

14 2 階線型微分方程式 その 3

目標
B1. 同次式の解を使い、指示に従って非同次式の一般解が求められる 演習問題 14.1、14.7、14.8
B2. 変数変換によって Euler 型方程式の一般解が求められる 演習問題 14.2、14.10
A1. 因数分解法による Euler 型方程式の解法が実行できる 演習問題 14.3、14.10

14.1 非定数係数（関数係数）

2 階の線形微分方程式は定数係数であれば解はよく知られていますが、係数が非定数となると一般にかなり難しくなります。

編入試験に出題される時も何らかのインストラクションが付いた問題となることが多い様です。

14.2 同次方程式の解が与えられている問題

問題 14.2.1 微分方程式：

$$x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = x^2$$

について以下の問いに答えて下さい：

- (1) $y(x) = x^n$ が、対応する同次式の解である時の自然数 n の値を求めて下さい。
- (2) (1) で求めた n を使って、元の方程式の解を

$$y(x) = C(x)x^n$$

と置いて $C(x)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

- (3) (2) で求めた微分方程式を解いて $C(x)$ を求め、更に $y(x)$ を求めて下さい。

$y(x) = x^n$ が同次式の解だとすると、

$$\begin{cases} (x^n)'' = n(n-1)x^{n-2} & n \geq 2 \text{ の場合はもちろんだが、} n = 0, 1 \text{ の時も} \\ & \text{結果的にこれは 0 となるのでやはり正しい。} \\ (x^n)' = nx^{n-1} & \text{同様に、} n \geq 1 \text{ の場合はもちろんだが、} n = 0 \text{ の時も} \\ & \text{結果的にこれは 0 となるのでやはり正しい。} \end{cases}$$

なので、これらを微分方程式に代入して

$$\begin{aligned} n(n-1)x^n - nx^n + x^n &= 0 \\ (n^2 - 2n + 1)x^n &= 0 \\ (n-1)^2 x^n &= 0 \end{aligned}$$

となり、これが成り立つと云うのだから結局 $n = 1$ である事がわかります。
そこで、元の方程式の解 $y(x)$ を、

$$y(x) = C(x)x$$

と置けば、これをもとの方程式に代入する事により、

$$\begin{aligned} x^2(C(x)x)'' - x(C(x)x)' + C(x)x &= x^2 \\ x^2(C'(x)x + C(x))' - x(C'(x)x + C(x)) + C(x)x &= x^2 \\ x^2(C''(x)x + 2C'(x)) - x(C'(x)x + C(x)) + C(x)x &= x^2 \\ x^3 C''(x) + x^2 C'(x) &= x^2 \\ x C''(x) + C'(x) &= 1 \\ \{xC'(x)\}' &= 1 \end{aligned}$$

とまとめる事が出来るのでそんな事をしなくても簡単に解けて

$$\begin{aligned} xC'(x) &= x + G \quad (G \text{ は任意の定数}) \\ C'(x) &= 1 + \frac{G}{x} \\ C(x) &= x + G \log|x| + H \\ & \quad (G, H \text{ は任意の定数}) \end{aligned}$$

となる事がわかります。

これで $C(x)$ が分かったので、結局 $y(x)$ は、

$$y(x) = C(x)x = x^2 + Gx \log |x| + Hx \quad (G, H \text{ は任意の定数})$$

です。

□

演習問題 14.1 [S59 長岡技大] 微分方程式：

$$x^2(x+1)y''(x) - 2x^2y'(x) + 2(x-1)y(x) = 0 \quad (14.1)$$

について、以下の問いに答えて下さい。

- (1) $y(x) = x^n$ が微分方程式 (1) の解になる様に n の値を定めて下さい。
- (2) (1) で定めた n に対して $y(x) = x^n u(x)$ とおくと、関数 $u(x)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。
- (3) 微分方程式 (1) の一般解を求めて下さい。

(1) $y(x) = x^n$ においてこれが与えられた微分方程式の解であると仮定すると

$$\begin{aligned} x^2(x+1)n(n-1)x^{n-2} - 2x^2nx^{n-1} + 2(x-1)x^n &= 0 \\ n(n-1)(x+1)x^n - 2nxx^n + 2(x-1)x^n &= 0 \\ \{n(n-1)(x+1) - 2nx + 2(x-1)\}x^n &= 0 \\ \{(n^2 - 3n + 2)x + n^2 - n - 2\}x^n &= 0 \\ \{(n-1)(n-2)x + (n-2)(n+1)\}x^n &= 0 \\ (n-1)(n-2)x^{n+1} + (n-2)(n+1)x^n &= 0 \end{aligned}$$

