12　２階線型微分方程式　その１

目標
C1. 定数係数同次型２階線形微分方程式の一般解を知っている 演習問題 12.1、12.2、12.3、12.4
B1. 定数係数同次型２階線形微分方程式を解の公式を使わずに解くことができる 演習問題 12.5、12.6、12.7

12.1　２階線型微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{12.1}$$

の型の２階微分方程式を、２階線型微分方程式と言います。

右辺、すなわち、未知関数 y を含まない項が 0 である場合、同次型と言い、そうでない場合は非同次型と言います。

また、方程式 (12.1) に対して $R(x)$ を 0 で置き換えて得られる同次型方程式：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

を、方程式 (12.1) に対応した同次方程式と言います。

12.2　関数の一次独立性

定義 12.2.1 任意の x に対して

$$C_1 v(x) + C_2 w(x) = 0$$

が成り立つような定数が $C_1 = C_2 = 0$ のみであるとき、関数 $v(x), w(x)$ は一次独立であると言います。

例えば $v(x) = kw(x)$ である場合は 1 次独立ではありません（1 次従属といいます)。

逆に一次従属であれば、$v(x) = kw(x)$ であるか、もしくは $w(x) = kv(x)$ となるような定数 $k \neq 0$ があります。

例 12.2.2 1 次独立な解の例　微分方程式 $y'' = 0$ は２つの解 $x, 1$ をもちますが、明らかにこれらは一次独立です。一般解は $y = C_1 x + C_2 \cdot 1$ です。

定義 12.2.3

$$W_{[v,w]}(x) = \begin{vmatrix} v(x) & w(x) \\ v'(x) & w'(x) \end{vmatrix}$$

と定め、これを v, w の Wronski 行列式と言います。

一次従属であれば、$v(x) = kw(x)$ もしくは $w(x) = kv(x)$ となるような定数 $k \neq 0$ があります。

例えば前者であれば、

$$W_{[v,w]}(x) = \begin{vmatrix} kw(x) & w(x) \\ kw'(x) & w'(x) \end{vmatrix} = 0$$

が成り立ちます（後者の場合も全く同様です)。従って以下の判定基準が得られます：

事実 12.2.4

(i) v, w が一次従属ならば任意の x に対し $W_{[v,w]}(x) = 0$ です。

(ii) ある x_0 において $W_{[v,w]}(x_0) \neq 0$ であれば v, w は一次独立です。

従ってある x_0 で $W_{[v,w]}(x_0) \neq 0$ であれば v, w は一次独立であることが分かります。

例 12.2.5 指数関数の一次独立性　$v(x) = \mathrm{e}^x, w(x) = \mathrm{e}^{2x}$ のとき、

$$W_{[v,w]}(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{3x} \neq 0$$

ですからこれらは一次独立です。

一般に $\mathrm{e}^{\alpha x}, \mathrm{e}^{\beta x}$ は $\alpha \neq \beta$ のとき一次独立です。

例 12.2.6 三角関数の一次独立性　$v(x) = \sin kx, w(x) = \cos kx$ のとき（$k \neq 0$）、

$$W_{[v,w]}(x) = \begin{vmatrix} \sin kx & \cos kx \\ k\cos kx & -k\sin kx \end{vmatrix} = -k \neq 0$$

従って $k \neq 0$ のとき $\sin kx, \cos kx$ は一次独立です。

12.3　定数係数・同次型

まず最初に、同次型２階線型微分方程式のうち、$P(x), Q(x)$ が実定数であるものを考えます：

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{12.2}$$

12.3.1　自明なケース：$p = q = 0$ の場合

この場合方程式は $y'' = 0$ であり、２回積分して一般解 $y = Cx + D$ が得られます。先に見たように解 $x, 1$ は一次独立です。

12.3.2　自明なケース：$p \neq 0, q = 0$ の場合

この場合は方程式は $y'' + py' = 0$ ですから、

$$\begin{aligned} y'' + py' &= 0 \\ \mathrm{e}^{px}y'' + p\mathrm{e}^{px}y' &= 0 \\ (\mathrm{e}^{px}y')' &= 0 \\ \mathrm{e}^{px}y' &= C \\ y' &= C\mathrm{e}^{-px} \\ y &= -\frac{C}{p}\mathrm{e}^{-px} + D \\ &= C\mathrm{e}^{-px} + D \end{aligned}$$

