15 微分方程式とは何か

15.1 落下

15.1.1 空気抵抗なし

問題 15.1.1 質量 m の質点を水平方向に初速度 1 で打ち出したとき、質点はどんな軌跡を描いて落下するでしょうか。空気抵抗は考えません。

時刻 t での質点の位置を $(x(t), y(t))$ とします。時刻 $t=0$ で質点は原点にあるものとします。

質点の時刻 t での速度ヴェクター $\mathbb{v}(t)$ および加速度ヴェクター $\mathbb{a}(t)$ は

$$\mathbb{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

です。また、質点に働く力を $\mathbb{F}(t)$ とすると、質点は運動方程式：

$$\mathbb{F}(t) = m\mathbb{a}(t)$$

を満たすことが知られています。

今考えている運動では、質点に働く力は y-軸負の方向の重力のみであり、それは時刻によらず一定であって、重力加速度を g とすれば

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

となります。従って運動方程式を成分ごとに書けば

$$\begin{cases} x''(t) &= 0 \\ y''(t) &= -g \end{cases}$$

となり、これを積分すれば（初期値 $x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 1, y'(0) = 0$）$x(t) = t, y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ が得られます。

以上から質点は放物線：$y = -\frac{1}{2}gx^2$ を描きながら落下することが分かります。 □

15.1.2 空気抵抗あり

問題 15.1.2 雲から落ちる質量 m の雨粒の速度 $v(t)$ の時間変化はどうなりますか。以下の場合に答えてください。ただし、重力と空気抵抗以外の力は加わらず、重力加速度を g とします。

(1) 空気抵抗を考えない場合。
(2) 速度に比例する空気抵抗を受ける場合。

(1) 雨粒の運動方程式は

$$mv'(t) = mg, \qquad v(0) = 0$$

です。従って

$$\begin{aligned} v' &= g \\ v &= gt + C \end{aligned}$$

であり、初期条件から $C = 0$ なので、

$$v(t) = gt$$

です。

(2) 空気抵抗の比例定数を k とすれば雨粒の運動方程式は

$$mv'(t) = mg - kv(t), \qquad v(0) = 0$$

です。従って

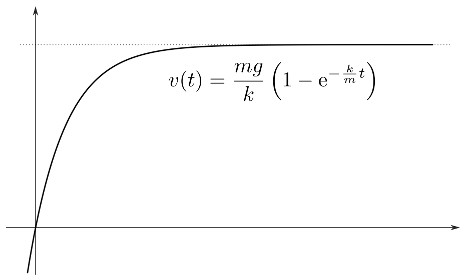
$$\begin{aligned} v' &= g - \frac{k}{m}v \\ v' + \frac{k}{m}v &= g \\ \mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}v' + \frac{k}{m}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}}v &= g\mathrm{e}^{\frac{k}{m}} \\ \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}v\right)' &= g\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t} \\ \mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}v &= \frac{mg}{k}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t} + C \end{aligned}$$

$$v = \frac{mg}{k} + C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

であり、初期条件から $C = -\frac{mg}{k}$ なので、

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

です。



□

15.2　個体数

15.2.1　Malthusian model (T.R.Malthus, 1798)

一定の環境のもとでのバクテリアの個体数の増加の様子を見ると、個体数 $N(t)$ の増加率は現在の個体数に比例すると考えられます。

Thomas Robert Malthus は、1798 年に発表した『人口論』において、『製品自体が製品を生み出し』幾何級数的に増加する人口と、『生産装置が製品を生み出し』算術級数的にしか増加しない食糧の差により、人口と食料のバランスは失われ、貧困が発生する」との考え (いわゆる「マルサスの罠」) を示しました。

$$N'(t) = MN(t)$$

M はマルサス定数と呼ばれる正の定数です。この微分方程式は簡単に解くことができます。積分因子を掛ける方法がよいでしょうか。

$$\begin{aligned} N' - MN &= 0 \\ \mathrm{e}^{-Mt}N' - M\mathrm{e}^{-Mt}N &= 0 \\ \left(\mathrm{e}^{-Mt}N\right)' &= 0 \\ \mathrm{e}^{-Mt}N &= C \\ N(t) &= C\mathrm{e}^{Mt} \end{aligned}$$

