13　２階線型微分方程式　その２

目標
C1. 簡単な非同次方程式の特殊解が求められる
B1. 基本的な非同次方程式の一般解を求められる 演習問題 13.1、13.2
A1. 様々な解法を実行できる 演習問題 13.3、13.5

13.1　定数係数・非同次型

非同次型の２階定数係数線型微分方程式：

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

の一般解を求めましょう。

13.2　因数分解法

問題 13.2.1　２階の定数係数・非同次微分方程式：

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = (12x - 7)\mathrm{e}^{-x}$$

の一般解を求めてください。

左辺を因数分解するかの様に

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 3\right)\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2\right)f(x)\right\} = (D-3)\{(D-2)f(x)\} = (12x-7)\mathrm{e}^{-x}$$

と変形する事が出来、ここで $(D-2)f(x) = h(x)\mathrm{e}^{3x}$ と置けば、方程式は

$$(D-3)\{h(x)\mathrm{e}^{3x}\} = (12x-7)\mathrm{e}^{-x}$$

と書く事が出来ます。すると

事実 13.2.2　$D - p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - p$ と置けば

$$(D-p)\{g(x)\mathrm{e}^{px}\} = g'(x)\mathrm{e}^{px}$$

です。また $(D-p)f(x) = 0$ の一般解は $f(x) = C\mathrm{e}^{px}$ です（C は任意定数)。

から（上記事実は、覚えていないのであればそれでも別に良く、左辺を計算すれば右辺になることは簡単に分かります)、

$$\begin{aligned}
h'(x)\mathrm{e}^{3x} &= (12x-7)\mathrm{e}^{-x}\\
h'(x) &= (12x-7)\mathrm{e}^{-4x}\\
h(x) &= \int (12x-7)\mathrm{e}^{-4x}dx\\
&= (12x-7)\frac{1}{-4}\mathrm{e}^{-4x} - \int 12\frac{1}{-4}\mathrm{e}^{-4x}dx\\
&= -\frac{12x-7}{4}\mathrm{e}^{-4x} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-4x} + C_1\\
h(x)\mathrm{e}^{3x} &= (-3x+1)\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{3x}
\end{aligned}$$

となります（C_1 は任意の定数)。

そこでこの結果を元の $f(x)$ に戻してやれば、$f(x) = g(x)\mathrm{e}^{2x}$ として

$$\begin{aligned}
(D-2)\{g(x)\mathrm{e}^{2x}\} &= (-3x+1)\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{3x}\\
g'(x)\mathrm{e}^{2x} &= (-3x+1)\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{3x}\\
g'(x) &= (-3x+1)\mathrm{e}^{-3x} + C_1\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

両辺積分して

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int (-3x+1)\mathrm{e}^{-3x}dx + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\\
&= (-3x+1)\frac{1}{-3}\mathrm{e}^{-3x} - \int(-3)\frac{1}{-3}\mathrm{e}^{-3x}dx + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\\
&= \frac{3x-1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\\
f(x) &= x\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

となって一般解が求まります（C_1, C_2 は任意の定数)。 □

演習問題 13.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y'' - y' - 6y = 8\mathrm{e}^{2x}$　(2) $y'' - y' - 6y = 10\mathrm{e}^{3x}$　(3) $y'' + 4y' + 4y = 10\mathrm{e}^{-2x}$

(1) 微分演算子を使って書けば

$$(D-3)(D+2)y = 8\mathrm{e}^{2x}$$

です。ここで $(D+2)y = z$ と置けば

$$(D-3)z = 8\mathrm{e}^{2x}$$

であり、両辺に $z(x) = w(x)\mathrm{e}^{3x}$ と置いて変形すれば

$$\begin{aligned}(D-3)(w(x)\mathrm{e}^{3x}) &= 8\mathrm{e}^{2x}\\ w'(x)\mathrm{e}^{3x} &= 8\mathrm{e}^{2x}\\ w'(x) &= 8\mathrm{e}^{-x}\\ w(x) &= -8\mathrm{e}^{-x} + C_1\end{aligned}$$

が分かります。従って

$$(D+2)y = z = w(x)\mathrm{e}^{3x} = -8\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x}$$

となるのでここでまた $y = v\mathrm{e}^{-2x}$ と置けば

$$\begin{aligned}(D+2)(v\mathrm{e}^{-2x}) &= -8\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x}\\ v'\mathrm{e}^{-2x} &= -8\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x}\\ v' &= -8\mathrm{e}^{4x} + C_1\mathrm{e}^{5x}\\ v &= -2\mathrm{e}^{4x} + C_1\mathrm{e}^{5x} + C_2\\ y = v\mathrm{e}^{-2x} &= -2\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}\end{aligned}$$

が得られます。

(2) 微分演算子を使って書けば

$$(D-3)(D+2)y = 10\mathrm{e}^{3x}$$

です。ここで $(D+2)y = z$ と置けば

$$(D-3)z = 8\mathrm{e}^{2x}$$

であり、両辺に $z(x) = w(x)\mathrm{e}^{3x}$ と置いて変形すれば

$$\begin{aligned}(D-3)(w(x)\mathrm{e}^{3x}) &= 10\mathrm{e}^{3x}\\ w'(x)\mathrm{e}^{3x} &= 10\mathrm{e}^{3x}\\ w'(x) &= 10\\ w(x) &= 10x + C_1\end{aligned}$$

が分かります。従って

$$(D+2)y = z = w(x)\mathrm{e}^{3x} = (10x + C_1)\mathrm{e}^{3x}$$

となるのでここでまた $y = v\mathrm{e}^{-2x}$ と置けば

$$\begin{aligned}(D+2)(v\mathrm{e}^{-2x}) &= (10x + C_1)\mathrm{e}^{3x}\\ v'\mathrm{e}^{-2x} &= (10x + C_1)\mathrm{e}^{3x}\\ v' &= (10x + C_1)\mathrm{e}^{5x}\\ v &= \int (10x + C_1)\mathrm{e}^{5x}dx\\ &= \left(2x + \frac{C_1}{5}\right)\mathrm{e}^{5x} - \int 2\mathrm{e}^{5x}dx\\ &= 2x\mathrm{e}^{5x} + C_1\mathrm{e}^{5x} + C_2\\ y = v\mathrm{e}^{-2x} &= 2x\mathrm{e}^{3x} + C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}\end{aligned}$$

が得られます。

(3) 微分演算子を使って書けば

$$(D+2)^2 y = 10\mathrm{e}^{-2x}$$

です。ここで $(D+2)y = z$ と置けば

$$(D+2)z = 10\mathrm{e}^{-2x}$$

であり、両辺に $z(x) = w(x)\mathrm{e}^{-2x}$ と置いて変形すれば

$$(D+2)(w(x)\mathrm{e}^{-2x}) = 10\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\begin{aligned} w'(x)\mathrm{e}^{-2x} &= 10\mathrm{e}^{-2x} \\ w'(x) &= 10 \\ w(x) &= 10x + C_1 \end{aligned}$$