となります。

12.3.3　自明なケース：$p = 0, q \neq 0$ の場合

$p = 0, q \neq 0$ の場合、方程式は

$$y'' = -qy$$

と書くことが出来ます。

【$q < 0$ のとき】$y = \mathrm{e}^{\pm\sqrt{-q}x}$ は２つの１次独立な解です。従って一般解は

$$y = C\mathrm{e}^{\sqrt{-q}x} + D\mathrm{e}^{\sqrt{-q}x}$$

です。

【$q > 0$ のとき】$y = \sin\sqrt{q}x, \cos\sqrt{q}x$ は２つの１次独立な解です。従って一般解は

$$y = C\sin\sqrt{q}x + D\cos\sqrt{q}x$$

です。

12.4　基本的な計算と微分作用素による記述

１階の微分方程式：$f'(x) - pf(x) = 0$ の両辺に e^{-px} を掛けると

$$0 = f'(x)\mathrm{e}^{-px} - pf(x)\mathrm{e}^{-px} = \left\{f(x)\mathrm{e}^{-px}\right\}'$$

と云う風に積の微分法と見る事が出来、微分が 0 となるのは定数関数でしたから

$$f(x)\mathrm{e}^{-px} = C \quad \text{従って、} \quad f(x) = C\mathrm{e}^{px}$$

が分かります（C は任意の定数）。

これを別の見方で見てみましょう。

今やった計算は、要するに $f(x)\mathrm{e}^{-px} = g(x)$ と置けば $g(x)$ が定数関数であることが分かると云うわけなんですが、これはつまり $f(x) = g(x)\mathrm{e}^{px}$ と置くと云う事であって、これを微分方程式の左辺に代入してみると

$$f'(x) - pf(x) = \{g(x)\mathrm{e}^{px}\}' - pg(x)\mathrm{e}^{px} = g'(x)\mathrm{e}^{-px} + pg(x)\mathrm{e}^{px} - pg(x)\mathrm{e}^{px} = g'(x)\mathrm{e}^{px}$$

となっています。

一般に関数を食べて関数を吐き出す“関数”の事を作用素と呼びます。関数を微分すると云う作用素 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ と関数を定数 p 倍すると云う作用素 p の差を使って

$$(D - p)\,h(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) - ph(x) = h'(x) - ph(x)$$

と書くことにすれば、さっきの計算は

$$(D-p)f(x) = g'(x)\mathrm{e}^{px}$$

と書く事が出来ます。これを繰り返せば次が成り立つことが分かります：

事実 12.4.1 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ と置けば

$$(D-p)^n\{g(x)\mathrm{e}^{px}\} = g^{(n)}(x)\mathrm{e}^{px}$$

です。また $(D-p)f(x) = 0$ の一般解は $f(x) = C\mathrm{e}^{px}$ です（C は任意定数）。

例えば

$$(D-p)^2\{g(x)\mathrm{e}^{px}\} = (D-p)\{(D-p)\{g(x)\mathrm{e}^{px}\}\} = (D-p)\{g'(x)\mathrm{e}^{px}\} = g''(x)\mathrm{e}^{px}$$

ですね。

12.5　相異なる実数解の場合の具体例

12.5.1　因数分解法　～１階の微分方程式を２回解く事に帰着する～

微分作用素による記述を採用すれば微分方程式：

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$$

はあたかも左辺を因数分解するかの様に

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 3\right)\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2\right)f(x)\right\} = (D-3)\{(D-2)f(x)\} = 0$$

と変形する事が出来ます。ここで $(D-2)f(x) = h(x)$ と置けば、方程式は

$$(D-3)h(x) = 0$$

と書く事が出来、これは簡単に一般解 $h(x) = C_1\mathrm{e}^{3x}$ が求まります（C_1 は任意の定数）。そこで元の $f(x)$ に戻してやれば

$$(D-2)f(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} \quad \cdots(*)$$

