

13 2 階線型微分方程式 その 2

目標
C1. 簡単な非同次方程式の特殊解が求められる
B1. 基本的な非同次方程式の一般解が求められる 演習問題 13.1、13.2
A1. 様々な解法を実行できる 演習問題 13.3、13.5

13.1 定数係数・非同次型

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

13.2 因数分解法

問題 13.2.1 2 階の定数係数・非同次微分方程式：

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = (12x - 7)e^{-x}$$

の一般解を求めてください。

左辺を因数分解するかの様に

$$\left(\frac{d}{dx} - 3\right) \left\{ \left(\frac{d}{dx} - 2\right) f(x) \right\} = (D - 3)\{(D - 2)f(x)\} = (12x - 7)e^{-x}$$

と変形する事が出来、ここで $(D - 2)f(x) = h(x)e^{3x}$ と置けば、方程式は

$$(D - 3)\{h(x)e^{3x}\} = (12x - 7)e^{-x}$$

と書く事が出来ます。すると

$$h'(x)e^{3x} = (12x - 7)e^{-x}$$

$$h'(x) = (12x - 7)e^{-4x}$$

$$h(x) = \int (12x - 7)e^{-4x} dx$$

$$\begin{aligned} &= (12x - 7) \frac{1}{-4} e^{-4x} - \int 12 \frac{1}{-4} e^{-4x} dx \\ &= -\frac{12x - 7}{4} e^{-4x} - \frac{3}{4} e^{-4x} + C_1 \\ h(x)e^{3x} &= (-3x + 1)e^{-x} + C_1 e^{3x} \end{aligned}$$

となります (C_1 は任意の定数)。

そこでこの結果を元の $f(x)$ に戻してやれば、 $f(x) = g(x)e^{2x}$ として

$$(D - 2)\{g(x)e^{2x}\} = (-3x + 1)e^{-x} + C_1 e^{3x}$$

$$g'(x)e^{2x} = (-3x + 1)e^{-x} + C_1 e^{3x}$$

$$g'(x) = (-3x + 1)e^{-3x} + C_1 e^x$$

両辺積分して

$$\begin{aligned} g(x) &= \int (-3x + 1)e^{-3x} dx + C_1 e^x + C_2 \\ &= (-3x + 1) \frac{1}{-3} e^{-3x} - \int (-3) \frac{1}{-3} e^{-3x} dx + C_1 e^x + C_2 \\ &= \frac{3x - 1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + C_1 e^x + C_2 \\ f(x) &= xe^{-x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \end{aligned}$$

となって一般解が求まります (C_1, C_2 は任意の定数)。

□

演習問題 13.1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$(1) y'' - y' - 6y = 8e^{2x} \quad (2) y'' - y' - 6y = 10e^{3x} \quad (3) y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2x}$$

13.3 解の構造に注目するやり方

一般に非同次方程式の解は

$$(\text{非同次方程式の一般解}) = (\text{非同次方程式の 1 つの解}) + (\text{同次方程式の一般解})$$

と云う構造をしています。

事実 13.3.1 2階定数係数線形微分方程式： $y'' + py' + qy = R(x)$ は、 $R(x)$ の形によって以下の特殊解をもちます (m, n は非負整数、 A, B, A_j, K, L は定数とします)：

$R(x)$	特性方程式の根	特殊解
$Ke^{\alpha x}$	α は m 重解	$Ax^m e^{\alpha x}$
$K \cos \beta x + L \sin \beta x$	$i\beta$ は m 重解	$x^m (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$
Kx^n	0 は m 重解	$x^m (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)$
$Ke^{\alpha x} \cos \beta x + Le^{\alpha x} \sin \beta x$	$\alpha + i\beta$ は m 重解	$x^m e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