が分かります。従って

$$(D+2)y = z = w(x)\mathrm{e}^{-2x} = (10x + C_1)\mathrm{e}^{-2x}$$

となるのでここでまた $y = v\mathrm{e}^{-2x}$ と置けば

$$\begin{aligned} (D+2)(v\mathrm{e}^{-2x}) &= (10x + C_1)\mathrm{e}^{-2x} \\ v'\mathrm{e}^{-2x} &= (10x + C_1)\mathrm{e}^{-2x} \\ v' &= 10x + C_1 \\ v &= 5x^2 + C_1 x + C_2 \\ y = v\mathrm{e}^{-2x} &= 5x^2\mathrm{e}^{-2x} + C_1 x\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

が得られます。 □

13.3　解の構造に注目するやり方

一般解は分からなくても、何らかの方法で解が１つ見つかった場合（それを $g(x)$ とします)、求める一般解を $f(x)$ として

$$\begin{aligned} f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) &= (12x - 7)\mathrm{e}^{-x} \\ g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) &= (12x - 7)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

を辺々引けば

$$\{f''(x) - g''(x)\} - 5\{f'(x) - g'(x)\} + 6\{f(x) - g(x)\} = 0$$

であって、$h(x) = f(x) - g(x)$ は任意定数を含みますから元の非同次方程式に対応した同次方程式 $h''(x) - 5h'(x) + 6h(x) = 0$ の一般解になっています。

一般に非同次方程式の解は

(非同次方程式の一般解)＝(非同次方程式の１つの解)＋(同次方程式の一般解)

と云う構造をしていますので、同次方程式の一般解は前回見た様に求めて、後は１つの解を何らかの方法で見つけてくれば良いわけです。

未知関数を含まない部分が今回の様に『(１次式) × (指数関数)』であるならば、$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ の形をした解があると仮定して、これがこの非同次方程式を満たす様に係数 a, b を決めてしまうと云う方法があります。

実際、$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ を方程式の左辺に代入してみると、

$$\begin{aligned} f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) &= (ax - 2a + b)\mathrm{e}^{-x} - 5(-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x} + 6(ax+b)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (12ax - 7a + 12b)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

ですからこれが左辺 $(12x - 7)\mathrm{e}^{-x}$ と一致するためには $a = 1, b = 0$ です。

従ってこの非同次方程式の１つの解 $x\mathrm{e}^{-x}$ が求まりました。これと同次方程式の一般解（これはさっき求めましたね）を使えば結局非同次方程式の一般解は

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の定数})$$

となる事が分かります（当たり前ですがさっきの解と同じです)。

事実 13.3.1　２階定数係数線形微分方程式：$y'' + py' + qy = R(x)$ は、$R(x)$ の形によって以下の特殊解をもちます (m, n は非負整数、A, B, A_j, K, L は定数とします)：

$R(x)$	特性方程式の根	特殊解
$K\mathrm{e}^{\alpha x}$	α は m 重解	$Ax^m\mathrm{e}^{\alpha x}$
$K\cos\beta x + L\sin\beta x$	$i\beta$ は m 重解	$x^m(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
Kx^n	0 は m 重解	$x^m(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)$
$K\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + L\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$	$\alpha + i\beta$ は m 重解	$x^m\mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

演習問題 13.2　次の微分方程式の特殊解を１つ求めてください。

(1) $y'' + y' - 6y = 12\mathrm{e}^{3x}$　(2) $y'' - 6y' + 8y = 5\mathrm{e}^{3x}$　(3) $y'' + y' - 6y = 15\mathrm{e}^{2x}$
(4) $y'' + 9y = 10\sin 2x$　(5) $y'' + 16y = 32\sin 4x$　(6) $y'' + 25y = 27\sin 4x$
(7) $y'' - 6y' + 8y = 24x + 22$　(8) $y'' - 2y' = -12x + 2$　(9) $y'' - 4y' + 4y = -4x + 12$

(1) 特性方程式は $0 = t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2)$ であり、$t = 3$ はその解ではありません（0 重解）から、この微分方程式は $y = K\mathrm{e}^{3x}$ の型の解をもちます。代入して係数

K を求めると

$$9K+3K-6K=12 \quad \text{従って} \quad K=2$$

ですから、$y=2\mathrm{e}^{3x}$ は１つの解です。

(2) 特性方程式は $0=t^2-6t+8=(t-4)(t-2)$ であり、$t=3$ はその解ではありませんから、この微分方程式は $y=K\mathrm{e}^{3x}$ の型の解をもちます。代入して係数 K を求めると

$$9K-18K+8K=5 \quad \text{従って} \quad K=-5$$

ですから、$y=-5\mathrm{e}^{3x}$ は１つの解です。

(3) 特性方程式は $0=t^2+t-6=(t+3)(t-2)$ であり、$t=2$ は１重解ですから、この微分方程式は $y=Kx\mathrm{e}^{2x}$ の型の解をもちます。

$$\begin{aligned}(Kx\mathrm{e}^{2x})''+(Kx\mathrm{e}^{2x})'-6Kx\mathrm{e}^{2x}&=15\mathrm{e}^{2x}\\ \left\{(K+2Kx)\mathrm{e}^{2x}\right\}'+(K+2Kx)\mathrm{e}^{2x}-6K\mathrm{e}^{2x}&=15\mathrm{e}^{2x}\\ 4K+4Kx+K+2Kx-6Kx&=15\\ K&=3\end{aligned}$$

従って $y=3x\mathrm{e}^{2x}$ は１つの解です。

(4) $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ が解であると仮定すると

$$\begin{aligned}-4A\cos 2x-4B\sin 2x+9A\cos 2x+9B\sin 2x&=10\sin 2x\\ 5A\cos 2x+5B\sin 2x&=10\sin 2x\end{aligned}$$

であれば良く、$A=0, B=-2$ が得られます。従って $y=-2\sin 2x$ は１つの解です。

(5) $y=x(A\cos 4x+B\sin 4x)$ が解となるように A, B を求めます。

$$\begin{aligned}\{(A+4Bx)\cos 4x+(B-4Ax)\sin 4x\}'+16x(A\cos 4x+B\sin 4x)&=32\sin 4x\\ (8B-16Ax)\cos 4x+(-8A-16Bx)\sin 4x+16x(A\cos 4x+B\sin 4x)&=32\sin 4x\\ 8B\cos 4x-8A\sin 4x&=32\sin 4x\end{aligned}$$

従って $A=-4, B=0$ が得られますので、$y=-4x\cos 4x$ は１つの解です。

(6) $y=A\cos 4x+B\sin 4x$ が解になるように定数 A, B を求めます。

$$\begin{aligned}(4B\cos 4x-4A\sin 4x)'+25(A\cos 4x+B\sin 4x)&=27\sin 4x\\ 9A\cos 4x+9B\sin 4x&=27\sin 4x\end{aligned}$$