ですので、これが全ての x で成り立つためには明らかに $n = 2$ でなければなりません。

(2) $y(x) = x^2 u(x)$ とおけば、

$$y'(x) = 2xu(x) + x^2 u'(x), \quad y''(x) = 2u(x) + 4xu'(x) + x^2 u''(x)$$

なので、

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(x+1)\{2u(x) + 4xu'(x) + x^2 u''(x)\} \\ &\quad - 2x^2\{2xu(x) + x^2 u'(x)\} + 2(x-1)x^2 u(x) \\ &= (x+1)\{2u(x) + 4xu'(x) + x^2 u''(x)\} - 2\{2xu(x) + x^2 u'(x)\} + 2(x-1)u(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x+1)x^2 u''(x) + (4x^2 + 4x - 2x^2)u'(x) + (2x + 2 - 4x + 2x - 2)u(x) \\ &= (x+1)u''(x) + (2x+4)u'(x) \end{aligned}$$

となって、 $u(x)$ の微分方程式が得られます：

$$x(x+1)u''(x) + (2x+4)u'(x) = 0.$$

(3) 今得られた方程式を変形すると

$$u''(x) = -\frac{2x+4}{x(x+1)}u'(x) \quad \cdots (*)$$

となりますが、

$$\frac{2x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

とおいて右辺を通分し、両辺の分子を比較すれば

$$\begin{aligned} 2x+4 &= A(x+1) + Bx \\ &= (A+B)x + A \end{aligned}$$

から $A = 4, B = -2$ が分かり、従って

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{x(x+1)} &= \frac{4}{x} - \frac{2}{x+1} \\ -\int \frac{2x+4}{x(x+1)} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{4}{x} \right) dx \\ &= 2 \log |x+1| - 4 \log |x| + C \end{aligned}$$

です (C は任意の定数)。従って方程式 (*) を $u'(x)$ について解けば

$$\begin{aligned} u'(x) &= C e^{2 \log |x+1| - 4 \log |x|} \\ &= C(x+1)^2 x^{-4} \\ &= C(x^{-2} + 2x^{-3} + x^{-4}) \end{aligned}$$

であり、これを更に $u(x)$ について解けば

$$\begin{aligned} u(x) &= C \left(-x^{-1} - x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-3} \right) + D \\ x^2 u(x) &= C \left(x + 1 + \frac{1}{3x} \right) + Dx^2 \end{aligned}$$

が得られます (D も任意の定数)。

□

14.3 Euler 型

一般に、

$$x^2 y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = R(x) \quad p, q \text{ は定数、} R(x) \text{ は関数}$$

の型の微分方程式は、Euler 型と呼ばれます。

14.3.1 変数変換法

Euler 型の微分方程式は、 $x > 0$ においては $x = e^t$ と云う変数変換、つまり、 $w(t) = y(e^t)$ と置けば

$$w''(t) + (p-1)w'(t) + qw(t) = R(e^t)$$

となって定数係数の 2 階線形微分方程式に帰着されます。

$x < 0$ においても同様に $x = -e^t$ と置けば定数係数 2 階線型微分方程式に帰着されます。

問題 14.3.1 [H12 名工大 (改)]

(1) p, q は定数とします。Euler の微分方程式：

$$x^2 y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = R(x) \quad (x > 0)$$

は、 $w(t) = y(e^t)$ と置けば定数係数の 2 階線形微分方程式：

$$w''(t) + (p-1)w'(t) + qw(t) = R(e^t)$$

に帰着される事を示して下さい。

(2) 次の Euler の微分方程式

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^2$$

の一般解を求めて下さい。

ですから、

$$y''(e^t)e^{2t} = w''(t) - w'(t)$$

であって、

$$x^2 y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = R(x)$$

$$e^{2t} y''(e^t) + pe^t y'(e^t) + qy(e^t) = R(e^t)$$

$$w''(t) - w'(t) + pw'(t) + qy(e^t) = R(e^t)$$

$$w''(t) + (p-1)w'(t) + qw(t) = R(e^t)$$

と変形されます。

(2) $w(t) = y(e^t)$ と置けば、(1) の結果から

$$w''(t) - 4w'(t) + 4w(t) = e^{2t}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right)^2 w(t) = e^{2t}$$

