

17 世紀の方程式解法と平均値の定理

1.1 Johann Hudde の重解条件

1.1.1 Hudde 多項式

n 次多項式: $P(z) = w_0 + w_1z + \cdots + w_nz^n$

等差数列: $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd \quad (d \neq 0)$

に対して、 $P(z)$ の各項に等差数列の各項を掛け合わせて得られる多項式 $H_P(z)$:

$$H_P(z) = w_0a + w_1(a+d)z + \cdots + w_n(a+nd)z^n.$$

を、 $P(z)$ の (この等差数列による) Hudde (フデ) 多項式と言います (丁度 z^k の項に $a+kd$ が掛かっていることに注意してください)。

1.1.2 重解を求める Hudde の方法

n 次多項式 $P(z)$ が

$$P(z) = (z-s)(z-t)Q(z), \quad Q(z) = \sum_{j=0}^{n-2} w_j z^j$$

と因数分解されるとき、

$$P(z) = (z-s)(z-t) \sum_{j=0}^{n-2} w_j z^j = \sum_{j=0}^{n-2} w_j (z-s)(z-t) z^j = \sum_{j=0}^{n-2} w_j \{z^{j+2} - (s+t)z^{j+1} + stz^j\}$$

ですから、ここで等差数列 $a, a+d, \dots, a+nd$ によって Hudde 多項式 $H_P(z)$ を作ると

$$H_P(z) = \sum_{j=0}^{n-2} w_j \{a + (j+2)d\} z^{j+2} - (s+t) \{a + (j+1)d\} z^{j+1} + st \{a + jd\} z^j$$

$$H_P(s) = \sum_{j=0}^{n-2} w_j \{a + (j+2)d\} s^{j+2} - (s+t) \{a + (j+1)d\} s^{j+1} + st \{a + jd\} s^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} w_j ds(s-t)s^j$$

$$= ds(s-t)Q(s)$$

$$H_P(t) = dt(t-s)Q(t)$$

となっていることに注意します。

事実 1.1.1 n 次多項式 $P(z)$ が $P(z) = (z-s)(z-t)Q(z)$ と因数分解されるとき、公差 d の等差数列によって作られる Hudde 多項式 $H_P(z)$ について以下が成り立ちます:

$$H_P(s) = ds(s-t)Q(s), \quad H_P(t) = dt(t-s)Q(t).$$

(代数) 曲線の接線を求めようとするとき、あるいは 2 つの (代数) 曲線が接する条件を考えると、重解が問題となります。まだ現代のような微分概念が確立されていなかった 17 世紀中頃、オランダの数学者ヤン・フデ (Johann van Waveren Hudde, 1628-1704) は代数的な手続きによって曲線の接線を求める問題や極値問題に貢献しました。

$P(z)$ が t を重根としてもつ場合、先に見た事実 1.1.1 により $H_P(t) = 0$ が分かります。

定理 1.1.2 [Hudde の定理 (J.van W.Hudde 1657 頃)]

多項式 $P(z)$ が t を重根としてもつとき、どんな等差数列によって作られた Hudde 多項式 $H_P(z)$ も根 t をもちます。

2 つの多項式が共通根をもつかどうかは、所謂 Euclid の互除法によって調べることができますから、元の多項式とその Hudde 多項式が共通根をもつかどうか調べることで、元の多項式が重根をもつかどうか分かることになります。

例えば 3 次多項式 $P(z) = z^3 - 57z^2 + 936z - 3780$ に対して等差数列 $0, 1, 2, 3$ による Hudde 多項式 $H_P(z)$ を作ると

$$H_P(z) = 3z^3 - 114z^2 + 936z$$

ですから、割り算を実行して Euclid の互除法を進めると

$$z^3 - 57z^2 + 936z - 3780 = (3z^3 - 114z^2 + 936z) \cdot \frac{1}{3} - 19z^2 + 624z - 3780$$

$$3z^3 - 114z^2 + 936z = (-19z^2 + 624z - 3780) \left(\frac{294}{361} - \frac{3}{19}z \right) + \frac{1111320}{361} - \frac{61020}{361}z$$

$$-19z^2 + 624z - 3780 = \left(\frac{1111320}{361} - \frac{61020}{361}z \right) \left(\frac{6859}{61020}z - \frac{125989}{76614} \right) + \frac{16374960}{12769}$$

