問題 1 次の完全微分型微分方程式の一般解を求めてください：

$$2x - 3y - 1 + (2y - 3x + 4)y' = 0$$

配点：30 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

ポテンシャル関数を $U(x,y)$ とすると、$U_x = 2x - 3y - 1$ ですから、

$$U = x^2 - 3yx - x + C(y)$$

と置けます。

更に $U_y = 2y - 3x + 4$ なので

$$\begin{aligned} 2y - 3x + 4 &= -3x + C'(y) \\ 2y + 4 &= C'(y) \\ C(y) &= y^2 + 4y + D \end{aligned}$$

ですから、

$$U(x,y) = x^2 - 3xy - x + y^2 + 4y$$

が見つかります。

従って一般解は

$$x^2 - 3xy - x + y^2 + 4y = C \quad （C\ \text{は任意の定数}）$$

です。 □

問題 2 次の１階線形微分方程式の初期値問題の解を求めてください。

$$y' + xy = (x+2)\mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 3$$

配点：20 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

両辺に $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ を掛ければ

$$\begin{aligned} y' + xy &= (x+2)\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y' + x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y &= (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x} \\ \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y\right)' &= (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x} \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}y &= \int (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x}dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+2x} + C \\ y &= \mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

が得られます。

また、初期条件によれば

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + C \\ C &= 2 \end{aligned}$$

ですから、求める初期値問題の解は

$$y = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

です。