

# 円錐曲線を見込む角

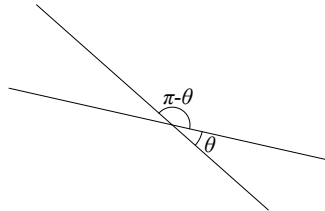
円錐曲線に向かって引いた2本の接線のなす角が一定となるような点の軌跡を考えます。まず直交する場合が基本的であり、その後一般の角の場合を考えます。

## 1 基礎事項

### 1.1 2直線のなす角

#### 1.1.1 一般的な記法

交差する2本の直線  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  の挟む角は、図のように2種類あり、一方を  $\theta$  とすると他方は  $\pi - \theta$  です。



2直線それぞれの法線ベクトル  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$  の挟む角は向きによってこの  $\theta, \pi - \theta$  のいずれかであり、

$$\frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = |\cos \theta| \quad (= |\cos(\pi - \theta)|)$$

$$\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \cos^2 \theta$$

ですが、特に  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  であれば

$$\frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_1a_2 + b_1b_2)^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_1a_2 + b_1b_2)^2} - 1 = \tan^2 \theta$$

$$\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1a_2 + b_1b_2)^2} = \tan^2 \theta$$

が成り立つことが挟む角（の一方）が  $\theta$  であるための必要十分条件です。

**事実 1.1 [ 直線の挟む角 ]** 交差する2本の直線  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  の挟む角（の一方）が  $\theta$  であるための条件は

$$\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \cos^2 \theta$$

であり、これは特に  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  であれば

$$\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1a_2 + b_1b_2)^2} = \tan^2 \theta$$

とも書けます。

#### 1.1.2 特殊な記法

2直線  $y = m_1x + c_1$ ,  $y = m_2x + c_2$  の挟む角をタンジェントの加法法則で考えましょう。ただしこの記法では  $x$  軸に垂直な直線は表現できないことに注意しなければなりません。

直線  $y = m_jx + c_j$  の、 $x$  軸正方向からの回転角を  $0 \leq \theta_j < \pi$  とすると、 $\tan \theta_j = m_j$  ですから、2直線の挟む角の1つは  $|\theta_1 - \theta_2|$  であり、

$$|\tan(-x)| = |\tan x|, \quad |\tan(\pi - x)| = |\tan x|$$

であることに注意すれば、2直線の挟む角（の一方）が  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  であるための条件は

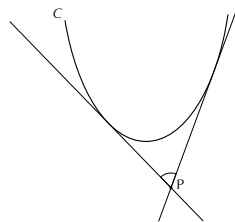
$$|\tan \theta| = |\tan(\theta_1 - \theta_2)| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|$$

従って

$$\left( \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right)^2 = \tan^2 \theta$$

となります。これは先に見た一般的な設定での条件において  $a_j = m_j, y_j = -1$  として得られるものに一致していますが、傾きの取り扱いだけで済ませられるので計算は簡潔になります。 $x$  軸に垂直な接線は別処理となりますが、大抵自明な場合であり、難しくはありません。

定義 1.2 点  $P$  から円錐曲線  $C$  に対して 2 本の異なる接線が引ける場合に、その 2 本の接線の挟む角のうち、一方の接点、点  $P$ 、もう一方の接点、の順に線分で結んで作られる角を、点  $P$  からの  $C$  の見込み角と言うことにします。



定義 1.3 円錐曲線  $C$  によって平面は幾つかの領域に分けられますが、そのうち焦点を含む部分をその円錐曲線  $C$  の内部、焦点を含まない部分を外部と言います。

各曲線に対して、その内部・外部は以下の通り：

| 曲線                                            | 内部                                       | 外部                                       |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| 楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$  |
| 放物線： $y = x^2$                                | $y > x^2$                                | $y < x^2$                                |
| 双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$  | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$  |
| 双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < -1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > -1$ |

## 1.2 円錐曲線と直線の交わり方

事実 1.4 楕円と直線が交わる場合、以下の 2 通りしかありません：

- (i) 2 点で交わる。
- (ii) 1 点で接する。

交点の『重複度』を考えれば、交点は常に 2 つとも言えます。

事実 1.5 放物線と直線が交わる場合、以下の 3 通りがあります：

- (i) 直線が軸に平行でない場合。
  - (ia) 2 点で交わる。
  - (ib) 1 点で接する。
- (ii) 直線が軸に平行な場合は 1 点で交わる。