となり、 $P(z)$ と $H_P(z)$ は共通の因子をもたない、つまり共通根はないことが分かります。従って Hudde の定理により $P(z) = 0$ は重解をもちません。

実はこの特別な等差数列 $0, 1, 2, 3$ による Hudde 多項式は定数項がありませんから、自明な根 $z = 0$ を取り除いてやる（つまり z で割る）と

$$\frac{H_P(z)}{z} = 3z^2 - 114z + 936$$

であってこれは元の多項式 $P(z)$ の、現代で言うところの導関数 $P'(z)$ になっています。

元々 $P(z)$ は 0 を根にもちませんから、Hudde の定理は要するに $P(z)$ と $P'(z)$ が共通根をもつかどうかを調べていることになり、確かにそれは $P(z)$ が重解をもつ条件として現代の私たちが知っているものと一致しています。ただ、『特別な』等差数列だけでなく、どんな等差数列を使って Hudde 多項式を作っても同じ結果であると云うところが面白いところです。

1.2 Michel Rolle と彼の cascade

1.2.1 多項式の根と Hudde 多項式の根の関係

重根をもたない多項式 $P(z)$ が 2 つの異なる実数根 $s < t$ をもち、また $s < z < t$ の範囲に実数根をもたないとき、

$$P(z) = (z - s)(z - t)K(z)$$

と因数分解すれば、やはり先の事実 1.1.1 により

$$H_P(s) = ds(s - t)K(s), \quad H_P(t) = dt(t - s)K(t)$$

がそれぞれ分かりますが、 $K(z) = 0$ は s, t を根にもちませんから $K(s) \neq 0, K(t) \neq 0$ であり、 $s < z < t$ に根がないことから $K(s), K(t)$ は同符号です。従って $H_P(s)$ と $H_P(t)$ は異符号であり、次の事実（今で言う中間値の定理のようなものです）：

事実 1.2.1 [Rolle-Bolzano-Cauchy の定理 (M.Rolle 1691, B.Bolzano 1817)] $P(z)$ を多項式とするとき、 $P(a)$ と $P(b)$ が異符号であれば a と b の間に $P(c) = 0$ となる c が存在します。

により、区間 (s, t) の中に $H_P(z) = 0$ の解があることが分かります。

定理 1.2.2 [Rolle の定理 (M.Rolle 1691)] 多項式が重根をもたないとき、2 つの連続した根の間に（任意の）Hudde 多項式 $H_P(z)$ の根が存在します。

1.2.2 cascade と方程式の解法 ～具体例での計算～

3 次方程式：

$$P(z) = z^3 - 57z^2 + 936z - 3780 = 0$$

が重解をもたないことは Hudde の定理によって既に見ました。また、

事実 1.2.3 係数の符号が交互に変わる多項式は負の実数を根にもちません。

によれば実数解は全て正です（相異なる 3 つの正の解をもちます）。

係数の符号が交互に変わっていない場合でも次の事実が成り立ちますから、 $1 + h - z = x$ と変数変換することによって全ての解が正であるようにすることが出来ます：

事実 1.2.4 [Grande hypothèse] 最高次の係数が 1 である方程式

$$z^n + w_{n-1}z^{n-1} + \cdots + w_1z + w_0 = 0$$

の係数のうち絶対値の最も大きい負の係数を $-h$ とする（係数が全て非負の場合は $h = 0$ と考えます）と、この方程式の任意の実数解 α は $\alpha < 1 + h$ を満たします。