ですからまたここで $f(x) = g(x)\mathrm{e}^{2x}$ と置けば、

$$\begin{aligned} g'(x)\mathrm{e}^{2x} &= C_1\mathrm{e}^{3x} \\ g'(x) &= C_1\mathrm{e}^{x} \\ g(x) &= C_1\mathrm{e}^{x} + C_2 \\ f(x) &= C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{2x} \quad （C_1, C_2 \text{ は任意の定数}） \end{aligned}$$

となって一般解が求まります。

あるいは $g(x)$ は導入せずに直接 $(*)$ 式を書き直して

$$\begin{aligned} f'(x) - 2f(x) &= C_1\mathrm{e}^{3x} \\ f'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2f(x)\mathrm{e}^{-2x} &= C_1\mathrm{e}^{x} \\ \left(f(x)\mathrm{e}^{-2x}\right)' &= C_1\mathrm{e}^{x} \\ f(x)\mathrm{e}^{-2x} &= C_1\mathrm{e}^{x} + C_2 \\ f(x) &= C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

と計算しても良いでしょう。

12.5.2　平方完成法　～自明な２階方程式に帰着する～

同様の記法を使えば同じ微分方程式はあたかも左辺を平方完成するかの様に

$$0 = f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{5}{2}\right)^2 f(x) - \frac{25}{4}f(x) + 6f(x)$$

$$\left(D - \frac{5}{2}\right)^2 f(x) = \frac{1}{4}f(x)$$

と変形する事が出来ます。ここで $f(x) = g(x)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$ と置けば、最初に注意した事実から

$$\left(D - \frac{5}{2}\right)^2 f(x) = g''(x)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$$

となっているので、先の方程式は

$$g''(x)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} = \frac{1}{4}g(x)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} \qquad \text{すなわち、} \quad g''(x) = \frac{1}{4}g(x)$$

と変形する事が出来ます。これは簡単に一般解が求められて

$$g(x) = C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$$

でした（C_1, C_2 は任意定数）から、結局もとの $f(x)$ に戻してやれば

$$g(x)\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} = C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x} \quad \text{すなわち、} \quad f(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$$

という具合に求める一般解が求まりました。

12.6　実重解の場合の具体例

$$f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 0$$

この微分方程式も同様の記法に従えば

$$(D-3)^2 f(x) = 0$$

と書く事が出来ますが、ここで $f(x) = g(x)\mathrm{e}^{3x}$ と置けば

$$0 = (D-3)^2 f(x) = g''(x)\mathrm{e}^{3x}, \quad \text{従って} \quad g''(x) = 0$$

となってこれは簡単に解が求まって

$$g(x) = C_1 x + C_2 \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

です。最後にこれを $f(x)$ に戻してやれば一般解は次の通りです：

$$f(x) = C_1 x\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

12.7　共役な２つの複素数解の場合の具体例

12.7.1　平方完成法

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 0$$

も、同様の記法によってあたかも左辺を平方完成するかの様に

$$(D-1)^2 f(x) - f(x) + 5f(x) = 0, \quad (D-1)^2 f(x) = -4f(x)$$

と変形する事が出来ます。そこで同じ様に $f(x) = g(x)\mathrm{e}^{x}$ と置けば、

$$\begin{aligned}(D-1)^2\left(g(x)\mathrm{e}^{x}\right) &= -4g(x)\mathrm{e}^{x} \\ g''(x)\mathrm{e}^{x} &= -4g(x)\mathrm{e}^{x} \\ g''(x) &= -4g(x)\end{aligned}$$

となりますが、これは簡単に一般解が分かります（C_1, C_2 は任意の定数）：

$$g(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

元に戻してやれば解を得る事が出来ます：

$$\begin{aligned}f(x)\mathrm{e}^{-x} &= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x \\ f(x) &= C_1\mathrm{e}^{x}\cos 2x + C_2\mathrm{e}^{x}\sin 2x.\end{aligned}$$