軸に平行な直線はこの 1 点と、もう 1 点、無限遠点で『交わる』と考えられますので、やはり重複度と無限遠点の援用により交点は常に 2 つです。

事実 1.6 双曲線と直線が交わる場合、以下の 3 通りがあります：

- (i) 直線が漸近線に平行でない場合。
  - (ia) 2 点で交わる。
  - (ib) 1 点で接する。
- (ii) 直線が漸近線に平行な場合は 1 点で交わる。

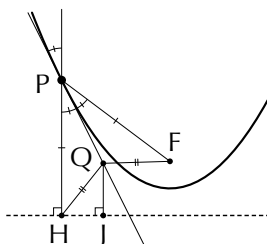
漸近線に平行な直線はこの 1 点ともう 1 点、無限遠点で交わると考えられます（無限遠点での接線は漸近線です）。従って、重複度と無限遠点の援用により、交点は常に 2 つです。

## 1.3 円錐曲線の接線の性質

### 1.3.1 放物線の場合

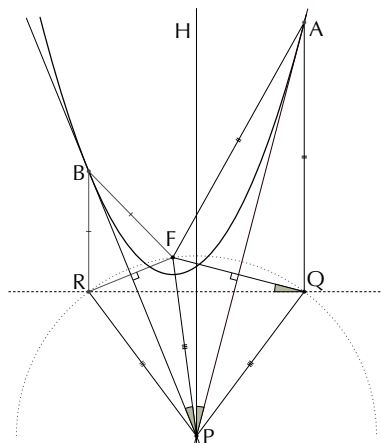
事実 1.7 放物線  $C$  上の点  $P$  から準線に下ろした垂線の足を  $H$ 、焦点を  $F$  とすれば、点  $P$  での接線は  $\angle FPH$  の 2 等分線であり、接線と軸の成す角と、直線  $FP$  と接線の成す角は等しくなります。

角  $FPH$  の 2 等分線を  $m$  とします。  $m$  上の  $P$  でない点  $Q$  から準線に下ろした垂線の足を  $J$  とすれば、  $FQ = HQ$  ですから  $QJ < HQ = FQ$  となり、点  $Q$  は放物線上にありません。これが  $m$  上の  $P$  以外の任意の点で成り立ちますから、直線  $m$  は放物線と 1 点  $P$  のみで接することが分かります。



従って接線は角の 2 等分線ですから問題の角度は等しいことが分かります。  $\square$

事実 1.8 放物線  $y = x^2$  に点  $P$  から 2 本の接線を引いた 2 つの接点を  $A, B$ 、焦点を  $F$ 、点  $P$  を通り軸に平行な直線上の上半平面内の点を  $H$  とするとき、 $\angle APH = \angle BPF$  です。

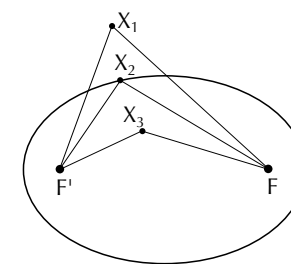
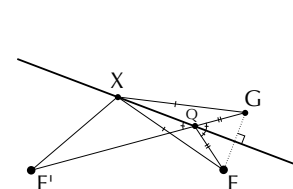
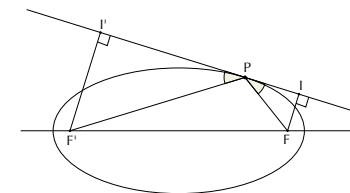


接点  $A, B$  から準線に下ろした垂線の足をそれぞれ  $Q, R$  とすると、放物線の接線の性質 (事実 1.7) から 4 つの三角形  $\triangle AFQ, \triangle PQF, \triangle BRF, \triangle PFR$  はすべて 2 等辺三角形であり、 $PQ = PF = PR$  となっていますから、3 点  $Q, F, R$  は点  $P$  を中心とした円周上にあります。

すると  $\angle PFR$  と  $\angle QFR$  は同じ弧  $FR$  に対応した中心角と円周角ですから、 $\angle BPF = \angle RQF = \angle APH$  が分かります。  $\square$

### 1.3.2 楕円の場合

事実 1.9  $F, F'$  を焦点とする楕円上の点  $P$  における接線に  $F, F'$  から下ろした垂線の足をそれぞれ  $I, I'$  とするとき、 $\angle FPI = \angle F'PI'$  です。



2 定点  $F, F'$  とこれらを通らない直線  $l$  があったとき (左図)、直線上の点  $X$  で  $F'X + XF$  を最小にする点を求めます。