$N_0 = C$ ですから個体数は以下の通りになります：

$$N(t) = N_0\mathrm{e}^{Mt}$$

しかしこのモデルでは個体数は時間と共に単調増加し無限大に発散しますので、初期段階では当てはまる部分はありますが、長期的には有効ではありません。

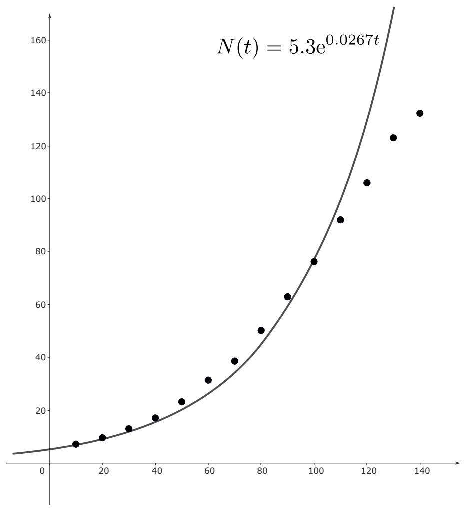
合衆国の人口（単位・100 万人）

年	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890
人口	5.3	7.2	9.6	13.0	17.1	23.2	31.4	38.6	50.2	62.9
年	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口	76.2	92.0	106.0	123.0	132.3	151.7	180.0	205.4	227.7	250.1
年	2000	2010	2020							
人口	282.3	309.7	331.3							

1800 年を $t = 0$、つまり $N_0 = 5.3$ とし、$N(100) = 76.2$ であることから M を求めると $M \approx 0.00267$ が得られますので

$$N(t) = 5.3\mathrm{e}^{0.0267t}$$

と考えて曲線を書いてみると下図の通りになります。



$t=100$ でマルサス定数を計算していますので $t=100$ までは何とか持ち堪えていますが、その後は現実値とのずれが大きくなっていきます。

このモデルで 2020 年の人口を『予測』すると 18 億 8500 万人と出てしまい・・・

15.2.2　logistic model(P.-F.Verhulst, 1838;　R.Pearl, L.Reed, 1920)

ベルギーの数学者 Pierre-François Verhulst によって Malthus のモデルを改良したものがこのロジスティックモデルです。

$$N'(t)=rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)$$

現実には個体数が増加すると食料を含む環境は悪化し、増加にブレーキが掛かるように思われます。上のモデルでは、$N(t)$ が小さいうちは個体数増加率はほぼ個体数に比例しますが（比例定数 r は内的自然増加率と呼ばれます)、$N(t)$ が環境収容力 K に近づくにつれ個体数増加率は減少してゆきます。

$$\begin{aligned}
N'&=\frac{r}{K}N\left(K-N\right)\\
\frac{1}{N(K-N)}N'&=\frac{r}{K}\\
\frac{1}{K}\int\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right)dN&=\frac{r}{K}t+C\\
\log N-\log(K-N)&=rt+C\\
\frac{N}{K-N}&=C\mathrm{e}^{rt}\\
N&=C\mathrm{e}^{rt}(K-N)\\
(1+C\mathrm{e}^{rt})N&=CK\mathrm{e}^{rt}\\
N&=\frac{CK\mathrm{e}^{rt}}{1+C\mathrm{e}^{rt}}
\end{aligned}$$

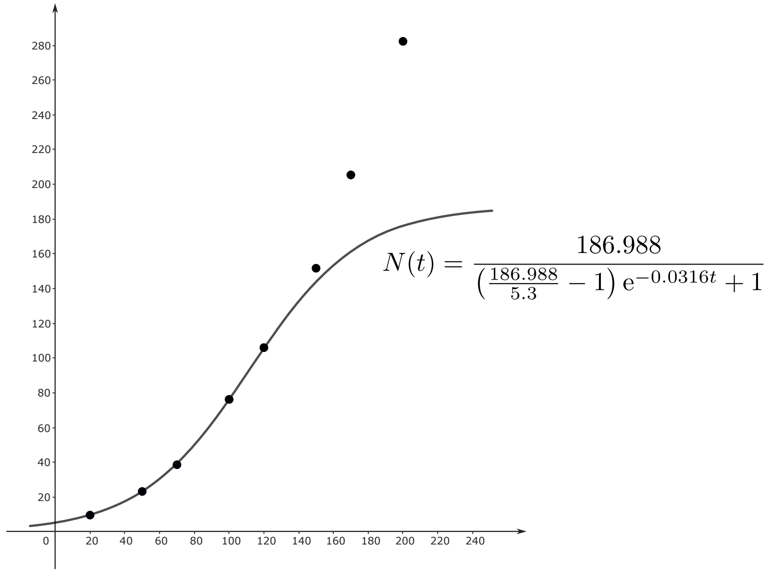
初期値を $N(0)=N_0$ とすれば $\frac{N_0}{K-N_0}=C$ ですから、個体数は