です。ここで $\left(\frac{d}{dt} - 2\right) w(t) = v(t)$ とおけば、

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right) v(t) = e^{2t}$$

$$e^{-2t} v'(t) - 2e^{-2t} v(t) = 1$$

$$\{e^{-2t} v(t)\}' = 1$$

$$e^{-2t} v(t) = t + C$$

$$v(t) = te^{2t} + Ce^{2t}$$

となっている事が分かります。これを戻せば

$$\left(\frac{d}{dt} - 2\right) w(t) = te^{2t} + Ce^{2t}$$

$$e^{-2t} w'(t) - 2e^{-2t} w(t) = t + C$$

$$\{e^{-2t} w(t)\}' = t + C$$

$$e^{-2t} w(t) = \frac{1}{2} t^2 + Ct + D$$

$$w(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t} + Cte^{2t} + De^{2t}$$

$$y(e^t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t} + Cte^{2t} + De^{2t}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}(\log x)^2 x^2 + C(\log x)x^2 + Dx^2$$

となってこれが一般解です (C, D は任意の定数)。

ちなみに、 $x < 0$ において $w(t) = y(-e^t)$ と置けば、

$$\begin{aligned} w'(t) &= -y'(-e^t)e^t \\ w''(t) &= y''(-e^t)e^{2t} - y'(-e^t)e^t \end{aligned}$$

ですから、

$$y''(-e^t)e^{2t} = w''(t) - w'(t)$$

であって、

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + pxy'(x) + qy(x) &= R(x) \\ e^{2t} y''(-e^t) - pe^t y'(-e^t) + qy(-e^t) &= R(-e^t) \\ w''(t) - w'(t) + pw'(t) + qw(t) &= R(-e^t) \\ w''(t) + (p-1)w'(t) + qw(t) &= R(-e^t) \end{aligned}$$

と変形され、同様に一般解が求められます。

14.3.2 因数分解法

あるいは $D = \frac{d}{dx}$ と書けば次の計算が示すように：

$$\begin{aligned} (xD - \lambda) \{(xD - \mu)y\} &= (xD - \lambda)(xy' - \mu y) \\ &= x(y' + xy'' - \mu y') - \lambda(xy' - \mu y) \\ &= x^2 y'' + (1 - \lambda - \mu)xy' + \lambda\mu y \end{aligned}$$

Euler 型の微分方程式の左辺は“因数分解”することが出来ますので、順に 1 階微分方程式を解いてゆけば解に辿り着くことが出来ます。

今回の方程式：

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^2$$

の場合、具体的には、

$$1 - \lambda - \mu = -3, \quad \lambda\mu = 4$$

を解いて $\lambda = \mu = 2$ が得られ、

$$(xD - 2)^2 y = x^2 y'' - 3xy' + 4y$$

□

です。微分方程式：

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^2$$

は

$$(xD - 2)^2 y = x^2$$

と“因数分解”されます。 $(xD - 2)y = z$ と置いてこれを解いてゆけば

$$(xD - 2)\{(xD - 2)y\} = x^2$$

$$(xD - 2)z = x^2$$

$$xz' - 2z = x^2$$

$$x^{-2}z' - 2x^{-3}z = x^{-1}$$

$$(x^{-2}z)' = x^{-1}$$

$$x^{-2}z = \log|x| + C$$

$$z = x^2 \log|x| + Cx^2$$

$$(xD - 2)y = x^2 \log|x| + Cx^2$$

$$xy' - 2y = x^2 \log|x| + Cx^2$$

$$x^{-2}y' - 2x^{-3}y = \frac{1}{x} \log|x| + C \frac{1}{x}$$

$$(x^{-2}y)' = \frac{1}{x} \log|x| + C \frac{1}{x}$$

$$x^{-2}y = \frac{1}{2}(\log|x|)^2 + C \log|x| + D$$

$$y = \frac{1}{2}x^2(\log|x|)^2 + Cx^2 \log|x| + Dx^2$$

となってさっきと同じ解が得られます。

□

演習問題 14.2 [H17 阪大基礎工 (改)] (1) 微分方程式：

$$y'' + 2y' + y = 0$$

の一般解を求めて下さい。

(2) $z(x)$ ($x > 0$) の微分方程式：

$$x^2 z'' + 3x z' + z = 0 \quad \cdots (*)$$

において $x = e^t$ ($t = \log x$) と変換したとき $z(e^t) = w(t)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