図のように点  $F$  の  $l$  に関する対称点を  $G$  とすると、 $XF = XG$  ですから、これは  $F'X + XG$  を最小にすると考えても同じであり、それは明らかに 3 点  $F', X, G$  が同一直線上にある場合が最小であって、図の点  $Q$  が最小値を達成する点です。この点では図のような角度が等しくなっています。

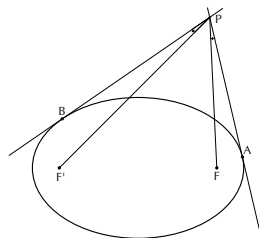
一方、楕円の定義 (2 焦点からの距離の和が  $2a$ ) によれば、右図のような楕円外・上・内の点  $X_1, X_2, X_3$  に対して

$$F'X_1 + X_1F > 2a, \quad F'X_2 + X_2F = 2a, \quad F'X_3 + X_3F < 2a$$

が成り立っていますから、楕円の接線  $l$  上の点  $X$  で  $F'X + XF$  が最小になるのは接点  $P$  です。

最小値を達成する点では先に見たような角度の関係がありますから、題意は示されました。  $\square$

**事実 1.10**  $F, F'$  を焦点とする楕円  $E$  に外部の点  $P$  から 2 本の接線を引いた接点を  $A, B$  とするとき、 $\angle FPA = \angle F'PB$  となります。



焦点  $F$  の、接線  $PA$  に関する対称点を  $G$ 、 $F'$  の接線  $PB$  に関する対称点を  $G'$  とすると、まず明らかに  $PF = PG, PF' = PG'$  です。

また、楕円の基本的な性質から  $F, B, G', F', A, G$  はそれぞれ 1 直線上にあり、

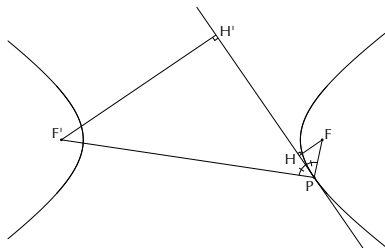
$$FG' = FB + BF' = F'A + AF = F'G$$

でもあるので、2 つの三角形  $\triangle PG'F, \triangle PF'G$  は 3 辺が等しいので合同です。

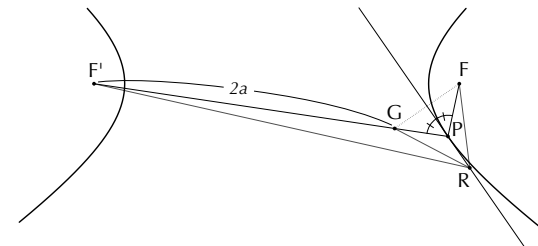
すると  $\angle F'PG' = \angle GPF$  が分かり、その半角として題意を得ます。  $\square$

### 1.3.3 双曲線の場合

**事実 1.11**  $F, F'$  を焦点とする双曲線上の点  $P$  における接線に  $F, F'$  から下ろした垂線の足をそれぞれ  $H, H'$  とするとき、 $\angle FPH = \angle F'PH'$  です。



$P$  に近い側の焦点を  $F$  とし、頂点間の距離を  $2a$  とします。すると双曲線のうち  $P$  が乗っている部分は  $F'P - FP = 2a$  で表されます。



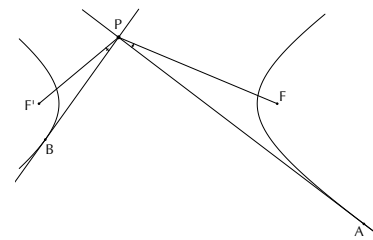
$F'P > 2a$  なので線分  $F'P$  上に  $F'G = 2a$  になるような点  $G$  をとることが出来、角  $\angle FPG$  の 2 等分線を  $m$  とします。  $m$  上の  $P$  でない任意の点  $R$  に対して、 $GP = FP$  ですから、 $GR = FR$  でもありますが、

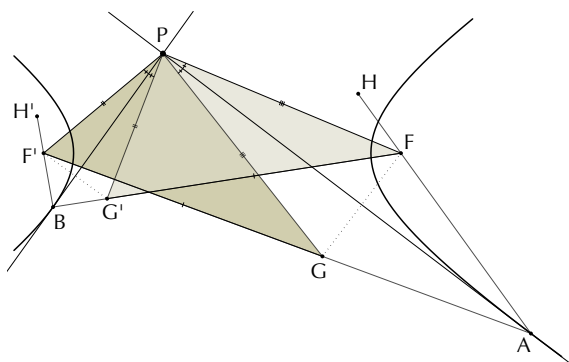
$$F'R < F'G + GR = 2a + FR, \quad \text{すなわち} \quad F'R - FR < 2a$$