$$N(t)=\frac{\frac{N_0}{K-N_0}K\mathrm{e}^{rt}}{1+\frac{N_0}{K-N_0}\mathrm{e}^{rt}}=\frac{K}{\left(\frac{K}{N_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}+1}$$

です。

$t=100,50$ を使って計算すれば、$K=186.988, r=0.0316$ が得られますから、次のようになります：

$$N(t)=\frac{186.988}{\left(\frac{186.988}{5.3}-1\right)\mathrm{e}^{-0.0316t}+1}$$



このモデルで 2020 年の人口を『予測』してみると、1 億 8100 万人となり、実際の値よりも低く出てはいますが、マルサスモデルの予測値に比べれば幾分マシでしょうか。

15.2.3　Gompertz 曲線 (B.Gompertz, 1825;　S.Wright, 1926)

高齢者の死亡率が指数関数的に高まることについての Gompertz の先行研究は、個体数の理論に有効であることが 100 年後に再発見されました。

$$N'(t)=-kN(t)\log\frac{N(t)}{L}$$

このモデルは、変形すると

$$N'=-kN\log\frac{N}{L}=kN(\log N-\log L)=k\log LN\left(1-\frac{\log N}{\log L}\right)$$

と書けますから、ロジスティックモデルの減少圧力の部分が $N(t)$ ではなく、$\log N(t)$ になったものだと理解することが出来ます。

微分方程式を解いてみましょう。両辺を L で割って $\frac{N}{L}=Z$ と置けば

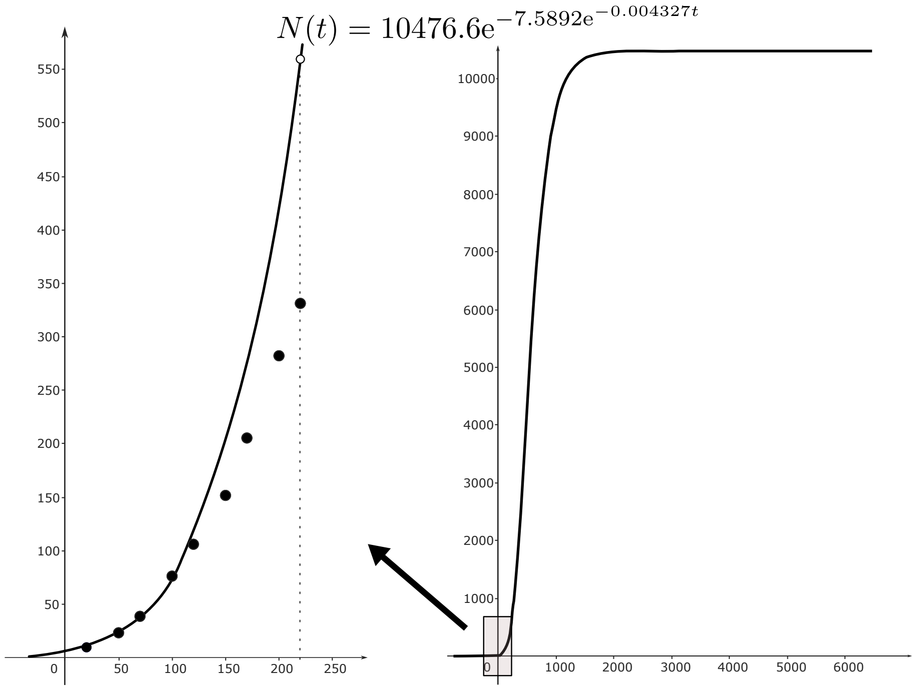
$$\begin{aligned}
\frac{N'}{L}&=-k\frac{N}{L}\log\frac{N}{L}\\
Z'&=-kZ\log Z
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{Z\log Z}Z' = -k$$
$$(\log|\log Z|)' = -k$$
$$\log|\log Z| = -kt + C$$
$$\log Z = C\mathrm{e}^{-kt}$$
$$Z = \mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}}$$
$$N(t) = L\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}}$$