従って $A=0, B=3$ であり、$y=3\sin 4x$ は解の１つです。

(7) $y=Ax+B$ の型の解を探せば、

$$\begin{aligned}0-6A+8(Ax+B)&=24x+22\\ 8Ax-6A+8B&=24x+22\end{aligned}$$

が得られ、$A=3, B=5$ が分かります。従って $y=3x+5$ は１つの解です。

(8) 特性方程式は $t^2-2t=0$ であり、$t=0$ は解（１重解）ですので、$y=Ax^2+Bx$ の形の解を探します。

$$2A-4Ax-2B=-12x+2$$

から $A=3, B=2$ が分かるので、$y=3x^2+2x$ は１つの解です。

(9) $y=Ax+B$ の型の解を探します。

$$0-4A+4Ax+4B=-4x+12$$

から $A=-1, B=2$ ですので、$y=-x+2$ は１つの解です。

□

13.4　おまけ：定数変化法による特殊解の探索

方程式：

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)=(12x-7)\mathrm{e}^{-x}$$

に対応した同次方程式の一般解は

$$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$$

でした。ここで元の非同次方程式の解で

$$y=H(x)\mathrm{e}^{3x}+K(x)\mathrm{e}^{2x}$$

の形であって、特に

$$H'(x)\mathrm{e}^{3x} + K'(x)\mathrm{e}^{2x} = 0 \tag{13.1}$$

を満たすものを求めてみましょう。

微分すれば

$$\begin{aligned} y' &= H'\mathrm{e}^{3x} + 3H\mathrm{e}^{3x} + K'\mathrm{e}^{2x} + 2K\mathrm{e}^{2x} \\ &= 3H\mathrm{e}^{3x} + 2K\mathrm{e}^{2x} \\ y'' &= (3H' + 9H)\mathrm{e}^{3x} + (2K' + 4K)\mathrm{e}^{2x} \\ y'' - 5y' + 6y &= 3H'\mathrm{e}^{3x} + 2K'\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

ですから、非同次方程式の解であることにより

$$3H'(x)\mathrm{e}^{3x} + 2K'(x)\mathrm{e}^{2x} = (12x - 7)\mathrm{e}^{-x} \tag{13.2}$$

が分かります。

(13.1)、(13.2) から $H'(x), K'(x)$、更には $H(x), K(x)$ を求めれば（１つ求めれば良いので、積分定数は 0 として計算します）

$$\begin{aligned} H'(x)\mathrm{e}^{3x} &= (12x - 7)\mathrm{e}^{-x} \\ H'(x) &= (12x - 7)\mathrm{e}^{-4x} \\ H(x) &= \int (12x - 7)\mathrm{e}^{-4x} dx \\ &= (12x - 7)\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} - \int 12\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} dx \\ &= \left(-3x + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} \\ &= (-3x + 1)\mathrm{e}^{-4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'(x)\mathrm{e}^{2x} &= -(12x - 7)\mathrm{e}^{-x} \\ K'(x) &= (7 - 12x)\mathrm{e}^{-3x} \\ K(x) &= \int (7 - 12x)\mathrm{e}^{-3x} dx \\ &= (7 - 12x)\left(-\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-3x} - \int (-12)\left(-\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-3x} dx \\ &= \left(4x - \frac{7}{3} + \frac{4}{3}\right)\mathrm{e}^{-3x} \\ &= (4x - 1)\mathrm{e}^{-3x} \end{aligned}$$

従って、

$$H(x)\mathrm{e}^{3x} + K(x)\mathrm{e}^{2x} = (-3x + 1)\mathrm{e}^{-x} + (4x - 1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$$

が１つの解として見つかります。

確かにこの方法でも特殊解が見つかりますが、今回のように『右辺』が簡単な場合は特殊解の予想ができますので事実 13.3.1 を使う方法の方が簡単ですね。

ただし、『右辺』が事実 13.3.1 のリストにない形の場合には有効な方法になるでしょう。

演習問題 13.3 次の微分方程式の特殊解を１つ求めてください。

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

対応した同次方程式の一般解は $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ですから、非同次方程式の解で

$$y = H(x)\cos x + K(x)\sin x$$

の形であって

$$H'(x)\cos x + K'(x)\sin x = 0$$

を満たすものを探します。

微分すれば

$$\begin{aligned} y' &= H'\cos x - H\sin x + K'\sin x + K\cos x \\ &= -H\sin x + K\cos x \\ y'' &= -H'\sin x - H\cos x + K'\cos x - K\sin x \\ y'' + y &= -H'\sin x + K'\cos x \end{aligned}$$

ですから

$$-H'\sin x + K'\cos x = \frac{1}{\sin x}$$

です。従って

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H' \\ K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}H'\\K'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sin x}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{\tan x}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}H\\K\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-x\\ \log|\sin x|\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が分かり（解が１つ分かれば良いので、積分定数は 0 としました）、１つの解

$$y = -x\cos x + \sin x \log|\sin x|$$

が得られます。 □

13.5 問題演習

演習問題 13.4 次の微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y'' - 6y' + 8y = 8\mathrm{e}^{2x}$ (2) $y'' - 4y' + 4y = 10\mathrm{e}^{2x}$ (3) $y'' - 6y' + 9y = 8\mathrm{e}^{3x}$

(4) $y'' + 9y = 12\cos 3x$ (5) $y'' + 16y = 14\cos 3x$ (6) $y'' + 25y = 30\cos 5x$

(7) $y'' - 6y' = 24x + 20$ (8) $y'' - 2y' - 3y = 6x + 1$ (9) $y'' = 12x + 10$

(1) まず因数分解法です。

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 8\mathrm{e}^{2x}\\ (D-2)\{(D-4)y\} &= 8\mathrm{e}^{2x}\\ D\{(D-4)y\} - 2\{(D-4)y\} &= 8\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{-2x}D\{(D-4)y\} - 2\mathrm{e}^{-2x}\{(D-4)y\} &= 8\\ D\{\mathrm{e}^{-2x}(D-4)y\} &= 8\\ \mathrm{e}^{-2x}(D-4)y &= 8x + C\\ \mathrm{e}^{-4x}(D-4)y &= (8x+C)\mathrm{e}^{-2x}\\ \mathrm{e}^{-4x}Dy - 4\mathrm{e}^{-4x}y &= (8x+C)\mathrm{e}^{-2x}\\ D\{\mathrm{e}^{-4x}y\} &= (8x+C)\mathrm{e}^{-2x}\\ \mathrm{e}^{-4x}y &= \int (8x+C)\mathrm{e}^{-2x}dx\\ &= (8x+C)\frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x} - \int 8\frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}dx\\ &= -\frac{1}{2}(8x+C)\mathrm{e}^{-2x} + 4\int \mathrm{e}^{-2x}dx\\ &= -\frac{1}{2}(8x+C)\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-2x} + D\\ &= -4x\mathrm{e}^{-2x} + C\mathrm{e}^{-2x} + D\\ y &= -4x\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{4x}\end{aligned}$$

次に解の構造法です。
対応した同次方程式の一般解は

$$C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{4x}$$

です。
また、$ax\mathrm{e}^{2x}$ が解であると仮定すると、

$$(D-4)\{(D-2)(ax\mathrm{e}^{2x})\} = (D-4)(a\mathrm{e}^{2x}) = -2a\mathrm{e}^{2x}$$