演習問題 13.2 次の微分方程式の特殊解を 1 つ求めてください。

- (1) $y'' + y' - 6y = 12e^{3x}$ (2) $y'' - 6y' + 8y = 5e^{3x}$ (3) $y'' + y' - 6y = 15e^{2x}$
 (4) $y'' + 9y = 10 \sin 2x$ (5) $y'' + 16y = 32 \sin 4x$ (6) $y'' + 25y = 27 \sin 4x$
 (7) $y'' - 6y' + 8y = 24x + 22$ (8) $y'' - 2y' = -12x + 2$ (9) $y'' - 4y' + 4y = -4x + 12$

13.4 おまけ：定数変化法による特殊解の探索

方程式：

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = (12x - 7)e^{-x}$$

に対応した同次方程式の一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

でした。ここで元の非同次方程式の解で

$$y = H(x)e^{3x} + K(x)e^{2x}$$

の形であって、特に

$$H'(x)e^{3x} + K'(x)e^{2x} = 0 \quad (13.1)$$

を満たすものを求めてみましょう。

微分すれば

$$y' = H'e^{3x} + 3He^{3x} + K'e^{2x} + 2Ke^{2x}$$

$$= 3He^{3x} + 2Ke^{2x}$$

$$y'' = (3H' + 9H)e^{3x} + (2K' + 4K)e^{2x}$$

$$y'' - 5y' + 6y = 3H'e^{3x} + 2K'e^{2x}$$

ですから、非同次方程式の解であることにより

$$3H'(x)e^{3x} + 2K'(x)e^{2x} = (12x - 7)e^{-x} \quad (13.2)$$

が分かります。

(13.1)、(13.2) から $H'(x), K'(x)$ 、更には $H(x), K(x)$ を求めれば (1 つ求めれば良いので、積分定数は 0 として計算します)

$$H'(x)e^{3x} = (12x - 7)e^{-x}$$

$$H'(x) = (12x - 7)e^{-4x}$$

$$H(x) = \int (12x - 7)e^{-4x} dx$$

$$= (12x - 7) \left(-\frac{1}{4} \right) e^{-4x} - \int 12 \left(-\frac{1}{4} \right) e^{-4x} dx$$

$$= \left(-3x + \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \right) e^{-4x}$$

$$= (-3x + 1)e^{-4x}$$

$$K'(x)e^{2x} = -(12x - 7)e^{-x}$$

$$K'(x) = (7 - 12x)e^{-3x}$$

$$K(x) = \int (7 - 12x)e^{-3x} dx$$

$$= (7 - 12x) \left(-\frac{1}{3} \right) e^{-3x} - \int (-12) \left(-\frac{1}{3} \right) e^{-3x} dx$$

$$= \left(4x - \frac{7}{3} + \frac{4}{3} \right) e^{-3x}$$

$$= (4x - 1)e^{-3x}$$

従って、

$$H(x)e^{3x} + K(x)e^{2x} = (-3x + 1)e^{-x} + (4x - 1)e^{-x} = xe^{-x}$$

が 1 つの解として見つかります。

『右辺』が事実 13.3.1 のリストにない形の場合には有効な方法になるでしょう。

演習問題 13.3 次の微分方程式の特殊解を 1 つ求めてください。

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

13.5 問題演習

演習問題 13.4 次の微分方程式の一般解を求めてください。

- (1) $y'' - 6y' + 8y = 8e^{2x}$ (2) $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x}$ (3) $y'' - 6y' + 9y = 8e^{3x}$
 (4) $y'' + 9y = 12 \cos 3x$ (5) $y'' + 16y = 14 \cos 3x$ (6) $y'' + 25y = 30 \cos 5x$
 (7) $y'' - 6y' = 24x + 20$ (8) $y'' - 2y' - 3y = 6x + 1$ (9) $y'' = 12x + 10$

演習問題 13.5 次の微分方程式の特殊解を 1 つ求めてください。

- (1) $y'' - 5y' + 6y = \frac{1}{(1 - e^{-x})^5}$ (2) $y'' - 6y' + 8y = \frac{1}{e^{-2x} + e^{-4x}}$

