14　２階線型微分方程式　その３

目標
B1. 同次式の解を使い、指示に従って非同次式の一般解が求められる 演習問題 14.1、14.7、14.8 B2. 変数変換によって Euler 型方程式の一般解が求められる 演習問題 14.2、14.10
A1. 因数分解法による Euler 型方程式の解法が実行できる 演習問題 14.3、14.10

14.1　非定数係数（関数係数）

14.2　同次方程式の解が与えられている問題

問題 14.2.1 微分方程式：

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^2$$

について以下の問いに答えて下さい：

(1) $y(x) = x^n$ が、対応する同次式の解である時の自然数 n の値を求めて下さい。
(2) (1) で求めた n を使って、元の方程式の解を

$$y(x) = C(x)x^n$$

と置いて $C(x)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。
(3) (2) で求めた微分方程式を解いて $C(x)$ を求め、更に $y(x)$ を求めて下さい。

$y(x) = x^n$ が同次式の解だとすると、

$$\begin{aligned} n(n-1)x^n - nx^n + x^n =& 0 \\ (n-1)^2x^n =& 0 \end{aligned}$$

となり、これが成り立つと云うのだから結局 $n = 1$ である事がわかります。
そこで、元の方程式の解 $y(x)$ を、$y(x) = C(x)x$ と置けば、これをもとの方程式に代入する事により、

$$\begin{aligned} x^2(C(x)x)'' - x(C(x)x)' + C(x)x =& x^2 \\ x^2(C''(x)x + 2C'(x)) - x(C'(x)x + C(x)) + C(x)x =& x^2 \\ xC''(x) + C'(x) =& 1 \\ \{xC'(x)\}' =& 1 \end{aligned}$$

とまとめる事が出来るので簡単に解けて

$$\begin{aligned} xC'(x) =& x + G \quad (G \text{ は任意の定数}) \\ C'(x) =& 1 + \frac{G}{x} \\ C(x) =& x + G\log|x| + H \\ & (G,\ H \text{ は任意の定数}) \end{aligned}$$

となる事がわかります。
これで $C(x)$ が分かったので、結局 $y(x)$ は、

$$y(x) = C(x)x = x^2 + Gx\log|x| + Hx \quad (G,\ H \text{ は任意の定数})$$

です。 □

演習問題 14.1 [S59 長岡技大]　微分方程式：

$$x^2(x+1)y''(x) - 2x^2y'(x) + 2(x-1)y(x) = 0 \tag{14.1}$$

について、以下の問いに答えて下さい。
(1) $y(x) = x^n$ が微分方程式 (1) の解になる様に n の値を定めて下さい。
(2) (1) で定めた n に対して $y(x) = x^n u(x)$ とおくとき、関数 $u(x)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。
(3) 微分方程式 (1) の一般解を求めて下さい。

14.3　Euler 型

$$x^2y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = R(x) \quad p, q \text{ は定数、} R(x) \text{ は関数}$$

14.3.1　変数変換法

$x > 0$ においては $w(t) = y(\mathrm{e}^t)$ と置けば

$$w''(t) + (p-1)w'(t) + qw(t) = R(\mathrm{e}^t)$$

となって定数係数の２階線形微分方程式に帰着されます。$x < 0$ においては $x = -\mathrm{e}^t$ と置けばよい。

問題 14.3.1 [H12 **名工大 (改)]**
(1) p, q は定数とします。Euler の微分方程式：

$$x^2y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = R(x) \quad (x > 0)$$

は、$w(t) = y(\mathrm{e}^t)$ と置けば定数係数の２階線形微分方程式：

$$w''(t) + (p-1)w'(t) + qw(t) = R(\mathrm{e}^t)$$

に帰着される事を示して下さい。
(2) 次の Euler の微分方程式

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = x^2$$

の一般解を求めて下さい。

---

(1) $w(t) = y(\mathrm{e}^t)$ と置けば

$$\begin{aligned} w'(t) &= y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t \\ w''(t) &= y''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t \end{aligned}$$