12.7.2　複素因数分解法

定義 12.7.1 任意の複素数 $z = x + iy$ に対して次のように定めます：

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + i\sin y).$$

複素数値関数 $f(x) = v(x) + iw(x)$ について、

$$\begin{aligned}f'(x) &= v'(x) + iw'(x) \\ \int f(x)dx &= \int v(x)dx + i\int w(x)dx\end{aligned}$$

となることから、複素指数関数の実パラメータによる微分が計算されます：

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{ax})' &= \{\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\}' \\ &= \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + \mathrm{e}^{\alpha x}(-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x + i\alpha\sin\beta x + i\beta\cos\beta x\right) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha + i\beta)(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ &= a\mathrm{e}^{ax}\end{aligned}$$

事実 12.7.2 $a = \alpha + i\beta \neq 0$、$x$ を実変数とするとき

$$(\mathrm{e}^{ax})' = a\mathrm{e}^{ax}, \qquad \int \mathrm{e}^{ax}dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C.$$

ただし、C は任意の複素定数です。

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 0$$

特性方程式は共役な複素数解をもつケースですから、実数係数の範囲では因数分解することは出来ません。しかし係数に虚数を許せば、

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = (D - (1+2i))\{(D - (1-2i))f(x)\}$$

と因数分解出来、実数の場合と全く同様に２つの解

$$\begin{aligned} e^{(1+2i)x} &= e^x(\cos 2x + i\sin 2x) \\ e^{(1-2i)x} &= e^x\{\cos(-2x) + i\sin(-2x)\} = e^x(\cos 2x - i\sin 2x) \end{aligned}$$

が『複素数値関数』の範囲内で得られます。しかしこれらを加えたり差をとったりすれば実数値関数の範囲の２つの解：

$$e^x\cos 2x, \quad e^x\sin 2x$$

が得られ、Wronski 行列式を計算すると

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^x\sin 2x & e^x\cos 2x \\ e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) & e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x\sin 2x & e^x\cos 2x \\ e^x\sin 2x & e^x\cos 2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^x\sin 2x & e^x\cos 2x \\ 2e^x\cos 2x & -2e^x\sin 2x \end{vmatrix} \\ &= -2e^x \neq 0 \end{aligned}$$

ですからこれらは一次独立です。従って一般解は次のようになります：

$$f(x) = C_1e^x\cos 2x + C_2e^x\sin 2x.$$

事実 12.7.3 一般に微分方程式：

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \quad (p, q \text{ は実数})$$

の一般解は、その特性２次方程式 $w^2 + pw + q = 0$ の２つの解の様子で分類すれば次のいずれかに当てはまります（C_1, C_2 は任意の定数）：

特性方程式の解	微分方程式の一般解
相異なる実数解 w_1, w_2	$y(x) = C_1e^{w_1x} + C_2e^{w_2x}$
実重解 w	$y(x) = C_1xe^{wx} + C_2e^{wx}$
共役な２つの複素数解 $\alpha \pm i\beta$	$y(x) = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

演習問題 12.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y'' - y' - 6y = 0$　(2) $y'' + 4y' + 4y = 0$　(3) $y'' - 4y' + 7y = 0$

(1) 特性方程式は

$$0 = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$$

ですから、一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。

(2) 特性方程式は

$$0 = t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2$$

ですから、一般解は

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。

(3) 特性方程式は

$$0 = t^2 - 4t + 7 = (t-2)^2 + 3$$

ですから、一般解は

$$y = C_1e^{2x}\cos\sqrt{3}x + C_2e^{2x}\sin\sqrt{3}x$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。 □

演習問題 12.2 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$

(2) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 4$

(3) $y'' - 4y' + 7y = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}, y'(0) = 0$