ですから、$a = -4$ であれば良く、非同次方程式の一般解は

$$y = -4x\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{4x}$$

です。

(2) まず因数分解法です。

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= 10\mathrm{e}^{2x}\\ (D-2)\{(D-2)y\} &= 10\mathrm{e}^{2x}\\ D\{(D-2)y\} - 2(D-2)y &= 10\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{e}^{-2x}D\{(D-2)y\} - 2\mathrm{e}^{-2x}(D-2)y &= 10\\ D\{\mathrm{e}^{-2x}(D-2)y\} &= 10\\ \mathrm{e}^{-2x}(D-2)y &= 10x + C\\ \mathrm{e}^{-2x}Dy - 2\mathrm{e}^{-2x}y &= 10x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\{\mathrm{e}^{-2x}y\} &= 10x + C \\ \mathrm{e}^{-2x}y &= 5x^2 + Cx + D \\ y &= 5x^2\mathrm{e}^{2x} + Cx\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

次いで解の構造法。対応した同次方程式の一般解は

$$(Cx + D)\mathrm{e}^{2x}$$

です。

また、$ax^2\mathrm{e}^{2x}$ が解であると仮定すると

$$(D-2)\{(D-2)(ax^2\mathrm{e}^{2x})\} = (D-2)\{2ax\mathrm{e}^{2x}\} = 2a\mathrm{e}^{2x}$$

ですから $a = 5$ であれば良いことが分かります。従って求める一般解は

$$y = 5x^2\mathrm{e}^{2x} + (Cx + D)\mathrm{e}^{2x}$$

です。

(3) 全く同様なので略。

(4) 対応した同次方程式の一般解は

$$C\cos 3x + D\sin 3x$$

です。

また、$y = vx\cos 3x + wx\sin 3x$ が解であるのは

$$\begin{aligned} y' &= v\cos 3x - 3vx\sin 3x + w\sin 3x + 3wx\cos 3x \\ y'' &= -3v\sin 3x - 3v\sin 3x - 9vx\cos 3x + 3w\cos 3x + 3w\cos 3x - 9wx\sin 3x \\ &= (-9vx + 6w)\cos 3x + (-9wx - 6v)\sin 3x \\ y'' + 9y &= 6w\cos 3x - 6v\sin 3x \end{aligned}$$

から $w = 2, v = 0$ のときであり、$2x\sin 3x$ は１つの解です。従って求める一般解は

$$y = 2x\sin 3x + C\cos 3x + D\sin 3x$$

です。

pb

(5)(6) 同様につき省略。

(7) 対応した同次方程式の一般解は

$$C\mathrm{e}^{6x} + D$$

です。以下準備中。

演習問題 13.5 次の微分方程式の特殊解を１つ求めてください。

(1) $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5}$ (2) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-4x}}$

(1) 全く同様の計算によって

$$\begin{cases} H'(x)\mathrm{e}^{3x} + K'(x)\mathrm{e}^{2x} = 0 \\ 3H'(x)\mathrm{e}^{3x} + 2K'(x)\mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5} \end{cases}$$

が得られますので、これを解いていきます。まず $H'(x)$ は

$$\begin{aligned} H'(x)\mathrm{e}^{3x} &= \frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5} \\ H'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5} \\ H(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5}dx \end{aligned}$$

と変形され、$1 - \mathrm{e}^{-x} = y$ と置けば

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(1-y)^2}{y^5}dy \\ &= \int \left(y^{-3} - 2y^{-4} + y^{-5}\right)dy \\ &= -\frac{1}{2}y^{-2} + \frac{2}{3}y^{-3} - \frac{1}{4}y^{-4} \\ &= -\frac{6y^2 - 8y + 3}{12y^4} \\ &= -\frac{6\mathrm{e}^{-2x} - 4\mathrm{e}^{-x} + 1}{12(1-\mathrm{e}^{-x})^4} \end{aligned}$$

です（積分定数は０としました）。

一方 $K'(x)$ は、

$$\begin{aligned} K'(x)\mathrm{e}^{2x} &= -\frac{1}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5} \\ K'(x) &= -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5} \\ K(x) &= -\int \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^5}dx \end{aligned}$$

と変形され、$1-\mathrm{e}^{-x}=y$ と置けば

$$\begin{aligned} &= -\int \frac{1-y}{y^5}dy \\ &= \int (y^{-4}-y^{-5})dy \\ &= -\frac{1}{3}y^{-3}+\frac{1}{4}y^{-4} \\ &= \frac{3-4y}{12y^4} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^{-x}-1}{12(1-\mathrm{e}^{-x})^4} \end{aligned}$$

が得られます。従って

$$\begin{aligned} y &= H(x)\mathrm{e}^{3x}+K(x)\mathrm{e}^{2x} \\ &= -\frac{6\mathrm{e}^{x}-4\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}{12(1-\mathrm{e}^{-x})^4}+\frac{4\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}}{12(1-\mathrm{e}^{-x})^4} \\ &= \frac{-2\mathrm{e}^{x}+3\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{3x}}{12(1-\mathrm{e}^{-x})^4} \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{x}-2)}{12(1-\mathrm{e}^{-x})^4} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{5x}(\mathrm{e}^{x}-2)}{12(\mathrm{e}^{x}-1)^3} \end{aligned}$$

が１つの解であることが分かります。

(2) 対応した同次方程式：$y''-6y'+8y=0$ の一般解は

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{4x}$$

でしたから、非同次方程式の解を

$$y=H\mathrm{e}^{2x}+K\mathrm{e}^{4x}$$

の形で、

$$H'\mathrm{e}^{2x}+K'\mathrm{e}^{4x}=0$$

を満たすような範囲で見つけましょう。

微分すれば

$$\begin{aligned} y' &= H'\mathrm{e}^{2x}+2H\mathrm{e}^{2x}+K'\mathrm{e}^{4x}+4K\mathrm{e}^{4x} \\ &= 2H\mathrm{e}^{2x}+4K\mathrm{e}^{4x} \\ y'' &= 2H'\mathrm{e}^{2x}+4H\mathrm{e}^{2x}+4K'\mathrm{e}^{4x}+16K\mathrm{e}^{4x} \\ y''-6y'+8y &= 2H'\mathrm{e}^{2x}+4K'\mathrm{e}^{4x} \end{aligned}$$

から

$$2H'\mathrm{e}^{2x}+4K'\mathrm{e}^{4x}=\frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-4x}}$$

が分かります。

従って

$$\begin{cases} H'\mathrm{e}^{2x}+K'\mathrm{e}^{4x}=0 \\ 2H'\mathrm{e}^{2x}+4K'\mathrm{e}^{4x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-4x}} \end{cases}$$

を解いて H, K を求めます。

$$\begin{aligned} 2H'\mathrm{e}^{2x} &= -\frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-4x}} \\ H' &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-4x}} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} \\ H &= -\frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}dx \\ &= -\frac{1}{4}\log|\mathrm{e}^{2x}+1| \end{aligned}$$

$$2K'\mathrm{e}^{4x}=\frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-4x}}$$

$$
\begin{aligned}
K'\mathrm{e}^{4x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-4x}} \\
K' &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-4x}} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} \\
K &= -\frac{1}{4}\int\frac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}dx \\
&= -\frac{1}{4}\log|1+\mathrm{e}^{-2x}| \\
&= -\frac{1}{4}\log\mathrm{e}^{-2x}|\mathrm{e}^{2x}+1| \\
&= \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\log|\mathrm{e}^{2x}+1|
\end{aligned}
$$

