問題 1 次の初期値問題の解を求めてください：

$$y' = \frac{x-1}{x^2}, \qquad y(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

配点：30 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　まず一般解を求めます。

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ y &= \log|x| + \frac{1}{x} + C \quad (C \text{ は任意の定数}) \end{aligned}$$

初期条件によれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{e}} &= \log|\mathrm{e}| + \frac{1}{\mathrm{e}} + C \\ 0 &= 1 + C \\ C &= -1 \end{aligned}$$

ですから、求める解は

$$y = \log|x| + \frac{1}{x} - 1$$

です。

□

問題 2 次の微分方程式の一般解を求めてください：

$$y' = (y-1)^3$$

配点：15 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　以下 C は任意定数を表し、異なる行に現れるものは異なるものとします。

$y = 1$ は微分方程式を満たしています。
$y \neq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} y' &= (y-1)^3 \\ \frac{1}{(y-1)^3} y' &= 1 \\ \int \frac{1}{(y-1)^3} dy &= \int dx \\ -\frac{1}{2}(y-1)^{-2} &= x + C \\ (y-1)^{-2} &= C - 2x \\ (y-1)^2 &= \frac{1}{C-2x} \end{aligned}$$

です。従って一般解は

$$(y-1)^2 = \frac{1}{C-2x} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

となります。特異解 $y = 1$ は $C \to \pm\infty$ に相当しています。

□

問題 3 次の微分方程式の一般解を求めてください：

$$y' = \frac{6x+5y}{x+2y}$$

配点：5 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　$x \neq 0$ において $y = xv$ とおけば

$$y' = v + xv'$$

であって、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{6x+5y}{x+2y} \\ v + xv' &= \frac{6x+5xv}{x+2xv} \\ xv' &= \frac{6+5v}{1+2v} - v \\ &= \frac{6+4v-2v^2}{1+2v} \\ &= -\frac{2(v-3)(v+1)}{2v+1} \end{aligned}$$

ですから、$v \neq 3, -1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{2v+1}{(v-3)(v+1)} v' &= -\frac{2}{x} \\ \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{v-3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{v+1}\right) v' &= -\frac{2}{x} \\ \int \left(7 \cdot \frac{1}{v-3} + \frac{1}{v+1}\right) dv &= -\int \frac{8}{x} dx \\ 7\log|v-3| + \log|v+1| &= -8\log|x| + C \\ \log\left(|v-3|^7|v+1||x|^8\right) &= C \\ (v-3)^7(v+1)x^8 &= \pm \mathrm{e}^C \end{aligned}$$

となります。

ここで自明な解 $v = 3, -1$ を加えて

$$\begin{aligned} (v-3)^7(v+1)x^8 &= C \\ (y-3x)^7(y+x) &= C \end{aligned}$$

を得ます。

従って求める一般解は

$$(y-3x)^7(y+x) = C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

です。

□