(1) 一般解は

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

ですが、初期条件から

$$C_1 + C_2 = 3, \quad 3C_1 - 2C_2 = 1$$

であり、これを解いて

$$C_1 = \frac{7}{5}, \quad C_2 = \frac{8}{5}$$

が得られますので、求める解は

$$y = \frac{7}{5}\mathrm{e}^{3x} + \frac{8}{5}\mathrm{e}^{-2x}$$

です。

(2) 一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2x\mathrm{e}^{-2x}$$

ですが、初期条件から

$$C_1 = 3, \quad C_2 - 2C_1 = 4$$

であり、これを解いて

$$C_1 = 3, \quad C_2 = 10$$

が得られますので、求める解は

$$y = (3 + 10x)\mathrm{e}^{-2x}$$

です。

(3) 一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x}\cos\sqrt{3}x + C_2\mathrm{e}^{2x}\sin\sqrt{3}x$$

ですが、初期条件から

$$C_1 = \sqrt{3}, \quad 2C_1 + \sqrt{3}C_2 = 0$$

であり、これを解いて

$$C_1 = \sqrt{3}, \quad C_2 = -2$$

が得られますので、求める解は

$$y = \sqrt{3}\mathrm{e}^{2x}\cos\sqrt{3}x - 2\mathrm{e}^{2x}\sin\sqrt{3}x$$

です。 □

12.8 問題演習

演習問題 12.3 次の微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y'' + 2y' - 8y = 0$ (2) $y'' - 2y' - 3y = 0$ (3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(4) $y'' + 8y' + 16y = 0$ (5) $y'' + 6y' + 11y = 0$ (6) $y'' - 2y' + 6y = 0$

(1) 特性方程式は

$$0 = t^2 + 2t - 8 = (t-2)(t+4)$$

ですから、一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x}$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。

(2) 特性方程式は

$$0 = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$$

ですから、一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。

(3) 特性方程式は

$$0 = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

ですから、一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2x\mathrm{e}^{3x}$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。

(4) 特性方程式は

$$0 = t^2 + 8t + 16 = (t+4)^2$$

ですから、一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2x\mathrm{e}^{-4x}$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。

(5) 特性方程式は

$$0 = t^2 + 6t + 11 = (t+3)^2 + 2$$

ですから、一般解は

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-3x} \cos \sqrt{2}x + C_2 \mathrm{e}^{-3x} \sin \sqrt{2}x$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。

(6) 特性方程式は

$$0 = t^2 - 2t + 6 = (t-1)^2 + 5$$

ですから、一般解は

$$y = C_1 \mathrm{e}^{x} \cos \sqrt{5}x + C_2 \mathrm{e}^{x} \sin \sqrt{5}x$$

です（C_1, C_2 は任意の定数）。 □

演習問題 12.4 次の初期値問題の解を求めてください。

(1) $y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 8$

(2) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = -8$

(3) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = -5$

(4) $y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -10$

(5) $y'' + 6y' + 11y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = -\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

(6) $y'' - 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = \sqrt{5}, y'(0) = 2\sqrt{5}$

(1) 一般解は

$$y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$$

ですが、初期条件から

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 2C_1 - 4C_2 = 8$$

であり、これを解いて $C_1 = 2, C_2 = -1$ が得られます。従って求める解は

$$y = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-4x}$$

です。

(2) 一般解は

$$y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}$$

ですが、初期条件から

$$C_1 + C_2 = 4, \qquad 3C_1 - C_2 = -8$$

であり、これを解いて $C_1 = -1, C_2 = 5$ が得られます。従って求める解は

$$y = -\mathrm{e}^{3x} + 5\mathrm{e}^{-x}$$

です。

(3) 一般解は

$$y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 x \mathrm{e}^{3x}$$

ですが、初期条件から

$$C_1 = -2, \qquad 3C_1 + C_2 = -5$$

であり、これを解いて $C_1 = -2, C_2 = 1$ が得られます。従って求める解は

$$y = -2\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{3x}$$

です。

(4) 一般解は

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-4x} + C_2 x \mathrm{e}^{-4x}$$

ですが、初期条件から

$$C_1 = 3, \qquad -4C_1 + C_2 = -10$$

であり、これを解いて $C_1 = 3, C_2 = 2$ が得られます。従って求める解は

$$y = 3\mathrm{e}^{-4x} + 2x\mathrm{e}^{-4x}$$

です。

(5) 一般解は

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-3x} \cos \sqrt{2}x + C_2 \mathrm{e}^{-3x} \sin \sqrt{2}x$$