が得られます。

$t = 0, 50, 100$ のデータを使えば、$C \approx -7.5892,\ L \approx 10476.6,\ k \approx 0.004327$ が得られますので、$N(t)$ は以下の通りに予測されます：

$$N(t) = 10476.6\mathrm{e}^{-7.5892\mathrm{e}^{-0.004327t}}$$



これでもまだ現実との差は大きいですね。もっと減少圧力があるということでしょう。

15.3 問題演習

演習問題 15.1 雲から落ちる質量 m の雨粒の速度 $v(t)$ の時間変化は、速度の自乗に比例する空気抵抗を受ける場合どうなりますか。

演習問題 15.2 サイクロイドをひっくり返した斜面 $x = \theta - \sin\theta, y = 1 + \cos\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi)$ 上の点から初速度 0 でボールを転がした時、最下点 $B(\pi, 0)$ に至るまでに掛かる時間は、出発点によらずに一定であることを示してください。

演習問題 15.3 速度に比例した抵抗力がかかるような媒質の中で、バネ定数 K のバネに質量 m のオモリを吊し、つり合いの位置から 1cm だけオモリを引っ張ってから時刻 0 に静かに手を離したとき、t 秒後のオモリの位置（つり合いの位置からの下方変位）$x(t)$cm はどんな時間変化をするでしょうか。

15.4　問題演習解答例

演習問題 15.1 雲から落ちる質量 m の雨粒の速度 $v(t)$ の時間変化は、速度の自乗に比例する空気抵抗を受ける場合どうなりますか。

空気抵抗の比例定数を l とすれば、雨粒の運動方程式は

$$mv'(t) = mg - lv(t)^2, \qquad v(0) = 0$$

です。

従って

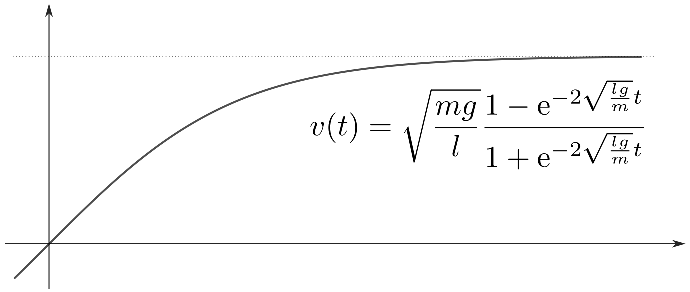
$$\begin{aligned}
v' &= g - \frac{l}{m}v^2 \\
&= -\frac{l}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{l}\right) \\
\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{l}}v' &= -\frac{l}{m} \\
\int \frac{1}{v^2 - \frac{mg}{l}}dv &= -\frac{l}{m}t + C \\
\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{mg}}\int\left(\frac{1}{v - \sqrt{\frac{mg}{l}}} - \frac{1}{v + \sqrt{\frac{mg}{l}}}\right)dv &= -\frac{l}{m}t + C \\
\log\left|v - \sqrt{\frac{mg}{l}}\right| - \log\left|v + \sqrt{\frac{mg}{l}}\right| &= -2\sqrt{\frac{lg}{m}}t + C \\
\log\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{l}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{l}}}\right| &= -2\sqrt{\frac{lg}{m}}t + C \\
\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{l}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{l}}} &= C\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{lg}{m}}t}
\end{aligned}$$

が得られ、初期条件により $C = -1$ ですから、

$$\begin{aligned}
\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{l}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{l}}} &= -\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{lg}{m}}t} \\
v - \sqrt{\frac{mg}{l}} &= -\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{lg}{m}}t}\left(v + \sqrt{\frac{mg}{l}}\right) \\
\left(1 + \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{lg}{m}}t}\right)v &= \left(1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{lg}{m}}t}\right)\sqrt{\frac{mg}{l}}
\end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{l}}\frac{1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{lg}{m}}t}}{1 + \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{lg}{m}}t}}$$

