

11 Bernoulli 型、Riccati 型

目標
C1. Bernoulli 型方程式の基本解法を知っている C2. Riccati 型方程式の基本解法を知っている
B1. Bernoulli 型方程式の一般解・初期値問題の解が求められる 演習問題 11.1、11.3
B2. 特殊解が与えられたときに Riccati 型方程式の一般解が求められる 演習問題 11.2、11.5、11.6、11.7

11.1 Bernoulli 型

$$P(x)y' + Q(x)y = R(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

の型の方程式を Bernoulli 型方程式と言います。

両辺を y^α で割って、 $\frac{1}{y^{\alpha-1}} = z$ と置けば

$$\frac{P(x)}{1-\alpha}z' + Q(x)z = R(x)$$

となって z に関する 1 階線形微分方程式に帰着されます。

問題 11.1.1 次の Bernoulli 型の方程式の一般解を求めてください。

$$(1) y' - 2y = e^{5x}y^4 \quad (2) xy' + y = x\sqrt{y} \quad (x > 0)$$

(1) 両辺を y^4 で割れば

$$\frac{1}{y^4}y' - 2\frac{1}{y^3} = e^{5x}$$

であり、 $\frac{1}{y^3} = z$ とおけば $z' = -3\frac{1}{y^4}$ であって

$$-\frac{1}{3}z' - 2z = e^{5x}$$

$$z' + 6z = -3e^{5x}$$

です。対応する z の同次方程式： $z' + 6z = 0$ の一般解は $z = Ce^{-6x}$ です。また z の非同次方程式が $z = ke^{5x}$ の型の解をもつと仮定して探せば $z = -\frac{3}{11}e^{5x}$ は 1 つの解であることが分かります。従って z の非同次方程式の一般解は

$$z = -\frac{3}{11}e^{5x} + Ce^{-6x}$$

です。 $z = \frac{1}{y^3}$ でしたから、

$$\frac{1}{y^3} = -\frac{3}{11}e^{5x} + Ce^{-6x}$$

が元の方程式の一般解です。

(2) 両辺を $\sqrt{y}$ で割れば

$$\frac{2x}{2\sqrt{y}}y' + \sqrt{y} = x$$

$$2x(\sqrt{y})' + \sqrt{y} = x$$

ここで $x > 0$ のときは

$$\sqrt{x}(\sqrt{y})' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x}\sqrt{y})' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = \int \frac{1}{2}\sqrt{x}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}x + \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{C^2}{x} + \frac{2C}{3}\sqrt{x}$$

が得られます。□

問題 11.1.2 次の初期値問題の解を求めてください。

$$(1) y' - 2y = e^{5x}y^4, y(0) = 2 \quad (2) xy' + y = x\sqrt{y}, y(1) = 1$$

$$(1) \frac{1}{y^3} = -\frac{3}{11}e^{5x} + \frac{35}{88}e^{-6x}. \quad (2) \sqrt{y} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3\sqrt{x}}.$$

□

演習問題 11.1 [S 56 長技大] 次の Bernoulli 型微分方程式の一般解を求めて下さい：

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{x^2 y^3}{2}.$$

11.2 Riccati 型

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \quad (11.1)$$

の型の 1 階微分方程式を Riccati 型方程式と言います。

一般的な解法はありませんが、特殊解が 1 つ分かっているならば解ける形に変形することができます。

11.2.1 特殊解を利用して Bernoulli 型に帰着する解法

問題 11.2.1 次の Riccati 型方程式は定数関数である特殊解をもちます。このことを利用して一般解を求めてください。

$$y' + y^2 - 5y + 6 = 0$$

定数関数であれば $y' = 0$ ですから、残りの 2 次方程式の解が特殊解となるでしょう。つまり $y = 2$ あるいは $y = 3$ は特殊解になっています。

$y = v + 2$ と置きます。すると

$$\begin{aligned} 0 &= (v+2)' + (v+2)^2 - 5(v+2) + 6 \\ &= v' + v^2 - v \\ v' - v &= -v^2 \\ \frac{1}{v^2}v' - \frac{1}{v} &= -1 \\ \left(-\frac{1}{v}\right)' - \frac{1}{v} &= -1 \end{aligned}$$

ですから、 $-\frac{1}{v} = w$ と置けば

$$\begin{aligned} w' + w &= -1 \\ e^x w' + e^x w &= -e^x \\ (e^x w)' &= -e^x \\ e^x w &= -\int e^x dx \\ e^x w &= -e^x + C \\ w &= -1 + Ce^{-x} \\ -\frac{1}{v} &= -1 + Ce^{-x} \\ \frac{1}{v} &= 1 + Ce^{-x} \\ \frac{1}{y-2} &= 1 + Ce^{-x} \\ y-2 &= \frac{1}{1 + Ce^{-x}} \\ y &= 2 + \frac{1}{1 + Ce^{-x}} \\ &= \frac{3e^x + 2C}{e^x + C} \end{aligned}$$

が得られます（繰り返しになりますが、任意の定数 C は、現れる行が違えば異なるものとします）。□

演習問題 11.2 Riccati 型方程式：

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

は、 $\frac{k}{x}$ の形の特殊解をもつことを確かめ、それを利用して一般解を求めてください。

11.3 問題演習

演習問題 11.3 次の Bernoulli 型の方程式の一般解と初期値問題の解を求めてください。

$$(1) y' + 3y = e^{2x}y^2, y(0) = 1 \quad (2) y' - y = (x+1)y^2, y(0) = 2$$

$$(3) y^2y' + y^3 = x, y(1) = 1 \quad (4) y' - xy = xy^4, y(1) = 1$$

演習問題 11.4 [H 10 東大工 (改)] 微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = y + xy^2$$

について、以下の問いに答えて下さい。

$$(1) z(x) = \frac{1}{y(x)} \text{ はどんな微分方程式を満たすでしょうか。}$$

(2) 元の微分方程式の一般解を求めて下さい。

演習問題 11.5 次の Riccati 型方程式の特殊解を 1 次関数の範囲で求め、それを利用して一般解を求めてください。

$$xy' = 2x + x^2 - (2x+1)y + y^2$$

演習問題 11.6 次の Riccati 型方程式は $y = x^3$ を 1 つの解としてもつことを確かめ、これを利用して一般解を求めてください。

$$y' = \frac{2}{x^4}y^2 + x^2$$

演習問題 11.7 次の Riccati 型方程式がある定数関数を解にもつことを確かめ、それを利用して一般解を求めてください。

$$y' + xy^2 - (2x+1)y + x + 1 = 0$$

演習問題 11.8 次の Riccati 型方程式の特殊解を求め、それを利用して一般解を求めてください。

$$y' = e^x - y + e^{-x}y^2$$