ですが、初期条件から

$$C_1 = \frac{1}{2}, \qquad -3C_1 + \sqrt{2}C_2 = -\frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

であり、これを解いて $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}$ が得られます。従って求める解は

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3x}\cos\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3x}\sin\sqrt{2}x$$

です。

(6) 一般解は

$$y = C_1\mathrm{e}^{x}\cos\sqrt{5}x + C_2\mathrm{e}^{x}\sin\sqrt{5}x$$

ですが、初期条件から

$$C_1 = \sqrt{5}, \qquad C_1 + \sqrt{5}C_2 = 2\sqrt{5}$$

であり、これを解いて $C_1 = \sqrt{5}, C_2 = 1$ が得られます。従って求める解は

$$y = \sqrt{5}\mathrm{e}^{x}\cos\sqrt{5}x + \mathrm{e}^{x}\sin\sqrt{5}x$$

です。 □

演習問題 12.5 [京大工 13] $y'' - 4y' + 3y = 0$ の一般解を求めて下さい。

【解答例】この方程式の左辺の微分作用素は

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 3\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)y(x) = 0$$

と因数分解されるので、$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)y(x) = w(x)$ とおけば

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 3\right)w(x) &= 0\\ w(x) &= C\mathrm{e}^{3x}\\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)y(x) &= C\mathrm{e}^{3x}\\ \mathrm{e}^{-x}y'(x) - \mathrm{e}^{-x}y(x) &= C\mathrm{e}^{2x}\\ \left\{\mathrm{e}^{-x}y(x)\right\}' &= C\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{-x}y(x) &= C\mathrm{e}^{2x} + D\\ y(x) &= C\mathrm{e}^{3x} + D\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$

となってこれが一般解です（C, D は任意の定数）。 □

演習問題 12.6 [阪大基礎工 13] $y'' + ay' + by = 0$ の解 $y(x)$ を、
(1) $b = -2a^2$ (2) $b = \frac{a^2}{4}$ (3) $b = 2a^2$
のときにそれぞれ求めて下さい（a は実定数とします）。

【解答例】(1)

$$\begin{aligned}y'' + ay' - 2a^2y &= 0\\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2a\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)y(x) &= 0\end{aligned}$$

ここで $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)y(x) = w(x)$ とおけば、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2a\right)w(x) &= 0\\ \mathrm{e}^{2ax}w'(x) + 2a\mathrm{e}^{2ax}w(x) &= 0\\ \left\{\mathrm{e}^{2ax}w(x)\right\}' &= 0\\ \mathrm{e}^{2ax}w(x) &= C\\ w(x) &= C\mathrm{e}^{-2ax}\end{aligned}$$

となって $w(x)$ の一般解が求まります（C は任意の定数）。そこで $w(x)$ を元に戻せば

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\right)y(x) &= C\mathrm{e}^{-2ax}\\ \mathrm{e}^{-ax}y'(x) - a\mathrm{e}^{-ax}y(x) &= C\mathrm{e}^{-3ax}\\ \left\{\mathrm{e}^{-ax}y(x)\right\}' &= C\mathrm{e}^{-3ax}\\ \mathrm{e}^{-ax}y(x) &= C\mathrm{e}^{-3ax} + D\\ y(x) &= C\mathrm{e}^{-2ax} + D\mathrm{e}^{ax}\end{aligned}$$

を得、これが求める一般解です（C, D は任意の定数）。

(2) この場合方程式は

$$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0$$

ですが、左辺の微分作用素を因数分解すれば

$$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{a}{2}\right)^2 y(x)=0$$

であって、ここで $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{a}{2}\right)y(x)=w(x)$ とおけば、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{a}{2}\right)w(x)&=0\\
\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}w'(x)+\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}w(x)&=0\\
\left\{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}w(x)\right\}'&=0\\
\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}w(x)&=C\\
w(x)&=C\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}
\end{aligned}$$