特別な等差数列 $0, 1, 2, 3$ を掛け合わせて得られる Hudde 多項式 $H_P^0(z)$ は定数項をもたず、自明な解 0 をもっていますから、正の実数解を問題にする場合はこれを取り除いたものを考えても良いので、Hudde 多項式 $H_P^0(z)$ を z で割ったものを考えます。これを $P(z)$ の cascade（カスケード）と言います：

$$C(z) = \frac{H_P^0(z)}{z} = \frac{3z^3 - 114z^2 + 936z}{z} = 3z^2 - 114z + 936$$

Hudde 多項式と cascade は正の根は共通であることに注意します。

まず Rolle の定理により $P(z) = 0$ の 3 つの解の間に 2 つ $C(z) = 0$ の解がある筈です。
次に $C(z)$ の更に cascade $C_1(z)$ を作ると

$$C_1(z) = 6z - 114 = 6(z - 19)$$

が得られ、Rolle の定理から $C(z) = 0$ の 2 解は $(0, 19)$ 、 $(19, \infty)$ に 1 つずつあることが分かりますし、事実 1.2.4 によれば、 $C(z)$ の最高次の係数を 1 にした $C_0(z) = z^2 - 38z + 312$ を考えて、 $C(z) = 0$ の解は区間 $(0, 19)$ 、 $(19, 39)$ の中に 1 つずつあることが分かります。

区間の端点と中点での符号を調べます：

- 【第 1 の区間】 $C_0(0) = 312 > 0$, $C_0(10) = 32 > 0$, $C_0(19) = -49 < 0 \leftarrow (10, 19)$ にある
更に分割： $C_0(15) = -33 < 0$, $C_0(13) = -13 < 0$, $C_0(12) = 0$ 。
【第 2 の区間】 $C_0(19) = -49 < 0$, $C_0(39) = 351 > 0$, $C_0(30) = 72 > 0 \leftarrow (30, 39)$ にはない、
 $C_0(25) = -13 < 0 \leftarrow (25, 30)$ にある, $C_0(27) = 15 > 0 \leftarrow (25, 27)$ にある,
 $C_0(26) = 0$

以上から $C(z) = 0$ は 2 つの解 12, 26 をもち、(先の事実 1.2.4 によれば $P(z) = 0$ の解は 3781 より小さいので) $P(z) = 0$ の 3 つの解は $(0, 12)$, $(12, 26)$, $(26, 3781)$ それぞれの中に 1 つずつあります。

- 【第 1 の区間】 $P(0) = -3780 < 0$, $P(12) = 972 > 0$, $P(6) = 0$ 。
【第 2 の区間】 $P(12) = 972$, $P(26) = -400$, $P(19) = 286$, $P(23) = -238$, $P(21) = 0$ 。
【第 3 の区間】 $P(26) = -400 < 0$, $P(3781) > 0$, ..., $P(50) = 25520$,
 $P(38) = 4352$, $P(32) = 572$, $P(29) = -184$, $P(30) = 0$

以上から 3 次方程式 $P(z) = 0$ の 3 つの解 6, 21, 30 が見つかりました。

1.3 平均値の定理

先に見た Rolle の定理は、現代では微分を使って次のように捉えられています。ただし Rolle 自身は $f(x)$ が多項式のときのみを考え、あくまで代数的な手続きによるカスケードを使っており、当時流行りつつあった（無限小を使った）微分概念にはむしろ強い懸念を表明していましたから何とも皮肉なものです：

定理 1.3.1 [Rolle の定理]

- 前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能
(iii) $f(a) = f(b)$

主張内容： $f'(c) = 0$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

しばらくは多項式に対する定理として受け継がれていましたが、連続関数の概念が確立されるに従い次第に連続関数の性質として認識されるようになり、現代と同じようにきちんと定式化され完全な証明が与えられたのは 19 世紀後半です。

【証明 U.Dini 1878】より基本的な次の事実に着きます：

事実 1.3.2 [閉区間上の連続関数の性質] 閉区間 J を含む領域で定義された連続関数 $f(x)$ は、 J 内での最大値と最小値をもちます。

$f(x)$ の $[a, b]$ での最大値と最小値が一致していれば $f(x)$ は一定値であり自明。そうでないならば最大値・最小値のうち少なくとも一方は区間内部に存在します。