以上から

$$
\begin{aligned}
y &= H\mathrm{e}^{2x}+K\mathrm{e}^{4x} \\
&= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\log|\mathrm{e}^{2x}+1|+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\log|\mathrm{e}^{2x}+1| \\
&= \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}+1)\log|\mathrm{e}^{2x}+1|
\end{aligned}
$$

という解が得られます。 □

演習問題 13.6 [阪大基礎工 H9] 微分方程式

$$y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x \qquad \cdots(*)$$

について、以下の問いに答えて下さい。

(1) 対応した同次方程式の一般解を求めて下さい。

(2) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x$ の解を１つ求めて下さい。

(3) $y''-2y'+5y=x\mathrm{e}^x$ の解を１つ求めて下さい。

(4) $(*)$ の一般解を求めて下さい。

(5) $y(0)=a, \quad y'(0)=b$ のときの $(*)$ の解を求めて下さい。

【解答例】折角ですのでここでは複素数を使ったやり方でやってみましょう。

(1) 対応する同次方程式は $y''-2y'+5y=0$ であり、特性多項式を因数分解すると

$$t^2-2t+5=(t-1)^2+4=(t-1+2i)(t-1-2i)$$

ですので、

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1+2i\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1-2i\right)y(x)=0$$

となり、ここで $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1-2i\right)y(x)=w(x)$ とおけば、

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1+2i\right)w(x)=0$$

であり、両辺に指数関数を掛ければ

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{(-1+2i)x}w'(x)+(-1+2i)\mathrm{e}^{(-1+2i)x}w(x) &= 0 \\
\left\{\mathrm{e}^{(-1+2i)x}w(x)\right\}' &= 0 \\
\mathrm{e}^{(-1+2i)x}w(x) &= C \\
w(x) &= C\mathrm{e}^{(1-2i)x}
\end{aligned}
$$

となって、これを元に戻せば

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1-2i\right)y(x) &= C\mathrm{e}^{(1-2i)x} \\
\mathrm{e}^{(-1-2i)x}y'(x)+(-1-2i)\mathrm{e}^{(-1-2i)x}y(x) &= C\mathrm{e}^{(1-2i)x}\mathrm{e}^{(-1-2i)x} \\
\left\{\mathrm{e}^{(-1-2i)x}y(x)\right\}' &= C\mathrm{e}^{(-4i)x} \\
\mathrm{e}^{(-1-2i)x}y(x) &= C\mathrm{e}^{(-4i)x}+D \\
y(x) &= C\mathrm{e}^{(1-2i)x}+D\mathrm{e}^{(1+2i)x}
\end{aligned}
$$

となります（C, D は任意の定数)。実関数の範囲で書き直せば

$$y(x)=C\mathrm{e}^x\cos 2x+D\mathrm{e}^x\sin 2x$$

となってこれが求める一般解です。

(2) 明らかに $\frac{1}{4}\mathrm{e}^x$ は解の一つです。

(3) $y(x)=v(x)\mathrm{e}^x$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
\{v''(x)+2v'(x)+v(x)\}\mathrm{e}^x-2\{v'(x)+v(x)\}\mathrm{e}^x+5v(x)\mathrm{e}^x &= x\mathrm{e}^x \\
\{v''(x)+4v(x)\}\mathrm{e}^x &= x\mathrm{e}^x
\end{aligned}
$$

$$v''(x) + 4v(x) = x$$

となり、$v(x) = \frac{1}{4}x$、従って $y(x) = \frac{1}{4}x\mathrm{e}^x$ は (3) の方程式の一つの解です。

(4) 一般解は、対応した同次式の一般解と、特殊解の和でしたから、

$$y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x\cos 2x + D\mathrm{e}^x\sin 2x$$

が求める一般解です（C, D は任意の定数）。

(5) $y(0) = a$ によれば、

$$a = \frac{1}{4} + C \quad \text{すなわち、} \quad C = a - \frac{1}{4}$$

であり、$y'(0) = b$ によれば

$$b = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + C + 2D = \frac{1}{4} + a + 2D \quad \text{すなわち、} \quad D = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{8}$$

なので、求める解は

$$y(x) = \frac{1}{4}(1+x)\mathrm{e}^x + \left(a - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^x\cos 2x + \left(\frac{b-a}{2} - \frac{1}{8}\right)\mathrm{e}^x\sin 2x$$

です。 □

演習問題 13.7 [東大工 H11] 微分方程式 $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^x$, $y(0) = p$, $y'(0) = q$ の解を求めて下さい。

【解答例】まず対応した同次式の一般解を求めます。特性多項式は

$$t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4 = (t-1+2i)(t-1-2i)$$

ですから、$y(x) = \mathrm{e}^x w(x)$ とおくと、

$$y'(x) = \mathrm{e}^x w(x) + \mathrm{e}^x w'(x), \quad y''(x) = \mathrm{e}^x w(x) + 2\mathrm{e}^x w'(x) + \mathrm{e}^x w''(x)$$

より、

$$\mathrm{e}^x w''(x) + 4\mathrm{e}^x w(x) = 0, \quad \text{すなわち} \quad w''(x) + 4w(x) = 0$$

となって、この方程式は一般解 $w(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$ をもちます。従って元の方程式（同次）の一般解は

$$y(x) = C\mathrm{e}^x\cos 2x + D\mathrm{e}^x\sin 2x$$

です（C, D は任意の定数）。

また、元の非同次方程式は特殊解 $y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x$ を持つので一般解は

$$y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x\cos 2x + D\mathrm{e}^x\sin 2x$$

であり、これに初期条件を代入して係数を求めると $y(0) = p$ から

$$p = \frac{1}{4} + C, \quad \text{すなわち} \quad C = p - \frac{1}{4}$$

であり、さらに $y'(0) = q$ から

$$q = \frac{1}{4} + C + 2D = p + 2D, \quad \text{すなわち} \quad D = \frac{q-p}{2}$$

となり、求める解は次の様になります：

$$y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + \left(p - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^x\cos 2x + \frac{q-p}{2}\mathrm{e}^x\sin 2x.$$

□

演習問題 13.8 [名工大 H9] (1) 微分方程式 $y'' + 2y' - 3y = x\mathrm{e}^x$ を解くために、$y(x) = z(x)\mathrm{e}^x$ とおくと、微分方程式 $z'' + az' + bz = x$ が導かれる。定数 a, b の値を求めて下さい。

(2) 上で導かれた微分方程式 $z'' + az' + bz = x$ の一般解を求めて下さい。

【解答例】(1) $y(x) = z(x)\mathrm{e}^x$ とおけば、

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= x\mathrm{e}^x \\ \{z''(x)\mathrm{e}^x + 2z'(x)\mathrm{e}^x + z(x)\mathrm{e}^x\} + 2\{z'(x)\mathrm{e}^x + z(x)\mathrm{e}^x\} - 3z(x)\mathrm{e}^x &= x\mathrm{e}^x \\ z''(x)\mathrm{e}^x + 4z'(x)\mathrm{e}^x &= x\mathrm{e}^x \\ z''(x) + 4z'(x) &= x \end{aligned}$$

