

12 2 階線型微分方程式 その 1

目標
C1. 定数係数同次型 2 階線形微分方程式の一般解を知っている 演習問題 12.1、12.2、12.3、12.4
B1. 定数係数同次型 2 階線形微分方程式を解の公式を使わずに解くことができる 演習問題 12.5、12.6、12.7

12.1 2 階線型微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (12.1)$$

の型の 2 階微分方程式を、2 階線型微分方程式と言います。

右辺、すなわち、未知関数 y を含まない項が 0 である場合、同次型と言い、そうでない場合は非同次型と言います。

また、方程式 (12.1) に対して $R(x)$ を 0 で置き換えて得られる同次型方程式：

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

を、方程式 (12.1) に対応した同次方程式と言います。

12.2 関数の一次独立性

定義 12.2.1 任意の x に対して

$$C_1 v(x) + C_2 w(x) = 0$$

が成り立つような定数が $C_1 = C_2 = 0$ のみであるとき、関数 $v(x), w(x)$ は一次独立であると言います。

例えば $v(x) = kw(x)$ である場合は 1 次独立ではありません (1 次従属といいます)。逆に一次従属であれば、 $v(x) = kw(x)$ であるか、もしくは $w(x) = kv(x)$ となるような定数 $k \neq 0$ があります。

例 12.2.2 1 次独立な解の例 微分方程式 $y'' = 0$ は 2 つの解 $x, 1$ をもちますが、明らかにこれらは一次独立です。一般解は $y = C_1 x + C_2 \cdot 1$ です。

例 12.2.3 指数関数の一次独立性 一般に $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ は $\alpha \neq \beta$ のとき一次独立です。

例 12.2.4 三角関数の一次独立性 $k \neq 0$ のとき $\sin kx, \cos kx$ は一次独立です。

12.3 定数係数・同次型

まず最初に、同次型 2 階線型微分方程式のうち、 $P(x), Q(x)$ が実定数であるものを考えます：

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (12.2)$$

12.3.1 自明なケース： $p = q = 0$ の場合

この場合方程式は $y'' = 0$ であり、2 回積分して一般解 $y = Cx + D$ が得られます。先に見たように解 $x, 1$ は一次独立です。

12.3.2 自明なケース： $p \neq 0, q = 0$ の場合

$$\begin{aligned} y'' + py' &= 0 \\ e^{px} y'' + pe^{px} y' &= 0 \\ (e^{px} y')' &= 0 \\ e^{px} y' &= C \\ y' &= Ce^{-px} \\ y &= -\frac{C}{p} e^{-px} + D = Ce^{-px} + D \end{aligned}$$

12.3.3 自明なケース： $p = 0, q \neq 0$ の場合

$p = 0, q \neq 0$ の場合、方程式は

$$y'' = -qy$$

と書くことができます。

【 $q < 0$ のとき】 $y = e^{\pm\sqrt{-q}x}$ は 2 つの 1 次独立な解です。

$$y = Ce^{\sqrt{-q}x} + De^{\sqrt{-q}x}$$

【 $q > 0$ のとき】 $y = \sin \sqrt{q}x, \cos \sqrt{q}x$ は 2 つの 1 次独立な解です。

$$y = C \sin \sqrt{q}x + D \cos \sqrt{q}x$$

12.4 基本的な計算と微分作用素による記述

事実 12.4.1 $D = \frac{d}{dx}$ と置けば

$$(D - p)^n \{g(x)e^{px}\} = g^{(n)}(x)e^{px}$$

です。また $(D - p)f(x) = 0$ の一般解は $f(x) = Ce^{px}$ です (C は任意定数)。

12.5 相異なる実数解の場合の具体例

12.5.1 因数分解法 ～1階の微分方程式を2回解く事に帰着する～

微分作用素による記述を採用すれば微分方程式：

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$$

はあたかも左辺を因数分解するかの様に

$$\left(\frac{d}{dx} - 3\right) \left\{ \left(\frac{d}{dx} - 2\right) f(x) \right\} = (D - 3)\{(D - 2)f(x)\} = 0$$