が成り立っているので、点  $R$  は双曲線上にありません。従って直線  $m$  は双曲線と 1 点  $P$  でのみ交わっていますから、これは接線であることが分かります。

以上から接線と角の 2 等分線は一致し、題意は示されました。  $\square$

**事実 1.12**  $F, F'$  を焦点とする双曲線  $H$  に外部の点  $P$  から 2 本の接線を引いた接点を  $A, B$  とするとき、 $\angle FPA = \angle F'PB$  となります。





焦点  $F$  の、接線  $PA$  に関する対称点を  $G$ 、 $F'$  の接線  $PB$  に関する対称点を  $G'$  とすると、まず明らかに  $PF = PG, PF' = PG'$  です。

また、双曲線の基本的な性質から  $F, B, G', F', A, G$  はそれぞれ1直線上にあり、(上の図のような位置関係の場合は)、

$$FG' = FB - BF' = F'A - AF = F'G$$

でもあるので、2つの三角形  $\triangle PG'F, \triangle PF'G$  は3辺が等しいので合同です。

すると  $\angle F'PG' = \angle GPF$  が分かり、その半角として題意を得ます。  $\square$

## 2 直交する接線

### 2.1 放物線の場合

**事実 2.1** 放物線  $y = x^2$  上の異なる2点  $A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$  における2本の接線の交点は  $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$  です。

点  $A, B$  における接線は  $y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha), y - \beta^2 = 2\beta(x - \beta)$  ですから、辺々引けば

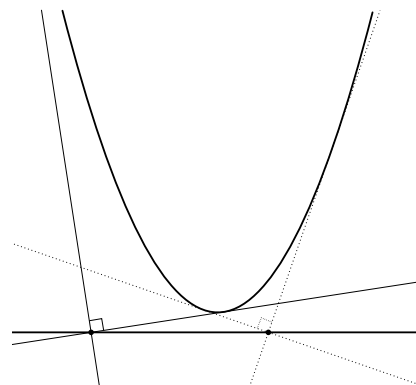
$$\alpha^2 - \beta^2 = 2(\alpha - \beta)x \quad \text{従って} \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

が得られるので、これを接線の式に戻せば

$$y = 2\alpha x - \alpha^2 = \alpha(\alpha + \beta) - \alpha^2 = \alpha\beta$$

です。従って交点は  $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$  です。  $\square$

**事実 2.2** 放物線  $y = x^2$  に対して直交する2本の接線が引ける点の軌跡は準線  $y = -\frac{1}{4}$  です。



点  $P(x_P, y_P)$  が題意をみたすとき、放物線上に異なる2点  $A(a, a^2), B(b, b^2)$  があって、 $(x_P, y_P) = \left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$  であって傾きの積が  $2a2b = -1$  です。従って点  $P$  は準線  $y = -\frac{1}{4}$  上にあることが分かります。

逆に、準線上に任意の点  $(c, -\frac{1}{4})$  を取ったとき、 $a_{\pm} = c \pm \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}}$  と置けば、放物線上の異なる2点  $(a_{\pm}, a_{\pm}^2)$  における接線の交点は  $P$  であり、傾きの積が  $-1$  ですから確かに直交しています。

以上から軌跡は準線  $y = -\frac{1}{4}$  の全体であることが分かります。  $\square$

**事実 2.3** (i) 放物線  $C : y = x^2$  の外部の点  $P(x_P, y_P)$  から放物線に向かって引ける接線の本数は必ず2本です。

(ii) 外部の  $P$  から放物線  $C$  を見込む角  $\theta$  は以下の通りです：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} < y_P &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta, \\ y_P = -\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \\ y_P < -\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(i) 点  $P(x_P, y_P)$  を通る直線  $y - y_P = m(x - x_P)$  が放物線に接する条件は連立方程式：

$$\begin{cases} y - y_P = m(x - x_P) \\ y = x^2 \end{cases}$$

がただ1つの解をもつことであり、それは第1式から得られる  $y = m(x - x_P) + y_P$  を第2式に代入して得られる2次方程式：

$$x^2 - mx + mx_P - y_P = 0$$

の重解条件に一致します。従ってそれは

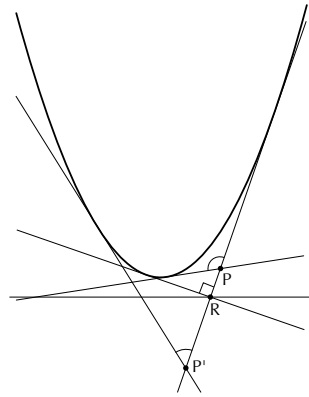
$$0 = m^2 - 4(mx_P - y_P) = m^2 - 4x_P m + 4y_P$$