(3) 微分方程式 (*) の一般解を求めて下さい。

(4) (*) の解で

$$z(1) = 0, \quad \int_1^e z(x) dx = 1$$

を満たすものを求めて下さい。

(1) この微分方程式は

$$\left(\frac{d}{dx} + 1\right) \left(\frac{d}{dx} + 1\right) y(x) = 0$$

と書けるので、まず $w(x) = \left(\frac{d}{dx} + 1\right) y(x)$ とすれば $w(x)$ の方程式

$$\left(\frac{d}{dx} + 1\right) w(x) = 0$$

が得られます。これは簡単に解けて

$$w(x) = Ce^{-x}$$

です (C は任意の定数) ので、これを元に戻せば微分方程式

$$\left(\frac{d}{dx} + 1\right) y(x) = Ce^{-x}$$

が得られます。これは両辺に指数関数 (積分因子) を掛けて

$$\begin{aligned} e^x y'(x) + e^x w(x) &= C \\ \{e^x y(x)\}' &= C \end{aligned}$$

$$e^x y(x) = Cx + D$$

$$y(x) = Cxe^{-x} + De^{-x}$$

となってこれが一般解です (C, D は任意の定数)。

(2) $z(e^t) = w(t)$ と置けば、方程式は

$$e^{2t} z''(e^t) + 3e^t z'(e^t) + z(e^t) = 0$$

であり、更に

$$z'(e^t)e^t = w'(t), \quad z''(e^t)e^{2t} + z'(e^t)e^t = w''(t)$$

なので、結局

$$e^{2t} z''(e^t) + 3e^t z'(e^t) + z(e^t) = 0$$

$$e^{2t} z''(e^t) + e^t z'(e^t) + 2e^t z'(e^t) + z(e^t) = 0$$

$$w''(t) + 2w'(t) + w(t) = 0$$

となります。

(3) 得られた方程式は (1) の方程式であるので、(1) の結果から

$$w(t) = Cte^{-t} + De^{-t} \quad (C, D \text{ は任意の定数})$$

が分かります。また、 $z(x) = w(\log x)$ なので、

$$z(x) = \frac{C \log x}{x} + \frac{D}{x}$$

となりこれが (*) の一般解です。

(4) $z(1) = 0$ から $D = 0$ であり、更に $\int_1^e z(x) dx = 1$ に依れば

$$\int_1^e C \frac{\log x}{x} dx = 1$$

なので、ここで $\log x = y$ と変換すれば

$$C \int_0^1 y dy = 1$$

$$C \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = 1$$

$$\frac{C}{2} = 1$$

となって $C = 2$ も分かるので、結局求める解は

$$z(x) = \frac{2 \log x}{x}$$

です。

□

演習問題 14.3 微分方程式：

$$x^2 z'' + 3xz' + z = 0 \quad \cdots (*)$$

について、以下の問いに答えてください。

(1) $\frac{d}{dx} = D$ として、方程式 $(*)$ が

$$(xD - \lambda)(xD - \mu)y = 0 \quad \cdots (**)$$

と変形されるように定数 λ, μ を求めてください。

(2) 方程式 $(**)$ を解いて $(*)$ の一般解を求めてください。

(1)

$$\begin{aligned} (xD - \lambda) \{ (xD - \mu)y \} &= (xD - \lambda)(xy' - \mu y) \\ &= x(y' + xy'' - \mu y') - \lambda(xy' - \mu y) \\ &= x^2 y'' + (1 - \lambda - \mu)xy' + \lambda \mu y \end{aligned}$$