ですから、

$$y''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t} = w''(t) - w'(t)$$

であって、

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + pxy'(x) + qy(x) &= R(x) \\ \mathrm{e}^{2t}y''(\mathrm{e}^t) + p\mathrm{e}^ty'(\mathrm{e}^t) + qy(\mathrm{e}^t) &= R(\mathrm{e}^t) \\ w''(t) - w'(t) + pw'(t) + qy(\mathrm{e}^t) &= R(\mathrm{e}^t) \end{aligned}$$

$$w''(t) + (p-1)w'(t) + qw(t) = R(\mathrm{e}^t)$$

と変形されます。

(2) $w(t) = y(\mathrm{e}^t)$ と置けば、(1) の結果から

$$\begin{aligned} w''(t) - 4w'(t) + 4w(t) &= \mathrm{e}^{2t} \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right)^2 w(t) &= \mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

です。ここで $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right) w(t) = v(t)$ とおけば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right) v(t) &= \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-2t}v'(t) - 2\mathrm{e}^{-2t}v(t) &= 1 \\ \left\{\mathrm{e}^{-2t}v(t)\right\}' &= 1 \\ \mathrm{e}^{-2t}v(t) &= t + C \\ v(t) &= t\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

となっている事が分かります。これを戻せば

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\right) w(t) &= t\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-2t}w'(t) - 2\mathrm{e}^{-2t}w(t) &= t + C \\ \left\{\mathrm{e}^{-2t}w(t)\right\}' &= t + C \\ \mathrm{e}^{-2t}w(t) &= \frac{1}{2}t^2 + Ct + D \\ w(t) &= \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{2t} + Ct\mathrm{e}^{2t} + D\mathrm{e}^{2t} \\ y(\mathrm{e}^t) &= \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{2t} + Ct\mathrm{e}^{2t} + D\mathrm{e}^{2t} \\ y(x) &= \frac{1}{2}(\log x)^2x^2 + C(\log x)x^2 + Dx^2 \end{aligned}$$

となってこれが一般解です（C, D は任意の定数）。 □

14.3.2　因数分解法

$$(xD-2)^2y = x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2$$

と“因数分解”されます。$(xD-2)y=z$ と置いてこれを解いてゆけば

$$\begin{aligned}(xD-2)\{(xD-2)y\}&=x^2\\ (xD-2)z&=x^2\\ xz'-2z&=x^2\\ x^{-2}z'-2x^{-3}z&=x^{-1}\\ \left(x^{-2}z\right)'&=x^{-1}\\ z&=x^2\log|x|+Cx^2\\ (xD-2)y&=x^2\log|x|+Cx^2\\ xy'-2y&=x^2\log|x|+Cx^2\\ x^{-2}y'-2x^{-3}y&=\frac{1}{x}\log|x|+C\frac{1}{x}\\ \left(x^{-2}y\right)'&=\frac{1}{x}\log|x|+C\frac{1}{x}\\ y&=\frac{1}{2}x^2(\log|x|)^2+Cx^2\log|x|+Dx^2\end{aligned}$$

となってさっきと同じ解が得られます。 □

演習問題 14.2 [H17 阪大基礎工 (改) **]** (1) 微分方程式：

$$y''+2y+y=0$$

の一般解を求めて下さい。

(2) $z(x)\quad(x>0)$ の微分方程式：

$$x^2z''+3xz'+z=0 \qquad \cdots(*)$$

において $x=\mathrm{e}^t\quad(t=\log x)$ と変換したとき $z(\mathrm{e}^t)=w(t)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めて下さい。