ですが、放物線は垂直な接線を持ちませんので、この条件を満たす  $m$  が2つあることが2本の接線が引けるための条件であり、判別式  $D$  を見ればそれは

$$D = (2x_P)^2 - 4y_P = 4(x_P^2 - y_P) > 0$$

であり、これは点  $P$  が放物線の外部にあることと同値になっています。

(ii) 外部の点  $P$  から引いた接線の少なくとも一方は水平ではないので、これと準線の交点  $R$  が存在します。事実 (2.2) によれば点  $R$  からの見込み角は  $\frac{\pi}{2}$  であり、 $y_P > y_R = -\frac{1}{4}$  であれば図のように見込み角は鈍角であり、 $y_P < -\frac{1}{4}$  であれば鋭角になっています。□



## 2.2 楕円の場合

**事実 2.4** 楕円  $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の外部の点  $P$  から楕円に向かって引ける接線の本数は必ず2本です。

点  $P(x_P, y_P)$  を通る直線  $y - y_P = m(x - x_P)$  が楕円  $E$  に接する条件は、直線の式から得られる  $y = m(x - x_P) + y_P$  を楕円の式に代入して得られる2次方程式：

$$b^2 x^2 + a^2 \{m(x - x_P) + y_P\}^2 = a^2 b^2$$

$$(a^2 m^2 + b^2)x^2 + 2a^2 m(-mx_P + y_P)x + a^2(-mx_P + y_P)^2 - a^2 b^2 = 0$$

の重解条件であり、

$$0 = a^4 m^2 (-mx_P + y_P)^2 - (a^2 m^2 + b^2) a^2 \{(-mx_P + y_P)^2 - b^2\}$$

$$= -a^2 b^2 (-mx_P + y_P)^2 + a^2 b^2 (a^2 m^2 + b^2)$$

$$= (a^2 m^2 + b^2) - (mx_P - y_P)^2$$

$$= (a^2 - x_P^2) m^2 + 2x_P y_P m + b^2 - y_P^2$$

です。

$x_P \neq \pm a$  のときは垂直な直線は存在せず、今議論している直線が接線の全てです。またこのときこれは2次方程式であって、判別式  $D$  は

$$D = x_P^2 y_P^2 - (a^2 - x_P^2)(b^2 - y_P^2) = b^2 x_P^2 + a^2 y_P^2 - a^2 b^2 = a^2 b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

ですから、2本の接線が引けるための条件は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0$$

すなわち点  $P$  が楕円の外部にあることです ( $x_P \neq \pm a$ )。

$x_P = \pm a$  のときは、重解条件は1次方程式であり (外部条件から  $y_P \neq 0$ )、 $m = \frac{y_P^2 - b^2}{2x_P y_P}$  に対応した接線が1本あり、それとは別に自明な接線  $x = \pm a$  がありますから、この点でも接線の本数はやはり2本です。

以上から、外部の任意の点から引ける接線の本数は2本です。□

**事実 2.5** 楕円  $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  に向かって2本の直交する接線が引ける点の軌跡は円  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$  であり、楕円  $E$  の準円と呼ばれています。

外部の点  $P(x_P, y_P)$  で  $x_P = \pm a$  である点のうち2本の接線が直交するのは、明らかに  $y_P = \pm b$  のときです。

外部の点  $P(x_P, y_P)$  で  $x_P \neq \pm a$  である点のうち2本の接線が直交するのは、重解条件 (接するための条件)

$$(a^2 - x_P^2) m^2 + 2x_P y_P m + b^2 - y_P^2 = 0$$

を満たす傾き  $m$  が2つあって、その積が  $-1$  となっているときですから、その条件は解と係数の関係により

$$-1 = \frac{b^2 - y_P^2}{a^2 - x_P^2}, \quad \text{すなわち} \quad x_P^2 + y_P^2 = a^2 + b^2$$