と変形する事が出来ます。ここで $(D - 2)f(x) = h(x)$ と置けば、方程式は

$$(D - 3)h(x) = 0$$

と書く事が出来、これは簡単に一般解 $h(x) = C_1 e^{3x}$ が求まります (C_1 は任意の定数)。

そこで元の $f(x)$ に戻してやれば

$$(D - 2)f(x) = C_1 e^{3x} \quad \dots (*)$$

ですからまたここで $f(x) = g(x)e^{2x}$ と置けば、

$$g'(x)e^{2x} = C_1 e^{3x}$$

$$g'(x) = C_1 e^x$$

$$g(x) = C_1 e^x + C_2$$

$$f(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

となって一般解が求まります。

12.5.2 平方完成法 ～自明な2階方程式に帰着する～

同様の記法を使えば同じ微分方程式はあたかも左辺を平方完成するかの様に

$$0 = f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = \left(\frac{d}{dx} - \frac{5}{2}\right)^2 f(x) - \frac{25}{4}f(x) + 6f(x)$$

$$\left(D - \frac{5}{2}\right)^2 f(x) = \frac{1}{4}f(x)$$

と変形する事が出来ます。ここで $f(x) = g(x)e^{\frac{5}{2}x}$ と置けば、最初に注意した事実から

$$\left(D - \frac{5}{2}\right)^2 f(x) = g''(x)e^{\frac{5}{2}x}$$

となっているので、先の方程式は

$$g''(x)e^{\frac{5}{2}x} = \frac{1}{4}g(x)e^{\frac{5}{2}x} \quad \text{すなわち、} \quad g''(x) = \frac{1}{4}g(x)$$

と変形する事が出来ます。これは簡単に一般解が求められて

$$g(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

でした (C_1, C_2 は任意定数) から、結局もとの $f(x)$ に戻してやれば

$$g(x)e^{\frac{5}{2}x} = C_1 e^{\frac{1}{2}x} e^{\frac{5}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} e^{\frac{5}{2}x} \quad \text{すなわち、} \quad f(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

という具合に求める一般解が求まりました。

12.6 実重解の場合の具体例

$$f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 0$$

この微分方程式も同様の記法に従えば

$$(D - 3)^2 f(x) = 0$$

と書く事が出来ますが、ここで $f(x) = g(x)e^{3x}$ と置けば

$$0 = (D - 3)^2 f(x) = g''(x)e^{3x}, \quad \text{従って} \quad g''(x) = 0$$

となってこれは簡単に解が求まって

$$g(x) = C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

です。最後にこれを $f(x)$ に戻してやれば一般解は次の通りです：

$$f(x) = C_1 x e^{3x} + C_2 e^{3x}.$$

12.7 共役な 2 つの複素数解の場合の具体例

12.7.1 平方完成法

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 0$$

も、同様の記法によってあたかも左辺を平方完成するかの様に

$$(D - 1)^2 f(x) - f(x) + 5f(x) = 0, \quad (D - 1)^2 f(x) = -4f(x)$$

と変形する事が出来ます。そこで同じ様に $f(x) = g(x)e^x$ と置けば、

$$(D - 1)^2 (g(x)e^x) = -4g(x)e^x$$

$$g''(x)e^x = -4g(x)e^x$$

$$g''(x) = -4g(x)$$

となりますが、これは簡単に一般解が分かります (C_1, C_2 は任意の定数)：

$$g(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

元に戻してやれば解を得る事が出来ます：

$$f(x)e^{-x} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$f(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x.$$