区間内部の c において最大値 $f(c) = M$ が達成される場合は、

$$\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - M}{x - c} \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - M}{x - c} \leq 0$$

ですから

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0$$

となって $f'(c) = 0$ が分かります。最小値が達成される場合も同様です。□

しかしその頃には、Cavalieri らの認識に始まるより一般的な『平均値の定理』としての認識と統合されて行ったようです：

定理 1.3.3 [平均値の定理 (B.Cavalieri 1635, J.-L.Lagrange 1801)]

- 前提条件： (i) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続
(ii) $f(x)$ は (a, b) で微分可能

主張内容： $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる点 c が $a < c < b$ の範囲内にある

【証明 P.O.Bonnet 1868 頃】関数 $f(x)$ のグラフ上の異なる 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る割線 (secant) の方程式は

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

であり、グラフとこの直線の差：

$$D(x) = f(x) - y = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

を考えると、

$$D(a) = 0, \quad D(b) = 0$$

なので Rolle の定理により $D'(c) = 0$ となるような c が $a < c < b$ の範囲に存在します。ここで

$$D'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

によれば

$$D'(c) = 0 \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ですからこの c が題意を満たす点です。□

このような証明は後世のものであって、Lagrange 自身がこのようなことを考えたわけではなく、平均値の定理を最初にきちんと証明したと言われる Cauchy でさえ、このようなすっきりとした議論を行ったわけではありませんでした（1823 年頃）。

1.4 Exercise

演習問題 1.1 次の 2 つの多項式が共通因子をもつかどうか、Euclid の互除法によって調べて下さい。

$$(1) \ x^3 - 4x^2 + 10x - 7, \quad x^2 - 2x + 1. \quad (2) \ x^3 - 3x^2 + x - 1, \quad x^2 - 3x + 2.$$

(1)

$$x^3 - 4x^2 + 10x - 7 = (x^2 - 2x + 1)(x - 2) + 5x - 5$$

$$x^2 - 2x + 1 = (5x - 5) \frac{1}{5}(x - 1) + 0$$

従って $x - 1$ が最大の共通因子です。

(2)

$$x^3 - 3x^2 + x - 1 = (x^2 - 3x + 2)x - x - 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = (-x - 1)(-x + 4) + 6$$

従って最大の共通因子は 1 であり、共通因子はありません。□

演習問題 1.2 4 次方程式： $f(x) = x^4 + 5x^3 - 25x^2 - 65x + 84 = 0$ について以下の問いに答えてください。

(1) 上の方程式の実数解の上限を求めて下さい。

(2) (1) の上限を M とし、 $g(z) = f(M - z) = 0$ と変換すると

$$g(z) = z^4 - 269z^3 + 27101z^2 - 1211959z + 20299110$$

が得られ、実数解は全て正になります。さらに cascade を順にとって行くと

$$C_1(z) = 4z^3 - 807z^2 + 54202z - 1211959$$

$$C_2(z) = 12z^2 - 1614z + 54202, \quad C_3(z) = 24z - 1614$$

です（全て係数が正負交互なので実数解は正）。

$C_3(z) = 0$ の解は $z = 67.25$ ですから、解の上限 $\frac{1614}{12} + 1 = 135.5$ に注意すれば、 $C_2(z) = 0$ の解は $[0, 67]$, $[67, 136]$ の中に 1 つずつ入っている筈です。このような感じで $g(z) = 0$ の 4 つの解を探して下さい。

まず $C_3(z) = 24z - 1614 = 0$ の解は $z = \frac{1614}{24} = 67.25$ ですから、この解の両側に $C_2(z) = 0$ の解がある筈です。従って解の上限 $\frac{1614}{12} + 1 = 135.5$ に注意すれば、 $C_2(z) = 0$ の解は

$$[0, 67], \quad [67, 136]$$

の中にそれぞれ 1 つずつ入っている筈です。そこでまず区間 $[0, 67]$ について $C_2(z)$ の値を調べてみると、

$$C_2(0) = 54202, \quad C_2(67) = -68$$

であって、中点を使って追い込んで行けば

$$C_2(33) = 14008, \quad C_2(50) = 3502, \quad C_2(58) = 958, \quad C_2(62) = 262$$