です。

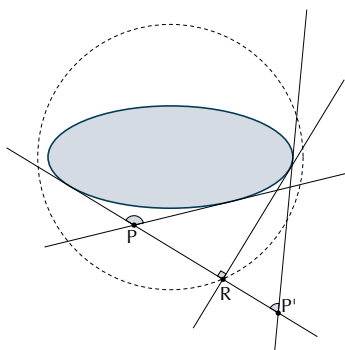
以上から、求める軌跡は円  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$  の全体です。  $\square$

事実 2.6 楕円  $E$  の外部の点  $P$  からの見込み角  $\theta$  は以下の通りです：

$$\text{準円の内部} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta$$

$$\text{準円上} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{準円の外部} \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$$



2本の接線のうち一方の接線と準円の交点を  $R$  とします。図のように  $P$  が準円の内部にあれば見込み角は鈍角であり、外部にあれば見込み角は鋭角になっています。  $\square$

## 2.3 双曲線の場合

双曲線  $H : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  を考えます。この双曲線は ( $x$ -軸に) 垂直な接線を持ちませんし、また漸近線に平行な直線も接線にはなり得ないことに注意します。

点  $P(x_P, y_P)$  を通る直線  $y = m(x - x_P) + y_P$  ( $m \neq \pm \frac{b}{a}$ ) が双曲線  $H$  に接する条件は、直線の式から得られる  $y = m(x - x_P) + y_P$  を双曲線の式に代入して得られる2次方程式：

$$a^2 \{m(x - x_P) + y_P\}^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$$

$$(a^2 m^2 - b^2)x^2 + 2a^2 m(-mx_P + y_P)x + a^2(-mx_P + y_P)^2 - a^2 b^2 = 0$$

の重解条件であり、

$$\begin{aligned} 0 &= a^4 m^2 (-mx_P + y_P)^2 - (a^2 m^2 - b^2) a^2 \{(-mx_P + y_P)^2 - b^2\} \\ &= a^2 b^2 (-mx_P + y_P)^2 + a^2 b^2 (a^2 m^2 - b^2) \\ &= (a^2 m^2 - b^2) + (mx_P - y_P)^2 \\ &= (a^2 + x_P^2) m^2 - 2x_P y_P m - b^2 + y_P^2 \end{aligned}$$

です。

従って2本の異なる接線が引けるための条件はこの条件を満たす  $m \neq \pm \frac{b}{a}$  が2つ存在することであり、それはこの2次方程式の判別式によって

$$x_P^2 y_P^2 - (a^2 + x_P^2)(-b^2 + y_P^2) = a^2 b^2 \left( \frac{x_P^2}{a^2} - \frac{y_P^2}{b^2} + 1 \right) > 0$$

であること、つまり双曲線の外部の点であることと、 $m = \pm \frac{b}{a}$  を解にもたないこと、

$$0 \neq (a^2 + x_P^2) \frac{b^2}{a^2} \mp 2x_P y_P \frac{b}{a} - b^2 + y_P^2 = \frac{1}{a^2} (bx_P \mp ay_P)^2$$

つまり点  $P$  が漸近線上にないことです。

事実 2.7 双曲線  $H : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  の外部の点  $P$  から双曲線に向かって引ける接線の本数は以下の通りです：

- (i) 点  $P$  が漸近線上にない場合は2本。
- (ii) 点  $P$  が漸近線上にあつて原点でない場合は1本。
- (iii) 点  $P$  が原点である場合は0本。

点  $P$  が漸近線上にある場合、その漸近線自体が、無限遠点での双曲線の接線ですから、この場合も接線は2本あります。

点  $P$  が原点、すなわち、2漸近線の交点である場合は、2本の漸近線が共に無限遠点での双曲線の接線ですから、やはり接線は2本引けます。

従って、結局、無限遠点を援用すれば、双曲線の外部の点からは常に2本の接線が引けることが分かります（厳密には、無限遠直線上の各点からも2本の接線が引けることを述べなければなりませんが・・・）。

外部の点  $P(x_P, y_P)$  で  $x_P \neq \pm a$  である点のうち 2 本の接線が直交するのは、重解条件（接するための条件）

$$(a^2 + x_P^2)m^2 - 2x_P y_P m - b^2 + y_P^2 = 0$$

を満たす傾き  $m$  が 2 つあって（従って点  $P$  が漸近線上にない場合で）、その積が  $-1$  となっているときですから、その条件は解と係数の関係により

$$-1 = \frac{-b^2 + y_P^2}{a^2 + x_P^2}, \quad \text{すなわち} \quad x_P^2 + y_P^2 = b^2 - a^2$$