となるので $a = 4, b = 0$ です。

(2) (1) で求めた方程式

$$z''(x) + 4z'(x) = x$$

に於いて、両辺に指数関数を書けると

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{4x}z''(x) + 4\mathrm{e}^{4x}z'(x) &= x\mathrm{e}^{4x} \\
\left(\mathrm{e}^{4x}z'(x)\right)' &= x\mathrm{e}^{4x} \\
\mathrm{e}^{4x}z'(x) &= \int x\mathrm{e}^{4x}dx \\
&= \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{4x}dx \\
&= \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{4x} + C \\
z'(x) &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{16} + C\mathrm{e}^{-4x} \\
z(x) &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + C\mathrm{e}^{-4x} + D
\end{aligned}$$

となって一般解が求められました（C, D は任意の定数）。 □

演習問題 13.9 [名工大 H14] 定数係数２階線形微分方程式

$$y'' - y' - 2y = 20\cos 2x$$

の初期条件 $y(0) = 2,\ y'(0) = -4$ を満たす解 $y(x)$ を求めて下さい。

【解答例】この方程式の左辺の微分作用素を因数分解すれば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1\right)y(x) = 20\cos 2x$$

ですので、$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1\right)y(x) = w(x)$ とおけば、

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 2\right)w(x) = 20\cos 2x$$

となります。そこで両辺に指数関数を掛ければ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2x}w'(x) - 2\mathrm{e}^{-2x}w(x) &= 20\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x \\
\left(\mathrm{e}^{-2x}w(x)\right)' &= 20\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x \\
\mathrm{e}^{-2x}w(x) &= 20\int \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x dx
\end{aligned}$$

ですが、ここで右辺の積分計算を行うと、

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x dx &= \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x - \int \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}(-2)\sin 2x dx \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x - \int \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x dx \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x - \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}\sin 2x + \int \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}2\cos 2x dx \\
2\int \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x dx &= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x - \frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2x}\sin 2x + C \\
\int \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x dx &= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

となっているからこれを戻してやれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2x}w(x) &= 20\left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\sin 2x + C\right) \\
w(x) &= -5\cos 2x + 5\sin 2x + C\mathrm{e}^{2x}
\end{aligned}$$

となり、更に $y(x)$ に戻せば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1\right)y(x) = -5\cos 2x + 5\sin 2x + C\mathrm{e}^{2x}$$

となります。そこで両辺に指数関数を掛ければ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x}y'(x) + \mathrm{e}^{x}y(x) &= -5\mathrm{e}^{x}\cos 2x + 5\mathrm{e}^{x}\sin 2x + C\mathrm{e}^{3x} \\
(\mathrm{e}^{x}y(x))' &= -5\mathrm{e}^{x}\cos 2x + 5\mathrm{e}^{x}\sin 2x + C\mathrm{e}^{3x} \\
\mathrm{e}^{x}y(x) &= -5\int \mathrm{e}^{x}\cos 2x dx + 5\int \mathrm{e}^{x}\sin 2x dx + C\mathrm{e}^{3x} + D
\end{aligned}$$

となります。ここで右辺の積分を計算すれば、

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{e}^{x}\cos 2x dx + i\int \mathrm{e}^{x}\sin 2x dx \\
&= \int \mathrm{e}^{x}(\cos 2x + i\sin 2x)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{e}^{(1+2i)x} dx \\
&= \frac{1}{1+2i} \mathrm{e}^{(1+2i)x} \\
&= \frac{1-2i}{5} \mathrm{e}^{x} \mathrm{e}^{2ix} \\
&= \frac{1-2i}{5} \mathrm{e}^{x} (\cos 2x + i \sin 2x) \\
&= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} \cos 2x + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{x} \sin 2x + i\left(-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{x} \cos 2x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} \sin 2x\right)
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{x} \cos 2x dx &= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} \cos 2x + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{x} \sin 2x, \\
\int \mathrm{e}^{x} \sin 2x dx &= -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{x} \cos 2x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} \sin 2x
\end{aligned}
$$

なので（積分定数は省略した）、これを代入してやって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x} y(x) &= -5 \int \mathrm{e}^{x} \cos 2x dx + 5 \int \mathrm{e}^{x} \sin 2x dx + C\mathrm{e}^{3x} + D \\
&= -5\left(\frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} \cos 2x + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{x} \sin 2x\right) + 5\left(-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{x} \cos 2x + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} \sin 2x\right) + C\mathrm{e}^{3x} + D \\
&= -3\mathrm{e}^{x} \cos 2x - \mathrm{e}^{x} \sin 2x + C\mathrm{e}^{3x} + D \\
y(x) &= -3 \cos 2x - \sin 2x + C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

を得ます。これが問題の方程式の一般解です。

後は与えられた初期条件によって係数を決定してやれば良いことになります。

$y(0) = 2$ によれば、$2 = -3 + C + D$ であり、$y'(0) = -4$ によれば $-4 = -2 + 2C - D$ ですから、連立方程式：

$$
\begin{cases}
C + D = 5 \\
2C - D = -2
\end{cases}
$$

が得られ、これを解けば $C = 1, D = 4$ となり、従って求める解は

$$
y(x) = -3 \cos 2x - \sin 2x + \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{-x}
$$

です。 □

演習問題 13.10 [東工大 H15] 微分方程式

$$
y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{x}
$$

の解で、$y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{\mathrm{e}}{4}$ を満たすものを求めて下さい。

【解答例】まず同次式の一般解を求めます。特性多項式は

$$
t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2
$$

でしたから、この方程式の左辺の微分作用素は因数分解すると

$$
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1\right)^2 y(x) = 0
$$

となるので、$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1\right) y(x) = w(x)$ とおけば、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1\right) w(x) &= 0 \\
w(x) &= C\mathrm{e}^{-x} \\
\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1\right) y(x) &= C\mathrm{e}^{-x} \\
\mathrm{e}^{x} y'(x) + \mathrm{e}^{x} y(x) &= C \\
\mathrm{e}^{x} y(x) &= Cx + D \\
y(x) &= Cx\mathrm{e}^{-x} + D\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

となってこれが同次式の一般解です（C, D は任意の定数)。

また、元の非同次式は特殊解 $y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}$ を持つので結局非同次式の一般解は

$$
y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} + Cx\mathrm{e}^{-x} + D\mathrm{e}^{-x}
$$

です。これに初期条件を代入して係数を決定します。

$y(0) = 1$ から $1 = \frac{1}{4} + D$ であり、$y'(0) = \frac{\mathrm{e}}{4}$ によれば $\frac{\mathrm{e}}{4} = \frac{1}{4} + C - D$ となるので $C = \frac{\mathrm{e}+2}{4}, D = \frac{3}{4}$ であって、求める解は

$$
y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} + \frac{\mathrm{e}+2}{4} x\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}
$$

となる事が分かりました。 □

演習問題 13.11 [京大工 H14] 微分方程式 $y''+9y=7\sin 3x$ において

$$z(x)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+3i\right)y(x)$$

として以下の問いに答えて下さい。

(1) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-3i\right)z(x)=7\sin 3x$ を $z(x)$ について解いて下さい。

(2) 今求めた $z(x)$ に対して、$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+3i\right)y(x)=z(x)$ を $y(x)$ について解いて下さい。