ですから、

$$\lambda + \mu = -2, \quad \lambda \mu = 1$$

であれば良く、従って $\lambda = \mu = -1$ です。

(2) $(xD + 1)y = z$ と置けば

$$(sD + 1)^2 y = 0$$

$$(xD + 1)z = 0$$

$$xz' + z = 0$$

$$(xz)' = 0$$

$$xz = C$$

$$z = \frac{C}{x}$$

$$(xD + 1)y = \frac{C}{x}$$

$$(xy)' = \frac{C}{x}$$

$$xy = C \log |x| + D$$

$$y = \frac{C \log |x|}{x} + \frac{D}{x}$$

が得られます (C, D は任意の定数)。

□

14.4 その他の変数変換法

演習問題 14.4 [H11 名工大 (改)]

(1) 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求めて下さい。

(2) $w(x)$ を微分方程式

$$4xw''(x) + 2w'(x) + w(x) = 0 \quad \cdots (*)$$

の解とします。変数 x を $x = t^2$ により t に変換し、 $u(t) = w(t^2)$ と置くと、 $u(t)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めて下さい。

(1) この微分方程式は $\cos x, \sin x$ を解に持つ事は明らかである。従って

$$y(x) = C \cos x + D \sin x \quad (C, D \text{ は任意の定数})$$

はこの微分方程式の一般解である。

(2) $u(t) = w(t^2)$ と置けば方程式は

$$4t^2 w''(t^2) + 2w'(t^2) + w(t^2) = 0$$

となり、更に

$$u'(t) = w'(t^2)2t, \quad w''(t) = w''(t^2)4t^2 + w'(t^2)2$$

であるから、結局

$$u''(t) + u(t) = 0$$

を得る。

(3) (1) の結果によれば $u(t) = C \cos t + D \sin t$ であるから、

$$w(t^2) = C \cos t + D \sin t$$

を得る (C, D は任意の定数)。

□

演習問題 14.5 [S63 九州大] 微分方程式 $xy' = 2y - x$ について、以下の問いに答えて下さい。

- (1) $y(x) = xu(x)$ とおき、 $u(x)$ の方程式に直して下さい。
- (2) 更に $x = e^t$ とおけば方程式はどんな形になりますか。
- (3) $y(3) = 0$ なる与式の解を求めて下さい。

(1) $y(x) = xu(x)$ と置けば、 $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ なので、

$$xy'(x) = 2y - x$$

$$xu(x) + x^2u'(x) = 2xu(x) - x$$

$$x^2u'(x) - xu(x) = -x$$

$$xu'(x) - u(x) = -1$$

を得る。

(2) ここで更に $x = e^t$ と置けば方程式は

$$e^t u'(e^t) - u(e^t) = -1$$

となり、また $w(t) = u(e^t)$ とすると $w'(t) = u'(e^t)e^t$ なので、方程式は

$$w'(t) - w(t) = -1$$

と変形される。

(3) (2) で得た方程式の両辺に指数関数を掛けて変形すれば

$$e^{-t}w'(t) - e^{-t}w(t) = -e^{-t}$$

$$(e^{-t}w(t))' = -e^{-t}$$

$$e^{-t}w(t) = e^{-t} + C$$

$$w(t) = 1 + Ce^t$$

であるので、 $w(t) = u(e^t)$ を元に戻して

$$u(e^t) = 1 + Ce^t$$

$$u(x) = 1 + Cx$$

$$xu(x) = x + Cx^2$$

を得、更に $xu(x) = y(x)$ を元に戻せば

$$y(x) = x + Cx^2$$

となって一般解が求まるが、 $y(3) = 0$ と云う条件により

$$0 = y(3) = 3 + 9C, \quad C = -\frac{1}{3}$$

となるので、求める解は

$$y(x) = x - \frac{1}{3}x^2$$

である。

□

演習問題 14.6 [H12 京大工 (改)] 微分方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^4}y = \frac{1}{x^6}$$

について、以下の問いに答えて下さい。

- (1) $t = -\frac{1}{x}$ と云う変数変換によって $w(t) = y(-\frac{1}{t})$ と置けば $w(t)$ は微分方程式：

$$\frac{d^2w}{dt^2} + w(t) = t^2$$

を満たす事を示して下さい。

- (2) 元の微分方程式の特殊解を、 $y(-\frac{1}{t}) = At^2 + Bt + C$ の形で求めて下さい。
- (3) 元の微分方程式の一般解を求めて下さい。