演習問題 13.6 [阪大基礎工 H9] 微分方程式

$$y'' - 2y' + 5y = e^x + xe^x \quad \cdots (*)$$

について、以下の問いに答えて下さい。

- (1) 対応した同次方程式の一般解を求めて下さい。
 (2) $y'' - 2y' + 5y = e^x$ の解を 1 つ求めて下さい。
 (3) $y'' - 2y' + 5y = xe^x$ の解を 1 つ求めて下さい。
 (4) (*) の一般解を求めて下さい。
 (5) $y(0) = a, \quad y'(0) = b$ のときの (*) の解を求めて下さい。

演習問題 13.7 [東大工 H11] 微分方程式 $y'' - 2y' + 5y = e^x, y(0) = p, y'(0) = q$ の解を求めて下さい。

演習問題 13.8 [名工大 H9] (1) 微分方程式 $y'' + 2y' - 3y = xe^x$ を解くために、 $y(x) = z(x)e^x$ とおくと、微分方程式 $z'' + az' + bz = x$ が導かれる。定数 a, b の値を求めて下さい。

- (2) 上で導かれた微分方程式 $z'' + az' + bz = x$ の一般解を求めて下さい。

演習問題 13.9 [名工大 H14] 定数係数 2 階線形微分方程式

$$y'' - y' - 2y = 20 \cos 2x$$

の初期条件 $y(0) = 2, y'(0) = -4$ を満たす解 $y(x)$ を求めて下さい。

演習問題 13.10 [東工大 H15] 微分方程式

$$y'' + 2y' + y = e^x$$

の解で、 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{e}{4}$ を満たすものを求めて下さい。

演習問題 13.11 [京大工 H14] 微分方程式 $y'' + 9y = 7 \sin 3x$ において

$$z(x) = \left(\frac{d}{dx} + 3i \right) y(x)$$

として以下の問いに答えて下さい。

- (1) $\left(\frac{d}{dx} - 3i \right) z(x) = 7 \sin 3x$ を $z(x)$ について解いて下さい。
 (2) 今求めた $z(x)$ に対して、 $\left(\frac{d}{dx} + 3i \right) y(x) = z(x)$ を $y(x)$ について解いて下さい。

演習問題 13.12 [農工大 H26] 微分方程式

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1 + x^2}$$

の解 $y = y(x)$ のうちで条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}$ を満たすものを求めて下さい。

演習問題 13.13 [農工大 H27] 微分方程式 $y'' + 3y = \cos \sqrt{3}x$ の解 $y = y(x)$ が、 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ を満たすとき y を求めてください。

演習問題 13.14 [東工大 H26] 次の問いに答えて下さい。

- (1) 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求めて下さい。
 (2) 微分方程式 $y'' + y = e^{-x}$ の一般解を求めて下さい。

演習問題 13.15 [神戸大 H27] 未知関数 $y = y(x)$ に関する以下の各微分方程式に対し、その一般解を求めて下さい。

- (1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$ (2) $2y'' - 5y' + 2y = e^x$.

演習問題 13.16 [神戸大 H26] 微分方程式 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ について以下の問いに答えて下さい。

- (1) この方程式は $y = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$ (A, B は定数) の形の特殊解を持つことを示し、 A, B を決めて下さい。
 (2) この方程式の一般解を求めて下さい。

演習問題 13.17 [滋賀県立大 H26] (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式 $y'' - 8y' + 16y = 0$ の一般解を求めて下さい。

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式 $y'' - 8y' + 16y = 2 \cos x$ の特殊解を求めて下さい (特殊解を $y(x) = A \sin x + B \cos x$ と仮定してよい)。

- (3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下して下さい。

演習問題 13.18 [佐賀大 H26] $f(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \theta)$ が解となるような、 t を独立変数とする f の 2 階微分方程式を一つ書いて下さい。ここで $A, \lambda, \omega, \theta$ は定数とします。