(4) $(*)$ の解で

$$z(1)=0, \qquad \int_1^{\mathrm{e}} z(x)dx=1$$

を満たすものを求めて下さい。

演習問題 14.3 微分方程式：

$$x^2z''+3xz'+z=0 \qquad \cdots(*)$$

について、以下の問いに答えてください。

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=D$ として、方程式 $(*)$ が

$$(xD-\lambda)(xD-\mu)y=0 \qquad \cdots(**)$$

と変形されるように定数 λ,μ を求めてください。

(2) 方程式 $(**)$ を解いて $(*)$ の一般解を求めてください。

14.4　その他の変数変換法

演習問題 14.4 [H11 名工大（改） **]**

(1) 微分方程式 $y''+y=0$ の一般解を求めて下さい。

(2) $w(x)$ を微分方程式

$$4xw''(x)+2w'(x)+w(x)=0 \qquad \cdots(*)$$

の解とします。変数 x を $x=t^2$ により t に変換し、$u(t)=w(t^2)$ と置くとき、$u(t)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めて下さい。

演習問題 14.5 [S63 九州大 **]** 微分方程式 $xy'=2y-x$ について、以下の問いに答えて下さい。

(1) $y(x)=xu(x)$ とおき、$u(x)$ の方程式に直して下さい。

(2) 更に $x=\mathrm{e}^t$ とおけば方程式はどんな形になりますか。

(3) $y(3)=0$ なる与式の解を求めて下さい。

演習問題 14.6 [H12 京大工（改） **] 微分方程式：**

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x^4}y = \frac{1}{x^6}$$

について、以下の問いに答えて下さい。

(1) $t = -\frac{1}{x}$ と云う変数変換によって $w(t) = y(-\frac{1}{t})$ と置けば $w(t)$ は微分方程式：

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} + w(t) = t^2$$

を満たす事を示して下さい。

(2) 元の微分方程式の特殊解を、$y\left(-\frac{1}{t}\right) = At^2 + Bt + C$ の形で求めて下さい。

(3) 元の微分方程式の一般解を求めて下さい。

14.5 問題演習

演習問題 14.7 [H15 名工大 **] 微分方程式：**

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2$$

について以下の問いに答えて下さい：

(1) $y(x) = x^n$ が、対応する同次式の解である時の自然数 n の値を求めて下さい。

(2) (1) で求めた n を使って、元の方程式の解を

$$y(x) = z(x)x^n$$

と置いて $z(x)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

(3) (2) で求めた微分方程式を解いて $z(x)$ を求め、更に $y(x)$ を求めて下さい。

演習問題 14.8 微分方程式：

$$tf''(t) - (2t+1)f'(t) + (t+1)f(t) = (t^2 + t - 1)\mathrm{e}^t \quad (t > 0)$$

について以下の問いに答えて下さい：

(1) $f(t) = \mathrm{e}^t$ が、対応する同次式の解である事を確かめて下さい。

(2) 元の方程式の解を $f(t) = g(t)\mathrm{e}^t$ と置いて $g(t)$ の満たす微分方程式を求めて下さい。

(3) (2) で求めた微分方程式を解いて $g(t)$ を求め、更に $f(t)$ を求めて下さい。

演習問題 14.9 次の微分方程式：

$$(x-1)y''(x) + (1-2x)y'(x) + xy(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^x \quad \text{（ただし、} x > 1 \text{ とする）}$$

について、以下の問いに答えて下さい。

(1) $y(x) = \mathrm{e}^x$ がこの方程式に対応した同次方程式の解である事を示して下さい。

(2) もとの方程式の解を $y(x) = C(x)\mathrm{e}^x$ と置いた時、$C(x)$ が微分方程式：

$$C''(x) - \frac{1}{x-1}C'(x) = x - 1 \quad \text{（ただし、} x > 1 \text{ とする）}$$

を満たす事を示して下さい。

(3) (2) の微分方程式を $C'(x)$ の１階微分方程式と見てまず $C'(x)$ を求め、次いで $C(x)$、更にはもとの方程式の一般解 $y(x)$ を求めて下さい。

演習問題 14.10 微分方程式：

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^2 \quad \cdots(*)$$

について以下の問いに答えて下さい：

(1) $x > 0$ において $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ と置いて z の満たす微分方程式を求め、それを解いて元の方程式 $(*)$ の（$x > 0$ での）一般解を求めて下さい。

(2) 方程式 $(*)$ を

$$(xD - \lambda)(xD - \mu)y = x^2$$

の形に変形することを利用して一般解を求めてください。