【解答例】(1) 両辺に指数関数を掛ければ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-3ix}z'(x)-3i\mathrm{e}^{-3ix}z(x)&=7\mathrm{e}^{-3ix}\sin 3x\\
\left(\mathrm{e}^{-3ix}z(x)\right)'&=7\mathrm{e}^{-3ix}\sin 3x\\
\mathrm{e}^{-3ix}z(x)&=7\int \mathrm{e}^{-3ix}\sin 3x dx\\
&=7\int \mathrm{e}^{-3ix}\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{3ix}-\mathrm{e}^{-3ix}\right)dx\\
&=\frac{7}{2i}\int\left(1-\mathrm{e}^{-6ix}\right)dx\\
&=\frac{7}{2i}x-\frac{7}{12}\mathrm{e}^{-6ix}+C\\
z(x)&=\frac{7}{2i}x\mathrm{e}^{3ix}-\frac{7}{12}\mathrm{e}^{-3ix}+C\mathrm{e}^{3ix}
\end{aligned}$$

となってこれが求める一般解です（C は任意の複素定数)。

(2) (1) の結果によれば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+3i\right)y(x)=\frac{7}{2i}x\mathrm{e}^{3ix}-\frac{7}{12}\mathrm{e}^{-3ix}+C\mathrm{e}^{3ix}$$

ですから、両辺に指数関数を掛けて

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{3ix}y'(x)+3i\mathrm{e}^{3ix}y(x)&=\frac{7}{2i}x\mathrm{e}^{6ix}-\frac{7}{12}+C\mathrm{e}^{6ix}\\
\left(\mathrm{e}^{3ix}y(x)\right)'&=\frac{7}{2i}x\mathrm{e}^{6ix}-\frac{7}{12}+C\mathrm{e}^{6ix}\\
\mathrm{e}^{3ix}y(x)&=\frac{7}{2i}\int x\mathrm{e}^{6ix}dx-\frac{7}{12}x+C\mathrm{e}^{6ix}+D\\
&=\frac{7}{2i}x\frac{1}{6i}\mathrm{e}^{6ix}-\frac{7}{2i}\int\frac{1}{6i}\mathrm{e}^{6ix}dx-\frac{7}{12}x+C\mathrm{e}^{6ix}+D\\
&=-\frac{7}{12}x\mathrm{e}^{6ix}-\frac{7}{2i\cdot 6i\cdot 6i}\mathrm{e}^{6ix}-\frac{7}{12}x+C\mathrm{e}^{6ix}+D\\
y(x)&=-\frac{7}{12}x\mathrm{e}^{3ix}+\frac{7}{72i}\mathrm{e}^{3ix}-\frac{7}{12}x\mathrm{e}^{-3ix}+C\mathrm{e}^{3ix}+D\mathrm{e}^{-3ix}\\
&=-\frac{7}{6}x\cos 3x+\frac{7}{72i}\mathrm{e}^{3ix}+C\mathrm{e}^{3ix}+D\mathrm{e}^{-3ix}
\end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{7}{72i}$ の項は任意定数 C の中に吸収させてしまえば

$$=-\frac{7}{6}x\cos 3x+C\mathrm{e}^{3ix}+D\mathrm{e}^{-3ix}$$

となり、実数関数の範囲で書けばこれは

$$=-\frac{7}{6}x\cos 3x+C\cos 3x+D\sin 3x$$

となります（C, D は任意の定数)。 □

演習問題 13.12 [農工大 H26] 微分方程式

$$y''+4y'+4y=\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}$$

の解 $y=y(x)$ のうちで条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{1}{2}$ を満たすものを求めて下さい。

【解答例】変形すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+2\right)^2 y(x)=\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}$$

ですから、ここで $y(x)=g(x)\mathrm{e}^{-2x}$ と置けば

$$\begin{aligned}
g''(x)\mathrm{e}^{-2x}&=\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}\\
g''(x)&=\frac{1}{1+x^2}\\
g'(x)&=\mathrm{Tan}^{-1}x+C\\
g(x)&=\int\mathrm{Tan}^{-1}x dx+Cx+D
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x\mathrm{Tan}^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx + Cx + D \\
&= x\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + Cx + D
\end{aligned}
$$

となります。従って一般解は C, D を任意定数として

$$
y(x) = \left\{ x\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + Cx + D \right\} \mathrm{e}^{-2x}
$$

となります。ここで初期条件を考慮して C, D を決定します。まず $y(0) = 0$ によれば $D = 0$ であり、$y'(0) = \frac{1}{2}$ によれば

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \{g'(x) - 2g(x)\}\,\mathrm{e}^{-2x} \\
&= \left\{\mathrm{Tan}^{-1}x + C - 2x\mathrm{Tan}^{-1}x + \log(1+x^2) - 2Cx\right\}\mathrm{e}^{-2x} \\
\frac{1}{2} &= C
\end{aligned}
$$

となって結局

$$
y(x) = \left\{ x\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}x \right\} \mathrm{e}^{-2x}
$$

となります。 □

演習問題 13.13 [農工大 H27] 微分方程式 $y'' + 3y = \cos\sqrt{3}x$ の解 $y = y(x)$ が、$y(0) = 1, y'(0) = 1$ を満たすとき y を求めてください。

【解答例】まず一般解を求めますが、対応した同次方程式の一般解は明らかに

$$
y = C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x
$$

ですから、後は非同次式の解を１つ見つければ良い事になります。

非同次項が $\cos\sqrt{3}x$ であってこれは同次式の解になってしまっていますから、$ax\cos\sqrt{3}x + bx\sin\sqrt{3}x$ の形の解がないか探してみましょう。すると

$$
\left(ax\cos\sqrt{3}x + bx\sin\sqrt{3}x\right)'' + 3\left(ax\cos\sqrt{3}x + bx\sin\sqrt{3}x\right) = \cos\sqrt{3}x
$$
$$
\left(2\sqrt{3}b - 1\right)\cos\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}a\sin\sqrt{3}x = 0
$$

ですから $a = 0, b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ であれば良い事が分かります。従って問題の方程式の一般解は

$$
y(x) = C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}x\sin\sqrt{3}x
$$

である事が分かりました。後は初期条件を満たす様に C, D を決めれば良く、まず $y(0) = 1$ から $C = 1$ であり、また $y'(0) = 1$ によれば

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -\sqrt{3}C\sin\sqrt{3}x + \sqrt{3}D\cos\sqrt{3}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x + \frac{1}{2}x\cos\sqrt{3}x \\
1 &= \sqrt{3}D
\end{aligned}
$$

となって $D = \frac{1}{\sqrt{3}}$ が分かります。以上から求める解は

$$
y(x) = \cos\sqrt{3}x + \frac{x+2}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x
$$

である事が分かりました。 □

演習問題 13.14 [東工大 H26] 次の問に答えて下さい。
(1) 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求めて下さい。
(2) 微分方程式 $y'' + y = \mathrm{e}^{-x}$ の一般解を求めて下さい。

【解答例】(1) $\cos x, \sin x$ は共に明らかに問題の微分方程式を満たしています。したがって求める一般解は $y = C\cos x + D\sin x$ です（C, D は任意の定数)。

