \frac{1}{w} = \int xe^x dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= (x - 1)e^x + C$$

$$\frac{1}{w} = x - 1 + Ce^{-x}$$

$$w = \frac{1}{x - 1 + Ce^{-x}}$$

$$y - 1 = \frac{1}{x - 1 + Ce^{-x}}$$

$$y = 1 + \frac{1}{x - 1 + Ce^{-x}}$$

$$= \frac{x + Ce^{-x}}{x - 1 + Ce^{-x}}$$

です。

□

演習問題 11.8 次の Riccati 型方程式の特殊解を求め、それを利用して一般解を求めてください。

$$y' = e^x - y + e^{-x}y^2$$

これは

$$y' + y - e^{-x}y^2 = e^x$$

とも書けますから、 $y = ke^x$ の型の解がないか探してみましょう。

$$ke^x + ke^x - e^{-x}ke^{2x} = e^x$$

$$ke^x = e^x$$

$$k = 1$$

従って $y = e^x$ は 1 つの解であることが分かりました。そこで $y = v + e^x$ と置けば

$$v' + e^x = e^x - v + e^{-x} + e^{-x}(v + e^x)^2$$

$$v' = -v - e^x + e^{-x}(v^2 + 2ve^x + e^{2x})$$

$$v' = v + e^{-x}v^2$$

$$v' - v = e^{-x}v^2$$

$$\frac{1}{v^2}v' - \frac{1}{v} = e^{-x}$$

$$-\left(\frac{1}{v}\right)' - \frac{1}{v} = e^{-x}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' e^x + \frac{1}{v} e^x = -1$$

$$\left(\frac{1}{v}e^x\right)' = -1$$

$$\frac{1}{v}e^x = -x + C$$

$$\frac{1}{v} = (C - x)e^{-x}$$

$$v = \frac{e^x}{C - x}$$

$$y - e^x = \frac{e^x}{C - x}$$

$$\begin{aligned}y &= e^x + \frac{e^x}{C-x} \\&= \frac{C+1-x}{C-x} e^x\end{aligned}$$

が得られます。

□