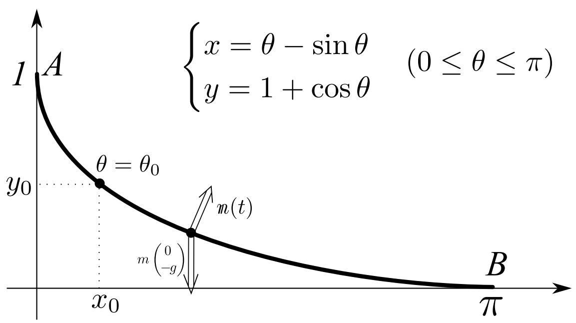
です。



□

演習問題 15.2 サイクロイドをひっくり返した斜面 $x = \theta - \sin\theta, y = 1 + \cos\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi)$ 上の点から初速度 0 でボールを転がした時、最下点 $B(\pi, 0)$ に至るまでに掛かる時間は、出発点によらずに一定であることを示してください。

曲線上で y を x で表したものを $y = Y(x)$ としておきます。



$$\begin{cases}
m\mathbb{a}(t) = m\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix} + \mathbb{n}(t) \\
y(t) = Y(x(t)) \\
\mathbb{n}(t) \perp \begin{pmatrix}1\\Y'(x(t))\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \\
\mathbb{v}(0) = \mathbb{o}
\end{cases}$$

Energy 保存の法則から、

$$\frac{1}{2}m|\mathbb{v}(t)|^2 + mgy(t) = mgy_0$$

ですが、

$$y'(t) = Y'(x)x'(t)$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}(x')^2 + (y')^2 &= 2g\{y_0 - y\}\\ (x')^2 + (Y')^2(x')^2 &= 2g(y_0 - y)\\ (x')^2 &= \frac{2g(y_0 - y)}{1 + Y'(x)^2}\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{2g(y_0 - y)}{1 + (Y'(x))^2}}\\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} &= \sqrt{\frac{1 + (Y'(x))^2}{2g(y_0 - Y(x))}}\end{aligned}$$

ですから、最下点 B までに掛かる時間 T は、

$$T = \int_{x_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 + (Y'(x))^2}{2g(y_0 - Y(x))}}dx$$

で計算されます。

ここで $x = \theta - \sin\theta\,(0 \leq \theta \leq \pi)$ と置換すれば、

$$\begin{aligned}y'(\theta) &= Y'(x(\theta))x'(\theta)\\ -\sin\theta &= Y'(x)(1 - \cos\theta)\\ Y'(x) &= \frac{-\sin\theta}{1 - \cos\theta}\end{aligned}$$

ですから

$$1 + (Y'(x))^2 = 1 + \frac{\sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

$$y_0 - Y(x) = \cos\theta_0 - \cos\theta$$

に注意して

$$T = \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{\frac{2}{1-\cos\theta}}{2g(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}(1 - \cos\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{g(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}d\theta$$

が得られますが、ここでさらに $\cos\frac{\theta}{2} = v$ と置換すれば、$\cos\frac{\theta_0}{2} = v_0$ として

$$\sqrt{1 - \cos\theta}d\theta = \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = -2\sqrt{2}dv$$

$$\cos\theta_0 - \cos\theta = 2\left(\cos^2\frac{\theta_0}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 2(v_0^2 - v^2)$$

ですから、

$$T = \int_{v_0}^{0} \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2g(v_0^2 - v^2)}}dv = \frac{2}{\sqrt{g}}\int_0^{v_0} \frac{1}{v_0^2 - v^2}dv$$

となります。ここでまた $v = v_0 \sin w$ $\left(0 \leq w \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と置けば、

$$T = \frac{2}{\sqrt{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - v_0^2\sin^2 w}}v_0\cos w\,dw = \frac{2}{\sqrt{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dw = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$$

が得られ、T は x_0 に依存せずに定数であることが分かります。 □

【参考：Energy 保存則の導出】 $|\mathbb{n}(t)| = N(t)$ とおくと、

$$\mathbb{n}(t) = \frac{N(t)}{\sqrt{1 + (Y'(x))^2}}\begin{pmatrix}-Y'(x)\\ 1\end{pmatrix}$$

ですから、

$$\begin{aligned}x''(t) &= -\frac{Y'(x(t))}{\sqrt{1 + (Y'(x(t)))^2}}\frac{N(t)}{m}\\ y''(t) &= -g + \frac{1}{\sqrt{1 + (Y'(x(t)))^2}}\frac{N(t)}{m}\end{aligned}$$