(2) 対応した同次方程式の一般解は (1) で分かっていますから、後はこの非同次式の解の１つを見つければ良い事になります。

非同次項が e^{-x} ですから、$A\mathrm{e}^{-x}$ の形の解を探せば、

$$
A\mathrm{e}^{-x} + A\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}
$$

から $A = \frac{1}{2}$ であれば良いので、結局求める一般解は

$$
y(x) = C\cos x + D\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}
$$

です（C, D は任意の定数)。 □

演習問題 13.15 [神戸大 H27] 未知関数 $y = y(x)$ に関する以下の各微分方程式に対し、その一般解を求めて下さい。
(1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$　(2) $2y'' - 5y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

【解答例】(1) 特性方程式は $0=2t^2-5t+2=(2t-1)(t-2)$ ですから、同様に方程式も

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)y(x)=0$$

と変形されます。ここで $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)y(x)=z(x)$ と置けば、

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}\right)z(x)=0$$

から $z(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ です（C は任意の定数）。これを戻せば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-2\right)y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$$

であって、この方程式に対応した同次方程式の一般解は $y(x)=D\mathrm{e}^{2x}$ です（D は任意の定数）。また、この方程式の解の１つを $PC\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ の形で探せば、$P=-\frac{2}{3}$ であれば良いので $y(x)=D\mathrm{e}^{2x}-\frac{2}{3}C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ がこの方程式の一般解となります。整理して書けばもとの方程式の一般解は

$$y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+D\mathrm{e}^{2x}$$

です（C,D は任意の定数）。

(2) 対応した同次式の一般解は求まりましたから、この方程式の１つの解が求まれば良い事になります。$y(x)=A\mathrm{e}^{x}$ が解であると仮定すると $A=-1$ であれば良いので、結局求める一般解は

$$y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+D\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}$$

です（C,D は任意の定数）。 □

演習問題 13.16 [神戸大 H26] 微分方程式 $y''-2y'=x\mathrm{e}^{2x}$ について以下の問いに答えて下さい。

(1) この方程式は $y=(Ax^2+Bx)\mathrm{e}^{2x}$ (A,B は定数) の形の特殊解を持つことを示し、 A,B を決めて下さい。

(2) この方程式の一般解を求めて下さい。

【解答例】(1) $y=(Ax^2+Bx)\mathrm{e}^{2x}$ を方程式の左辺に代入すれば

$$\begin{aligned}&\left\{(Ax^2+Bx)\mathrm{e}^{2x}\right\}''-2\left\{(Ax^2+Bx)\mathrm{e}^{2x}\right\}'\\&=\left\{2A+2(2Ax+B)2+4(Ax^2+Bx)\right\}\mathrm{e}^{2x}-2\left\{(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx)\right\}\mathrm{e}^{2x}\\&=(4Ax+2A+2B)\mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$$

となるので、問題の微分方程式を満たすためには $A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4}$ であれば良い事が分かります。

(2) 対応した同次方程式 $y''-2y'=0$ において $y'=z$ と置けば $z'-2z=0$ ですから明らかに $z=C\mathrm{e}^{2x}$ です（C は任意の定数）。

従って $y'=C\mathrm{e}^{2x}$ ですから両辺積分すれば $y=\tilde{C}\mathrm{e}^{2x}+D$ を得ます（$\tilde{C},D$ は任意の定数）。

以上から求める一般解は $y=C\mathrm{e}^{2x}+D+\frac{1}{4}(x^2-x)\mathrm{e}^{2x}$ です (C,D は任意の定数)。 □

演習問題 13.17 [滋賀県立大 H26] (1) 未知関数 $y=y(x)$ に対する２階定数係数同次線形常微分方程式 $y''-8y'+16y=0$ の一般解を求めて下さい。

(2) ２階定数係数非同次線形常微分方程式 $y''-8y'+16y=2\cos x$ の特殊解を求めて下さい (特殊解を $y(x)=A\sin x+B\cos x$ と仮定してよい)。

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下して下さい。

【解答例】(1) 微分作用素を使って方程式を変形すれば

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-4\right)^2y(x)=0$$

ですから、$y(x)=g(x)\mathrm{e}^{4x}$ と置けば

$$g''(x)\mathrm{e}^{4x}=0$$

が得られます。従って $g''(x)=0$ であって C,D を任意定数として $g(x)=Cx+D$ となりますから求める一般解は

$$y(x)=(Cx+D)\mathrm{e}^{4x}$$

です。

(2) $y(x)=A\sin x+B\cos x$ を方程式の左辺に代入すれば

$$\begin{aligned}&(A\sin x+B\cos x)''-8\,(A\sin x+B\cos x)'+16\,(A\sin x+B\cos x)\\&=-A\sin x-B\cos x-8(A\cos x-B\sin x)+16A\sin x+16B\cos x\\&=(15A+8B)\sin x+(15B-8A)\cos x\end{aligned}$$

ですからこれが問題の非同次方程式の解であるためには

$$\begin{cases} 15A + 8B = 0 \\ 15B - 8A = 2 \end{cases}$$

であれば良く、この連立方程式を解けば

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 \\ -8 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{289} \begin{pmatrix} 15 & -8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{289} \begin{pmatrix} -16 \\ 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られますので求める特殊解は

$$y(x) = -\frac{16}{289} \sin x + \frac{30}{289} \cos x$$

です。

(3) 以上の結果から非同次式の一般解は

$$y(x) = (Cx + D)\mathrm{e}^{4x} - \frac{16}{289} \sin x + \frac{30}{289} \cos x$$

です（C, D は任意の定数）。 □

演習問題 13.18 [佐賀大 H26] $f(t) = A\mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta)$ が解となるような、t を独立変数とする f の 2 階微分方程式を一つ書いて下さい。ここで $A, \lambda, \omega, \theta$ は定数とします。

【解答例】線形方程式の範疇で考えれば定数係数は気にしなくて良くなります。
まず

$$\sin(\omega t + \theta) = \frac{\mathrm{e}^{i(\omega t + \theta)} - \mathrm{e}^{-i(\omega t + \theta)}}{2i}$$

に注意すれば

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta) = \frac{\mathrm{e}^{(-\lambda + i\omega)t + i\theta} - \mathrm{e}^{(-\lambda - i\omega)t + i\theta}}{2i}$$

ですから、共役複素数 $-\lambda \pm i\omega$ を解とする 2 次方程式を考えます。それは解と係数の関係から

$$p^2 + 2\lambda p + \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

です。従ってこれを特性方程式とする微分方程式：

$$f'' + 2\lambda f' + (\lambda^2 + \omega^2) f = 0$$

は題意を満たします。実際に計算すれば

$$\begin{aligned} &\left\{A\mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta)\right\}'' + 2\lambda \left\{A\mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta)\right\}' + (\lambda^2 + \omega^2) A\mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta) \\ &= A\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta) - 2A\lambda\omega \mathrm{e}^{-\lambda t} \cos(\omega t + \theta) - A\omega^2 \sin(\omega t + \theta) \\ &\qquad - 2\lambda^2 A\mathrm{e}^{-\lambda} \sin(\omega t + \theta) + 2\lambda\omega \mathrm{e}^{-\lambda} \cos(\omega t + \theta) \\ &\qquad\qquad + (\lambda^2 + \omega^2) A\mathrm{e}^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって確かに解になっています。 □