問題 1 次の微分方程式の一般解を求めてください。

(1) $y+(x+2)y'=1, \quad (x>0)$

(2) $(x^2+1)y'=2$

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　以下全ての問題において、C は任意定数とし、異なる行に現れるものは異なるものとします。

(1)

$$
\begin{aligned}
y+(x+2)y' &= 1 \\
(x+2)'y+(x+2)y' &= 1 \\
\{(x+2)y\}' &= 1 \\
(x+2)y &= x+C \\
y &= \frac{x+C}{x+2} \\
&= 1+\frac{C}{x+2} \\
(x+2)(y-1) &= C \\
xy+2y-x &= C
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(x^2+1)y' &= 2 \\
y' &= \frac{2}{x^2+1} \\
y &= 2\mathrm{Tan}^{-1}x+C
\end{aligned}
$$

問題 2 次の初期値問題の解を求めてください。

$y'=x(y+1)^3, \quad y(0)=1$

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

$$
\begin{aligned}
y' &= x(y+1)^3 \\
\frac{1}{(y+1)^3}y' &= x \\
\left\{-\frac{1}{2(y+1)^2}\right\}' &= x \\
-\frac{1}{2(y+1)^2} &= \frac{1}{2}x^2+C
\end{aligned}
$$

初期条件によれば、

$$
-\frac{1}{8}=C
$$

ですから、求める初期値問題の解は

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2(y+1)^2} &= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8} \\
\frac{4}{(y+1)^2} &= 1-4x^2 \\
4 &= (1-4x^2)(y+1)^2 \\
(y+1)^2 &= \frac{4}{1-4x^2} \\
y+1 &= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \\
y &= -1+\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}
\end{aligned}
$$

です。

問題 3 次の同次型方程式の一般解を求めてください。

(1) $y' = \dfrac{3x+y}{x}, \quad (x>0)$　　(2) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

(1) $y = xv$ と置けば $y' = v + xv'$ ですから、一般解を求めると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x+y}{x} \\ &= 3 + \frac{y}{x} \\ v + xv' &= 3 + v \\ v' &= \frac{3}{x} \\ v &= 3\log x + C \\ y &= x\log x^3 + Cx \end{aligned}$$

です。

(2) $y = xv$ と置けば $y' = v + xv'$ ですから、一般解を求めると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x-y}{x+y} \\ &= \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} \\ v + xv' &= \frac{1-v}{1+v} \\ xv' &= \frac{1-2v-v^2}{1+v} \\ -\frac{v+1}{v^2+2v-1}v' &= \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{2}\int \frac{2v+2}{v^2+2v-1}dv &= \int \frac{1}{x}dx \\ -\frac{1}{2}\log|v^2+2v-1| &= \log|x| + C \\ \log|v^2+2v-1| + \log x^2 &= -2C \\ \log|v^2+2v-1|x^2 &= -2C \\ (v^2+2v-1)x^2 &= C \\ y^2+2xy-x^2 &= C \end{aligned}$$

です。 □

問題 4 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$y' + 3x^2 y = 2x^2$$

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

両辺に $\mathrm{e}^{(x^3)}$ を掛ければ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{(x^3)}y' + 3x^2\mathrm{e}^{(x^3)}y &= 2x^2\mathrm{e}^{(x^3)} \\
\left(\mathrm{e}^{(x^3)}y\right)' &= \left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{(x^3)}\right)' \\
\mathrm{e}^{(x^3)}y &= \frac{2}{3}\mathrm{e}^{(x^3)} + C \\
y &= \frac{2}{3} + C\mathrm{e}^{-x^3}
\end{aligned}$$

を得ます。 □

問題 5 次の１階微分方程式が完全微分型であるかどうか判定してください。また完全微分型である場合は、ポテンシャル関数を求めてください。

(1) $4x^2 - xy^2 + 1 + (3 - x^2y)y' = 0$　(2) $\cos(xy) + \cos(xy)y' = 0$

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

(1)

$$(4x^2 - xy^2 + 1)_y = -2xy, \quad (3 - x^2y)_x = -2xy$$

従ってこれは完全微分型です。

$U = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + C(y)$ と置けば、

$$\begin{aligned}
U_y &= \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + C(y)\right)_y \\
3 - x^2y &= -x^2y + C'(y) \\
C'(y) &= 3 \\
C(y) &= 3y + D
\end{aligned}$$

従って

$$U(x, y) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + x + 3y$$

です。

(2)

$$\{\cos(xy)\}_y = -\sin(xy)x, \qquad \{\cos(xy)\}_x = -\sin(xy)y$$

従ってこれは完全微分型ではありません。 □

問題 6 次の方程式の一般解を求めてください。

$$y' - \mathrm{e}^{5x} y^4 - 2y = 0$$

配点：5 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

　両辺を y^4 で割れば

$$\frac{1}{y^4} y' - 2\frac{1}{y^3} = \mathrm{e}^{5x}$$

であり、$\frac{1}{y^3} = z$ とおけば

$$z' = -3\frac{1}{y^4}$$

であって

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} z' - 2z &= \mathrm{e}^{5x} \\ z' + 6z &= -3\mathrm{e}^{5x} \end{aligned}$$