であって最終的に

$$C_2(64) = 58, \quad C_2(65) = -8$$

を得て区間 $[64, 65]$ の中に解が 1 つあることが分かります。

全く同様に区間 $[67, 136]$ の中を調べると

$$C_2(69) = -32, \quad C_2(70) = 22$$

が得られ、区間 $[69, 70]$ の中に解が 1 つあることが分かります。

$C_1(z) = 0$ に対して解の上限を調べると $\frac{1211959}{4} + 1 \approx 302990$ ですから、 $C_1(z) = 0$ の解は

$$[0, 64], \quad [65, 69], \quad [70, 302990]$$

の中にそれぞれ 1 つずつ入っていることが分かり、同様に追い込んで行けば 63, 67, 71 程度の値であることが分かります。

これを使って最終的に全く同様にして $g(z) = 0$ の解を求めることが出来、それは 62, 65, 69, 73 です。

$z = 66 - x$ でしたから、結局元の方程式 $f(x) = 0$ の解は $-7, -3, 1, 4$ であることが分かります。

演習問題 1.3 係数の符号が交互に変わる多項式は負の実数を根にもたないことを証明して下さい。

$$z^n - v_{n-1}z^{n-1} + v_{n-2}z^{n-2} - \cdots, \quad v_j > 0$$

を考えます。

n が奇数の場合、負の実数 $-p$ を代入した値は

$$-p^n - v_{n-1}p^{n-1} - v_{n-2}p^{n-2} - \cdots < 0$$

となり 0 にはなりません。また n が偶数の場合も、負の実数 $-p$ を代入すると

$$p^n + v_{n-1}p^{n-1} + v_{n-2}p^{n-2} + \cdots > 0$$

でありやはり 0 にはなりません。

□

演習問題 1.4 最高次の係数が 1 である n 次方程式の係数のうち絶対値の最も大きい負の係数を $-h$ とします（係数が全て非負の場合は $h = 0$ と考えます）。

実数 α がこの方程式の解であるならば $\alpha < 1 + h$ であることを証明して下さい。

【証明】

$$x^n + w_{n-1}x^{n-1} + \cdots + w_1x + w_0 = 0$$

を考えます。

1 より大きな実数解がない場合、実数解 α は $\alpha \leq 1$ を満たしています。

1 より大きな実数解がある場合、必ず負の係数があり、任意の j に対して ($w_j \geq 0$ であっても)

$$-w_j \leq h$$

が成り立ちます。従って最大の実数解 $\alpha > 1$ に対して

$$\alpha^n + w_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + w_1\alpha + w_0 = 0$$

を変形して

$$\begin{aligned} \alpha^n &= -w_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - w_1\alpha - w_0 \\ &\leq h\alpha^{n-1} + \cdots + h\alpha + h \\ &= h(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) \\ &= h \cdot \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

となりますから更に変形して

$$\alpha - 1 \leq h \cdot \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n} \leq h \left(1 - \frac{1}{\alpha^n} \right) < h$$

となって題意は示されました。

□

演習問題 1.5 n 次方程式 $P(z) = 0$ が重解をもつことと、 $P(z) = 0$ と $P'(z) = 0$ が共通解をもつことが同値であることを証明して下さい。