です。

以上から、求める軌跡は  $a < b$  のとき円  $x^2 + y^2 = b^2 - a^2$  から漸近線上の点を除いた部分です。 $a \geq b$  のときは、接線は直交しません。

**事実 2.8**  $a < b$  のとき、双曲線  $H : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  に向かって 2 本の直交する接線が引ける点の軌跡は円  $x^2 + y^2 = b^2 - a^2$  であり、双曲線  $H$  の準円と呼ばれています。

□

### 3 放物線の場合

**問題 3.1** 放物線  $y = x^2$  に点  $P$  から 2 本の接線が引けて、見込む角が一定角  $0 < \theta < \pi$  であるような点  $P$  の軌跡を求めてください。

#### 3.1 幾何学的な議論

##### 3.1.1 $\theta$ が鋭角の場合

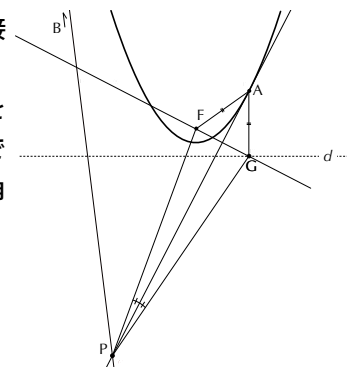
事実 (2.3)(ii) によれば、題意をみたす点  $P$  は準線よりも下の半平面内にあります。

点  $P$  から引いた 2 本の接線の接点を右から  $A, B$  とします。この場合かならず接点  $A$  は第 1 象限にあり、接点  $B$  は第 2 象限にあります。

図のように接点  $A$  から準線へ垂線を下ろしその足を  $G$  とすれば、放物線の基本的な性質から  $FA = AG$  であり、 $\angle FAP = \angle GAP$  なので、三角形  $AFG$  及び三角形  $PGF$  は 2 等辺三角形になり、特に

$$PF = PG, \quad \angle FPA = \angle GPA$$

が成り立っています。



すると、放物線の接線の性質（事実 1.8）から、点  $P$  から準線に下ろした垂線の足を  $H$  とすると  $\angle BPH$  もこの角  $\angle GPA$  に等しく、

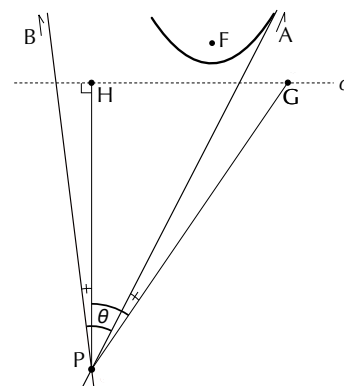
$$\angle HPG = \angle BPA$$

が成り立っていますから、2 接線の挟む角  $\angle BPA$  が  $\theta$  である必要十分条件は

$$\frac{PF}{PH} = \frac{PG}{PH} = \frac{1}{\cos \theta}$$

となることです。

これは点  $P$  が  $F$  を焦点、 $d$  を準線とする離心率  $\frac{1}{\cos \theta} > 1$  の双曲線上にあること（ただし、下半分です）を意味します。





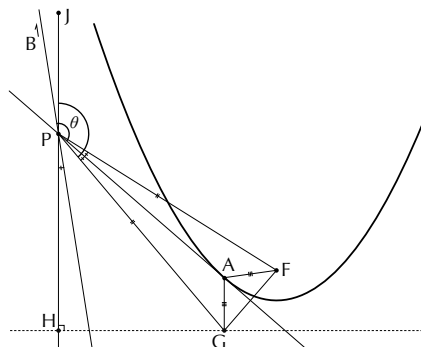
### 3.1.2 $\theta$ が鈍角の場合

事実 (2.3)(ii) によれば、題意をみたす点  $P$  は準線よりも上の半平面内にあります。点  $P$  から引いた 2 本の接線の接点を右から  $A, B$  とします。