となり $w(x)$ の一般解が求まります（C は任意の定数）。そこで $w(x)$ を元に戻せば

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{a}{2}\right)y(x)&=C\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\\
\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}y'(x)+\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}y(x)&=C\\
\left\{\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}y(x)\right\}'&=C\\
\mathrm{e}^{\frac{a}{2}x}y(x)&=Cx+D\\
y(x)&=Cx\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}+D\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}
\end{aligned}$$

が得られ、これが求める一般解です（C, D は任意の定数）。

(3) この場合方程式は

$$y''+ay'+2a^2y=0$$

ですが、特性多項式が

$$t^2+at+2a^2=\left(t+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{7a^2}{4}=\left(t+\frac{a}{2}+i\frac{\sqrt{7}a}{2}\right)\left(t+\frac{a}{2}-i\frac{\sqrt{7}a}{2}\right)$$

であることから、$y(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}w(x)$ とおけば、

$$\begin{aligned}
y'(x)&=-\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}w(x)+\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}w'(x),\\
y''(x)&=\frac{a^2}{4}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}w(x)-a\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}w'(x)+\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}w''(x)
\end{aligned}$$

なので、方程式は

$$\begin{aligned}
0&=y''+ay'+2a^2y\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}w''(x)+\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+2a^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}w(x)\\
&=w''(x)+\frac{7a^2}{4}w(x)
\end{aligned}$$

となり、これは一般解

$$w(x)=C\cos\frac{\sqrt{7}a}{2}x+D\sin\frac{\sqrt{7}a}{2}x$$

を持ちます。従って、元の方程式の一般解は

$$y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}a}{2}x+D\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}a}{2}x$$

です（C, D は任意の定数）。 □

演習問題 12.7 [神戸大理数 17] $y''-(a+b)y'+aby=0$ の一般解を求めて下さい。

方程式を変形すると

$$\begin{aligned}
y''-ay'&=b(y'-ay)\\
(y'-ay)'&=b(y'-ay)\\
y'-ay&=C\mathrm{e}^{bx}
\end{aligned}$$

であり、両辺に指数関数を掛けて

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-ax}y'-a\mathrm{e}^{-ax}y&=C\mathrm{e}^{(b-a)x}\\
\left(\mathrm{e}^{-ax}y\right)'&=C\mathrm{e}^{(b-a)x}
\end{aligned}$$

となりますから、$a\neq b$ であれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-ax}y&=C\mathrm{e}^{(b-a)x}+D\\
y&=C\mathrm{e}^{bx}+D\mathrm{e}^{ax}
\end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数）。

$a=b$ の場合は

$$\left(\mathrm{e}^{-ax}y\right)'=C$$

$$\begin{aligned} e^{-ax}y &= Cx + D \\ y &= (Cx+D)e^{ax} \end{aligned}$$

です（C, D は任意の定数）。 □

演習問題 12.8 [三重大 26] 次の微分方程式の解を求めて下さい：

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

【解答例】こんな解き方は許されるでしょうか・・・

e^{2x} は明らかに方程式を満たしています。また、xe^{2x} も、

$$\left(xe^{2x}\right)'' - 4\left(xe^{2x}\right)' + 4xe^{2x} = 4e^{2x} + 4xe^{2x} - 4e^{2x} - 8xe^{2x} + 4xe^{2x} = 0$$

であって解です。従って線形微分方程式の解の任意の一次結合はまた解である事から

$$y(x) = (A + Bx)e^{2x}$$

が求める一般解です（A, B は任意の定数）。 □

演習問題 12.9 [北大 26] 以下の微分方程式の一般解を求めて下さい。なお、途中の計算手順も詳しく記述して下さい。

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

【解答例】微分作用素を因数分解すれば

$$\left(\frac{d}{dx} + 1\right)\left(\frac{d}{dx} + 2\right) y(x) = 0$$

ですが、ここで $\left(\frac{d}{dx} + 2\right) y(x) = z(x)$ と置けば

$$z' + z = 0$$

となり、これは $z(x) = Ce^{-x}$ である事を意味します（C は任意の定数）。従って

$$\left(\frac{d}{dx} + 2\right) y(x) = Ce^{-x}$$

であり、ここで $y(x) = e^{-2x}g(x)$ と置けば

$$\begin{aligned} g'(x)e^{-2x} &= Ce^{-x} \\ g'(x) &= Ce^{x} \\ g(x) &= Ce^{x} + D \quad \text{（}D\text{ は任意の定数）} \\ y(x) = e^{-2x}g(x) &= Ce^{-x} + De^{-2x} \end{aligned}$$