12.7.2 複素因数分解法

定義 12.7.1 任意の複素数 $z = x + iy$ に対して次のように定めます：

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

事実 12.7.2 $a = \alpha + i\beta \neq 0$ 、 x を実変数とすると

$$(e^{ax})' = a e^{ax}, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

ただし、 C は任意の複素定数です。

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = 0$$

特性方程式は共役な複素数解をもつケースですから、実数係数の範囲では因数分解することは出来ません。しかし係数に虚数を許せば、

$$f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = (D - (1 + 2i)) \{(D - (1 - 2i))f(x)\}$$

と因数分解出来、実数の場合と全く同様に 2 つの解

$$e^{(1+2i)x} = e^x (\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$e^{(1-2i)x} = e^x \{\cos(-2x) + i \sin(-2x)\} = e^x (\cos 2x - i \sin 2x)$$

が『複素数値関数』の範囲内で得られます。しかしこれらを加えたり差をとったりすれば実数値関数の範囲の 2 つの解：

$$e^x \cos 2x, \quad e^x \sin 2x$$

が得られ、これらは一次独立です。従って一般解は次のようになります：

$$f(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x.$$

事実 12.7.3 一般に微分方程式：

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \quad (p, q \text{ は実数})$$

の一般解は、その特性 2 次方程式 $w^2 + pw + q = 0$ の 2 つの解の様子で分類すれば次のいずれかに当てはまります (C_1, C_2 は任意の定数)：

特性方程式の解	微分方程式の一般解
相異なる実数解 w_1, w_2	$y(x) = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x}$
実重解 w	$y(x) = C_1 x e^{wx} + C_2 e^{wx}$
共役な 2 つの複素数解 $\alpha \pm i\beta$	$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

演習問題 12.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$(1) y'' - y' - 6y = 0 \quad (2) y'' + 4y' + 4y = 0 \quad (3) y'' - 4y' + 7y = 0$$

演習問題 12.2 次の初期値問題の解を求めてください。

$$(1) y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$$

$$(2) y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 4$$

$$(3) y'' - 4y' + 7y = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}, y'(0) = 0$$

12.8 問題演習

演習問題 12.3 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$(1) y'' + 2y' - 8y = 0 \quad (2) y'' - 2y' - 3y = 0 \quad (3) y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$(4) y'' + 8y' + 16y = 0 \quad (5) y'' + 6y' + 11y = 0 \quad (6) y'' - 2y' + 6y = 0$$

演習問題 12.4 次の初期値問題の解を求めてください。

$$(1) y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 8$$

$$(2) y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = -8$$

$$(3) y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = -5$$

$$(4) y'' + 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -10$$

$$(5) y'' + 6y' + 11y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = -\frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

$$(6) y'' - 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = \sqrt{5}, y'(0) = 2\sqrt{5}$$

演習問題 12.5 [京大工 13] $y'' - 4y' + 3y = 0$ の一般解を求めて下さい。

演習問題 12.6 [阪大基礎工 13] $y'' + ay' + by = 0$ の解 $y(x)$ を、

$$(1) b = -2a^2 \quad (2) b = \frac{a^2}{4} \quad (3) b = 2a^2$$

のときにそれぞれ求めて下さい (a は実定数とします)。

演習問題 12.7 [神戸大理数 17] $y'' - (a+b)y' + aby = 0$ の一般解を求めて下さい。

演習問題 12.8 [三重大 26] 次の微分方程式の解を求めて下さい：

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

演習問題 12.9 [北大 26] 以下の微分方程式の一般解を求めて下さい。なお、途中の計算手順も詳しく記述して下さい。

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

演習問題 12.10 [千葉大 27] 次の微分方程式の一般解 $y(x)$ を求め、与えられた初期条件を満たす解曲線の概形を図示して下さい。

$$y'' + 2y' + 17y = 0, x \geq 0 \quad \text{初期条件: } y(0) = 1, y'(0) = -1$$

演習問題 12.11 $a = \alpha + i\beta \neq 0$ のとき次の積分を求めてください。

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx, \quad J = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$$