(1) この変数変換によって方程式はまず

$$y'' \left(-\frac{1}{t} \right) - 2ty' \left(-\frac{1}{t} \right) + t^4 y \left(-\frac{1}{t} \right) = t^6$$

となり、更に

$$w'(t) = y' \left(-\frac{1}{t} \right) \frac{1}{t^2}, \quad w''(t) = y'' \left(-\frac{1}{t} \right) \frac{1}{t^4} - y' \left(-\frac{1}{t} \right) \frac{2}{t^3}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y'' \left(-\frac{1}{t} \right) - 2ty' \left(-\frac{1}{t} \right) + t^4 y \left(-\frac{1}{t} \right) &= t^6 \\ \frac{1}{t^4} y'' \left(-\frac{1}{t} \right) - 2 \frac{1}{t^3} y' \left(-\frac{1}{t} \right) + y \left(-\frac{1}{t} \right) &= t^2 \\ w''(t) + w(t) &= t^2 \end{aligned}$$

となって題意は示された。

(2) $w(t) = At^2 + Bt + C$ とおいてこれが (1) で求めた方程式の解の一つであると仮定すれば、

$$\begin{aligned} 2A + At^2 + Bt + C &= t^2 \\ (A-1)t^2 + Bt + 2A + C &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$ となり、従って

$$w(t) = t^2 - 2$$

は (1) の方程式の特殊解である。また、この方程式は元の方程式に置いて変数変換して得られたものであったから、結局

$$y \left(-\frac{1}{t} \right) = t^2 - 2$$

は元の方程式の特殊解である。

(3) (1) で得た方程式に対応する同次方程式の一般解は

$$w(t) = C \cos t + D \sin t \quad (C, D \text{ は任意の定数})$$

であるので、今求めた特殊解とあわせて、(1) の方程式 (非同次) の一般解は

$$w(t) = t^2 - 2 + C \cos t + D \sin t$$

である。従って元の方程式の一般解は

$$\begin{aligned} y \left(-\frac{1}{t} \right) &= t^2 - 2 + C \cos t + D \sin t \\ y(x) &= \frac{1}{x^2} - 2 + C \cos \left(-\frac{1}{x} \right) + D \sin \left(-\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

である (C, D は任意の定数)。

□

14.5 問題演習

演習問題 14.7 [H15 名工大] 微分方程式：

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2$$

について以下の問いに答えて下さい：

- (1) $y(x) = x^n$ が、対応する同次式の解である時の自然数 n の値を求めて下さい。
- (2) (1) で求めた n を使って、元の方程式の解を

$$y(x) = z(x)x^n$$

と置いて $z(x)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

- (3) (2) で求めた微分方程式を解いて $z(x)$ を求め、更に $y(x)$ を求めて下さい。

(1) 与えられた方程式に対応した同次方程式に $y(x) = x^n$ を代入すると、

$$\begin{aligned} n(n-1)x^n + nx^{n-1} - x^n &= 0 \\ (n^2 - 1)x^n &= 0 \end{aligned}$$

となるので、これが常に成り立つためには $n = 1$ である必要があります。

(2) $y(x) = z(x)x$ とおけば、

$$y'(x) = z'(x)x + z(x), \quad y''(x) = z''(x)x + 2z'(x)$$

なので、これらを元の微分方程式に戻せば

$$x^2(z''(x)x + 2z'(x)) + x\{z'(x)x + z(x)\} - z(x)x = x^2$$

$$x^3 z'' + 3x^2 z' = x^2$$

を得ます。

(3)

$$x^3 z'' + 3x^2 z' = x^2$$

$$(x^3 z')' = x^2$$

$$x^3 z' = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$z' = \frac{1}{3} + Cx^{-3}$$

$$z = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}Cx^{-2} + D$$

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}Cx^{-1} + Dx$$

となって $y(x)$ が求まりました (C, D は任意の定数)。

□

演習問題 14.8 微分方程式：

$$tf''(t) - (2t+1)f'(t) + (t+1)f(t) = (t^2+t-1)e^t \quad (t > 0)$$

について以下の問いに答えて下さい：

- (1) $f(t) = e^t$ が、対応する同次式の解である事を確かめて下さい。
- (2) 元の方程式の解を $f(t) = g(t)e^t$ と置いて $g(t)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。
- (3) (2) で求めた微分方程式を解いて $g(t)$ を求め、更に $f(t)$ を求めて下さい。