です。

　ここで両辺に e^{6x} を掛ければ

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{6x} z' + 6\mathrm{e}^{6x} z &= -3\mathrm{e}^{11x} \\ \left\{\mathrm{e}^{6x} z\right\}' &= -3\mathrm{e}^{11x} \\ \mathrm{e}^{6x} z &= -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{11x} + C \\ z &= -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{5x} + C\mathrm{e}^{-6x} \end{aligned}$$

です。$z = \frac{1}{y^3}$ でしたから、

$$\frac{1}{y^3} = -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{5x} + C\mathrm{e}^{-6x}$$

が元の方程式の一般解です。　□

問題 7 次の微分方程式の一般解を求めてください。

$$y'' - y' - 6y = 8\mathrm{e}^{2x}$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

　微分演算子を使って書けば

$$(D-3)(D+2)y = 8\mathrm{e}^{2x}$$

です。ここで $(D+2)y = z$ と置けば

$$(D-3)z = 8\mathrm{e}^{2x}$$

であり、両辺に $z(x) = w(x)\mathrm{e}^{3x}$ と置いて変形すれば

$$\begin{aligned} (D-3)(w(x)\mathrm{e}^{3x}) &= 8\mathrm{e}^{2x} \\ w'(x)\mathrm{e}^{3x} &= 8\mathrm{e}^{2x} \\ w'(x) &= 8\mathrm{e}^{-x} \\ w(x) &= -8\mathrm{e}^{-x} + C_1 \end{aligned}$$

が分かります。従って

$$(D+2)y = z = w(x)\mathrm{e}^{3x} = -8\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x}$$

となるのでここでまた $y = v\mathrm{e}^{-2x}$ と置けば

$$\begin{aligned} (D+2)(v\mathrm{e}^{-2x}) &= -8\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x} \\ v'\mathrm{e}^{-2x} &= -8\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x} \\ v' &= -8\mathrm{e}^{4x} + C_1\mathrm{e}^{5x} \\ v &= -2\mathrm{e}^{4x} + C_1\mathrm{e}^{5x} + C_2 \\ y = v\mathrm{e}^{-2x} &= -2\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

が得られます。　□

問題 8 速度に比例した抵抗力が働くような液体の中に吊るされたバネに質量 1 のオモリを吊るし、つり合いの位置から少しだけ（長さ 1）オモリを下に引いて時刻 0 に静かに手を離します。このとき、時刻 t でのオモリのつり合いの位置からの下向きの変位 $x(t)$ は次のような微分方程式を満たすことが知られています。

$$x''(t) = -kx(t) - lx'(t), \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

液体とオモリの形状で決まる粘性抵抗係数 $l > 0$ とバネ定数 $k > 0$ が以下の場合に、$x(t)$ が $t > 0$ でどのような時間変化をするか大雑把に論じてください。

(1) $l = 5, k = 4$ のとき（抵抗が大きい場合）。

(2) $l = 6, k = 25$ のとき（バネが強い場合）。

ただし、２階定数係数線形同次微分方程式の一般解に関する事実を、特性方程式の解との関連で知っているのであれば、その一般解に関する事実は利用しても良いものとします。

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア、ウ

【解答例】　問題の微分方程式は

$$x'' + lx' + kx = 0$$

です。

(1) この場合は

$$x'' + 5x' + 4x = 0$$

であり、特性方程式は

$$0 = T^2 + 5T + 4 = (T+1)(T+4)$$

です。この場合一般解は

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-t} + D\mathrm{e}^{-4t}$$

であって、初期条件から

$$C + D = 1, \quad -C - 4D = 0$$

であり、$C = \frac{4}{3}, D = -\frac{1}{3}$ ですから

$$x(t) = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}$$

です。

$$x'(t) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t} = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4t}(1 - \mathrm{e}^{3t})$$

によれば、$x(t)$ は $t \to \infty$ において単調に減少し、0 に近づいて行きます。

(2) この場合は

$$x'' + 6x' + 25x = 0$$

であり、特性方程式は

$$0 = T^2 + 6T + 25 = (T+3)^2 + 16$$

です。この場合一般解は

$$x(t) = \mathrm{e}^{-3t}(C\cos 4t + D\sin 4t)$$

であって、初期条件から

$$C = 1, \quad 4D - 3C = 0$$

となって $C = 1, D = \frac{3}{4}$ ですから

$$x(t) = \mathrm{e}^{-3t}\left(\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t\right)$$

です。

従って $t \to \infty$ につれて $x(t)$ は振動しながら振幅が小さくなって行き（減衰振動）、0 に近づいて行きます。 □