2 次の時は自明ですから、 $n \geq 3$ の場合を考えます。

【重解 $\Rightarrow$ 共通解】 $P(z) = 0$ が $z = a$ を重解としてもつと仮定します。このとき $P(z)$ は

$$P(z) = (z - a)^2 Q(z) \quad \text{ただし } Q(z) \text{ は 1 次以上の多項式}$$

と書けますから

$$P'(z) = 2(z - a)Q(z) + (z - a)^2 Q'(z) = (z - a) \{2Q(z) + (z - a)Q'(z)\}$$

となり、確かに $P(z)$ と $P'(z)$ は共通解 $z = a$ をもちます。

【共通解 $\Rightarrow$ 重解】共通解を $z = a$ とし、

$$P'(z) = (z - a)R(z) = (z - a) \sum_{j=0}^{n-2} a_j z^j$$

と置きます。すると

$$\begin{aligned} P'(z) &= \sum_{j=0}^{n-2} a_j (z^{j+1} - a z^j) \\ P(z) &= \sum_{j=0}^{n-2} a_j \left(\frac{1}{j+2} z^{j+2} - \frac{a}{j+1} z^{j+1} \right) + C \end{aligned}$$

となる定数 C がありますが、 $P(a) = 0$ であったことから

$$C = - \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{j+2} a^{j+2} - \frac{a}{j+1} a^{j+1} \right)$$

が分かり、

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{j=0}^{n-2} a_j \left(\frac{1}{j+2} z^{j+2} - \frac{a}{j+1} z^{j+1} \right) - \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{1}{j+2} a^{j+2} - \frac{a}{j+1} a^{j+1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} a_j \left\{ \frac{1}{j+2} (z^{j+2} - a^{j+2}) - \frac{a}{j+1} (z^{j+1} - a^{j+1}) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{a_j}{(j+1)(j+2)} \{ (j+1) (z^{j+2} - a^{j+2}) - a(j+2) (z^{j+1} - a^{j+1}) \} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{a_j}{(j+1)(j+2)} \{ (j+1) z^{j+2} - a(j+2) z^{j+1} + a^{j+2} \} \end{aligned}$$

となります。ここで

$$\begin{aligned} &(j+1)z^{j+2} - a(j+2)z^{j+1} + a^{j+2} \\ &= (z-a)(j+1)z^{j+1} - a(z^{j+1} - a^{j+1}) \\ &= (z-a)(j+1)z^{j+1} - a(z-a)(z^j + az^{j-1} + a^2z^{j-2} + \cdots + a^j) \\ &= (z-a) \{ (j+1)z^{j+1} - az^j - a^2z^{j-1} - \cdots - a^{j+1} \} \end{aligned}$$

と変形し、

$$S(z) = (j+1)z^{j+1} - az^j - a^2z^{j-1} - \cdots - a^{j+1}$$

としたとき

$$S(a) = (j+1)a^{j+1} - \underbrace{a^{j+1} - a^{j+1} - \cdots - a^{j+1}}_{j+1 \text{ 個}} = 0$$

に注意すれば $S(z)$ も $z - a$ で割り切れますから、結局 $P(z)$ は $(z - a)^2$ で割り切れることが分かります。□

演習問題 1.6 $F(x) = x^4 - 5x^3 - 25x^2 + 65x + 84 = 0$ が重解をもたないことを示して下さい。

$$F'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 50x + 65$$

ですから、Euclid の互除法を進めると

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 25x^2 + 65x + 84 &= \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{16} \right) (4x^3 - 15x^2 - 50x + 65) \\ &\quad - \frac{275}{16}x^2 + \frac{265}{8}x + \frac{1669}{16} \\ 4x^3 - 15x^2 - 50x + 65 &= \left(\frac{6416}{15125} - \frac{64x}{275} \right) \left(-\frac{275}{16}x^2 + \frac{265}{8}x + \frac{1669}{16} \right) \\ &\quad + \frac{313856}{15125} - \frac{24064x}{605} \\ -\frac{275}{16}x^2 + \frac{265}{8}x + \frac{1669}{16} &= \left(\frac{166375}{385024}x - \frac{10991035}{18096128} \right) \left(\frac{313856}{15125} - \frac{24064}{605}x \right) \\ &\quad + \frac{6456681}{55225} \end{aligned}$$

となり、共通因子をもたないことが分かります。従って Hudde の定理により $F(x) = 0$ は重解をもちません。□