(1) $f(t) = e^t$ のとき、

$$tf''(t) - (2t+1)f'(t) + (t+1)f(t) = (t-2t-1+t+1)e^t = 0$$

となるので題意は示されました。

(2) $f(t) = g(t)e^t$ とおけば、

$$f'(t) = g'(t)e^t + g(t)e^t, \quad f''(t) = g''(t)e^t + 2g'(t)e^t + g(t)e^t$$

なので、これらをもとの微分方程式に代入して

$$t\{g''(t) + 2g'(t) + g(t)\}e^t - (2t+1)\{g'(t) + g(t)\}e^t + (t+1)g(t)e^t = (t^2+t-1)e^t$$

$$tg''(t) + (2t-2t-1)g'(t) + (t-2t-1+t+1)g(t) = t^2+t-1$$

$$tg''(t) - g'(t) = t^2+t-1$$

を得ます。

(3) この微分方程式の両辺に t^{-2} を掛けると、

$$\frac{1}{t}g''(t) - \frac{1}{t^2}g'(t) = 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$$

となり、この左辺は微分の形に書けます：

$$\left\{ \frac{1}{t}g'(t) \right\}' = 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}$$

そこで両辺を積分してやれば

$$\frac{1}{t}g'(t) = t + \log t + \frac{1}{t} + C$$

$$g'(t) = t^2 + t \log t + 1 + Ct$$

となるので更にもう一度両辺積分すれば

$$g(t) = \frac{1}{3}t^3 + \int t \log t dt + t + Ct^2 + D$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \log t - \int \frac{1}{2}t^2 \frac{1}{t} dt + t + Ct^2 + D$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \log t - \frac{1}{2} \int t dt + t + Ct^2 + D$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \log t - \frac{1}{4}t^2 + t + Ct^2 + D$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \log t + t + Ct^2 + D$$

$$g(t)e^t = \frac{1}{3}t^3 e^t + \frac{1}{2}t^2 e^t \log t + te^t + Ct^2 e^t + De^t$$

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 e^t + \frac{1}{2}t^2 e^t \log t + te^t + Ct^2 e^t + De^t$$

が得られます (C, D は任意の定数)。

□

演習問題 14.9 次の微分方程式：

$$(x-1)y''(x) + (1-2x)y'(x) + xy(x) = (x-1)^2e^x \quad (\text{ただし, } x > 1 \text{ とする})$$

について、以下の問いに答えて下さい。

(1) $y(x) = e^x$ がこの方程式に対応した同次方程式の解である事を示して下さい。

(2) もとの方程式の解を $y(x) = C(x)e^x$ と置いた時、 $C(x)$ が微分方程式：

$$C''(x) - \frac{1}{x-1}C'(x) = x-1 \quad (\text{ただし, } x > 1 \text{ とする})$$

を満たす事を示して下さい。

(3) (2) の微分方程式を $C'(x)$ の 1 階微分方程式と見てまず $C'(x)$ を求め、次いで $C(x)$ 、更にはもとの方程式の一般解 $y(x)$ を求めて下さい。

(1)