が分かります。従って求める一般解は $y(x) = Ce^{-x} + De^{-2x}$ です（C, D は任意の定数）。 □

演習問題 12.10 [千葉大 27] 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求め、与えられた初期条件を満たす解曲線の概形を図示してください。

$$y'' + 2y' + 17y = 0, x \geq 0 \quad \text{初期条件：} y(0) = 1, y'(0) = -1$$

【解答例】微分作用素を使って変形すれば

$$\left(\frac{d}{dx} + 1\right)^2 y(x) + 16y(x) = 0$$

ですが、ここで $y(x) = z(x)e^{-x}$ と置けば

$$\begin{aligned} z''(x)e^{-x} + 16z(x)e^{-x} &= 0 \\ z''(x) + 16z(x) &= 0 \\ z''(x) &= -16z(x) \end{aligned}$$

ですからこれは簡単に解けて

$$z(x) = A\cos 4x + B\sin 4x$$

です（A, B は任意の定数）。従って一般解は

$$y(x) = Ae^{-x}\cos 4x + Be^{-x}\sin 4x$$

です。

初期条件によれば、まず $1 = y(0) = A$ であり、

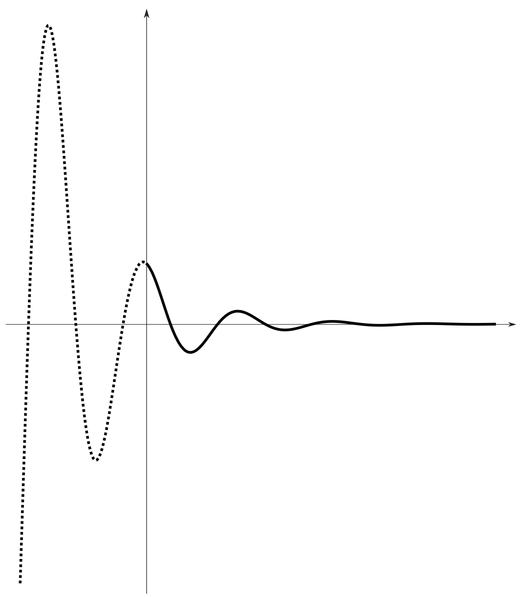
$$y'(x) = -e^{-x}\cos 4x - 4e^{-x}\sin 4x - Be^{-x}\sin 4x + 4Be^{-x}\cos 4x$$

$$y'(0) = -1 + 4B$$

と $y'(0) = -1$ によれば $B = 0$ です。従って与えられた初期条件を満たす解は

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos 4x$$

です。



□

演習問題 12.11 $a = \alpha + i\beta \neq 0$ のとき次の積分を求めてください。

$$I = \int \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,dx, \qquad J = \int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$$

$f(x) = \mathrm{e}^{ax} = v(x) + iw(x)$ と置けば、

$$\int v(x)dx = I, \qquad \int w(x)dx = J$$

です。従って

$$\begin{aligned}
I + iJ &= \int v(x)dx + i\int w(x)dx \\
&= \int f(x)dx \\
&= \int \mathrm{e}^{ax}dx \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C \\
&= \frac{\bar{a}}{|a|^2}\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha - i\beta)(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x + i\alpha\sin\beta x - i\beta\cos\beta x\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + i\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C
\end{aligned}$$

であり、

$$I = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + D, \quad J = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + D$$

が分かります（C は任意の複素定数であり、D は任意の実定数です）。 □