であり、ここから $N(t)$ を消去すれば

$$\begin{aligned}x'' &= (y'' + g)\{-Y'(x)\}\\ x'' + (y'' + g)Y'(x) &= 0\\ x'x'' + (y'' + g)Y'(x)x' &= 0\\ x'x'' + (y'' + g)y' &= 0\\ \left\{\frac{1}{2}\{(x')^2 + (y')^2\} + gy\right\}' &= 0\\ \frac{1}{2}|\mathbb{v}|^2 + gy &= C\\ \frac{1}{2}m|\mathbb{v}|^2 + mgy &= \tilde{C}\end{aligned}$$

となって energy 保存則が導出されます。

演習問題 15.3 速度に比例した抵抗力がかかるような媒質の中で、バネ定数 K のバネに質量 m のオモリを吊し、つり合いの位置から 1cm だけオモリを引っ張ってから時刻 0 に静かに手を離したとき、t 秒後のオモリの位置（つり合いの位置からの下方変位）$x(t)$cm はどんな時間変化をするでしょうか。

抵抗力の比例定数を L とすれば、オモリの下方変位 $x(t)$ は微分方程式：

$$mx''(t) = -Kx(t) - Lx'(t), \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

を満たします（K, L は正の定数）。

特性方程式は

$$mT^2 + LT + K = 0$$

です。

【$L^2 - 4mK > 0$ のとき】特性方程式は２つの異なる実数解 α, β をもちますが、

$$\alpha + \beta = -\frac{L}{m} < 0, \quad \alpha\beta = \frac{K}{m} > 0$$

ですから、$\alpha, \beta < 0$ です。

このとき微分方程式の一般解は

$$x(t) = Ce^{\alpha t} + De^{\beta t}$$

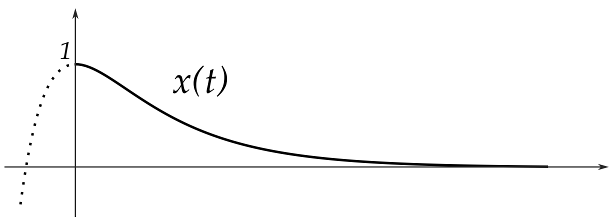
であり、初期条件から

$$C + D = 1, \quad \alpha C + \beta D = 0$$

が得られ、これを解いて $C = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$, $D = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ です。従って変位 $x(t)$ は

$$x(t) = \frac{\beta}{\beta-\alpha}e^{\alpha t} + \frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{\beta t}$$

です。



このとき、

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

$$x'(t) = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{\alpha t} - e^{\beta t}\right) < 0$$

ですから、オモリは手を離した位置からつり合いの位置へ戻ってゆきます。

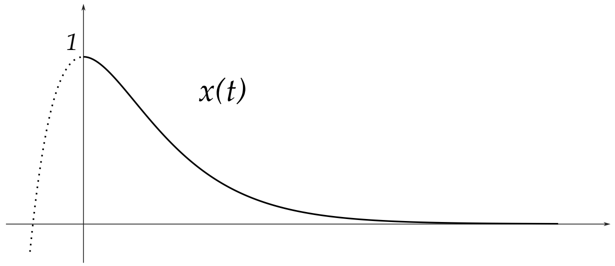
【$L^2 - 4mK = 0$ のとき】特性方程式は実重解 $\alpha < 0$ をもち、微分方程式の一般解は

$$x(t) = (Ct + D)e^{\alpha t}$$

です。初期条件によれば $C = -\alpha, D = 1$ ですから、変位 $x(t)$ は

$$x(t) = (1 - \alpha t)e^{\alpha t}$$

です。



$$x'(t) = -\alpha^2 te^{\alpha t} < 0$$

ですからこれは単調減少で、

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

です。

【$L^2 - 4mK < 0$ のとき】特性方程式は共役な複素数解 $\alpha \pm i\beta$ をもちます。ここで $\alpha < 0$ であり、一般解は

$$x(t) = Ce^{\alpha t}\cos\beta t + De^{\alpha t}\sin\beta t$$

となります。初期条件によれば $C = 1, D = -\frac{\alpha}{\beta}$ であって、変位 $x(t)$ は

$$x(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t - \frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

です。この場合も

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

ですが、$x(t)$ は単調ではなく、振動しながらつり合いの位置に収束していきます（減衰振動）。