$$(x-1)(e^x)''(x) + (1-2x)(e^x)'(x) + x(e^x) = (x-1+1-2x+x)e^x = 0$$

により、確かに $y(x) = e^x$ は同次方程式の解です。

(2) $y(x) = C(x)e^x$ と置くと、

$$y'(x) = \{C'(x) + C(x)\}e^x$$

$$y''(x) = \{C''(x) + 2C'(x) + C(x)\}e^x$$

ですので、これを元の方程式に代入すると、

$$(x-1)y''(x) + (1-2x)y'(x) + xy(x) = (x-1)^2e^x$$

$$(x-1)\{C''(x) + 2C'(x) + C(x)\}e^x$$

$$+ (1-2x)\{C'(x) + C(x)\}e^x + xC(x)e^x = (x-1)^2e^x$$

$$(x-1)C''(x)e^x - C'(x)e^x = (x-1)^2e^x$$

$$C''(x) - \frac{1}{x-1}C'(x) = x-1$$

を得ます。

(3) $C'(x) = D(x)$ と置けば、上の方程式は

$$D'(x) - \frac{1}{x-1}D(x) = x-1$$

となって、これは $D(x)$ の 1 階の微分方程式ですのでまず対応した同次方程式：

$$D'(x) - \frac{1}{x-1}D(x) = 0$$

を考えます。これは変形すると

$$D'(x) = \frac{1}{x-1}D(x)$$

ですから直ちに解けて

$$D(x) = Ge^{\int \frac{1}{x-1}dx} = Ge^{\log(x-1)} = G(x-1)$$

となります。ただし、 G は任意の定数です。

そこで、元の D の方程式：

$$D'(x) - \frac{1}{x-1}D(x) = x-1$$

に於いて $D(x) = G(x)(x-1)$ と置けば、

$$G'(x)(x-1) + G(x) - \frac{1}{x-1}G(x)(x-1) = x-1$$

$$G'(x) = 1$$

$$G(x) = x + H \quad (H \text{ は任意の定数})$$

を得るので、結局、

$$D(x) = G(x)(x-1) = (x+H)(x-1)$$

となります。

しかし元はと云えば、 $D(x) = C'(x)$ だったのだから、

$$C'(x) = (x+H)(x-1)$$

$$= x^2 - x + H(x-1)$$

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Hx \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) + K$$

を得ます。ただし、 H, K は任意の定数です。

以上から $y(x)$ は、

$$y(x) = C(x)e^x = \left\{ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + Hx \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) + K \right\} e^x$$

となります。

演習問題 14.10 微分方程式：

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^2 \quad \cdots (*)$$

について以下の問いに答えて下さい：

(1) $x > 0$ において $z(t) = y(e^t)$ と置いて z の満たす微分方程式を求め、それを解いて元の方程式 (*) の ($x > 0$ での) 一般解を求めて下さい。

(2) 方程式 (*) を

$$(xD - \lambda)(xD - \mu)y = x^2$$

の形に変形することを利用して一般解を求めてください。

(1)

$$z'(t) = y'(e^t)e^t$$

$$z''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t$$

$$\begin{aligned} z''(t) - 2z'(t) + z(t) &= e^{2t}y''(e^t) - e^ty'(e^t) + y(e^t) \\ &= e^{2t} \end{aligned}$$

ですから、 $z(t)$ の満たす微分方程式は

$$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{2t}$$

です。

$z = ke^{2t}$ が解であると仮定すれば

$$e^{2t} = 4ke^{2t} - 4ke^{2t} + ke^{2t} = ke^{2t}$$

ですから $k = 1$ ですから、 $z = e^{2t}$ は 1 つの解です。

また、対応した同次方程式の一般解は

$$(Ct + D)e^t$$

ですから、求める非同次方程式の一般解は

$$z(t) = e^{2t} + (Ct + D)e^t$$

です。 $z(t) = y(e^t)$ でしたから、 $x > 0$ のとき、

$$y(e^t) = e^{2t} + (Ct + D)e^t$$

$$y(x) = x^2 + (C \log x + D)x$$

です。

(2)

$$\begin{aligned} (xD - \lambda)(xD - \mu)y &= (xD - \lambda)(xy' - \mu y) \\ &= x(xy' - \mu y)' - \lambda(xy' - \mu y) \\ &= x(y' + xy'' - \mu y') - \lambda xy' + \lambda \mu y \\ &= x^2 y'' + (1 - \mu - \lambda)xy' + \lambda \mu y \end{aligned}$$

ですから、

$$\lambda + \mu = 2, \quad \lambda \mu = 1$$

であれば良く、 $\lambda = \mu = 1$ が分かります。つまり、

$$(xD - 1)(xD - 1)y = x^2$$

です。

まず $(xD - 1)y = z$ と置けば

$$(xD - 1)z = x^2$$

$$xz' - z = x^2$$

$$\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = 1$$

$$\left(\frac{1}{x}z\right)' = 1$$

$$\frac{1}{x}z = x + C$$

$$z = x^2 + Cx$$

ですから、

$$(xD - 1)y = x^2 + Cx$$

$$xy' - y = x^2 + Cx$$

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 1 + \frac{C}{x}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}y\right)' &= 1 + \frac{C}{x} \\ \frac{1}{x}y &= x + C\log|x| + D \\ y &= x^2 + Cx\log|x| + Dx\end{aligned}$$

です。 □