図のように接点  $A$  から準線へ垂線を下ろしその足を  $G$  とすれば、放物線の基本的な性質から  $FA = AG$  であり、 $\angle FAP = \angle GAP$  なので、三角形  $AFG$  及び三角形  $PGF$  は 2 等辺三角形になり、特に

$$PF = PG, \quad \angle FPA = \angle GPA$$

が成り立っています。



すると、放物線の接線の性質（事実 1.8）から、点  $P$  を通り準線に垂直な直線上の上半平面内遠方の点を  $J$  とすると  $\angle BPJ$  もこの角  $\angle GPA$  に等しく、

$$\angle JPG = \angle BPA$$

が成り立っていますから、2 接線の挟む角  $\angle BPA$  が  $\theta$  である必要十分条件は、点  $P$  から準線に下ろした垂線の足を  $H$  として

$$\frac{PF}{PH} = \frac{PG}{PH} = \frac{1}{\cos(\pi - \theta)} = -\frac{1}{\cos \theta}$$

となることです。

これは点  $P$  が  $F$  を焦点、 $d$  を準線とする離心率  $-\frac{1}{\cos \theta} > 1$  の双曲線上にあること（ただし、上半分です）を意味します。

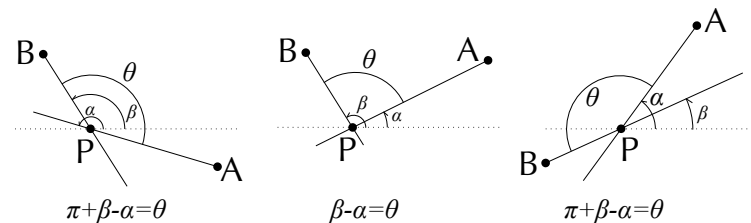
**事実 3.2** 放物線  $y = x^2$  に対して 2 本の接線が引けて、その挟む角（の 1 つ）が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  であるような点の軌跡は、焦点  $(0, \frac{1}{4})$ 、準線  $y = -\frac{1}{4}$ 、離心率  $\frac{1}{\cos \theta}$  の双曲線です。

ただし、この双曲線の 2 本の枝のうち、 $y > -\frac{1}{4}$  の部分から放物線を見込む角は  $\pi - \theta > \frac{\pi}{2}$  であり、 $y < -\frac{1}{4}$  の部分からの見込み角は  $\theta$  です。

### 3.2 座標計算による議論

2 本の接線の接点のうち、 $x$  座標が大きい方を  $A(a, a^2)$ 、もう一方を  $B(b, b^2)$  とします。また、2 接線の  $x$  軸からの回転角をそれぞれ  $\alpha, \beta$  とします。

$\vec{PA}$  と  $\vec{PB}$  の挟む角が  $\theta$  であることは、下図の通り  $\beta > \alpha$  であって  $\beta - \alpha = \theta$  であるか、あるいは  $\beta < \alpha$  であって  $\pi + \beta - \alpha = \theta$  であることと同値です。



これは  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  であれば  $\tan(\beta - \alpha) = \tan \theta$  であることと同値であり、

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \tan \theta \\ \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} &= \tan \theta \\ \frac{2b - 2a}{1 + 4ab} &= \tan \theta \\ 2(b - a) &= \tan \theta(1 + 4ab) \end{aligned}$$

と同値です。ここでこの両辺が負であることに注意すれば  $\tan \theta(1 + 4ab) < 0$  である条件のもとではこれは

$$\begin{aligned} 4(b - a)^2 &= \tan^2 \theta(1 + 4ab)^2 \\ 4(a + b)^2 - 16ab &= \tan^2 \theta(1 + 4ab)^2 \end{aligned}$$

と同値です。

点  $P$  の座標は  $x = \frac{a+b}{2}, y = ab$  であることに注意すれば、 $D$  は

$$16x^2 - 16y = \tan^2 \theta(1 + 4y)^2, \quad \tan \theta(1 + 4y) < 0$$

あるいは

$$\underbrace{x^2 - y}_{\text{放物線}} = \tan^2 \theta \underbrace{\left(y + \frac{1}{4}\right)^2}_{\text{準線}}, \quad \tan \theta \left(y + \frac{1}{4}\right) < 0 \quad (3.1)$$

であることが分かります。さらに変形すれば

$$16x^2 = 16 \tan^2 \theta y^2 + (8 \tan^2 \theta + 16)y + \tan^2 \theta$$

$$16x^2 = 16 \tan^2 \theta \left( y + \frac{\tan^2 \theta + 2}{4 \tan^2 \theta} \right)^2 - \frac{4(\tan^2 \theta + 1)}{\tan^2 \theta}$$

ですから、結局、 $D$  の方程式は

$$\frac{x^2}{\frac{\tan^2 \theta + 1}{4 \tan^2 \theta}} - \frac{\left( y + \frac{\tan^2 \theta + 2}{4 \tan^2 \theta} \right)^2}{\frac{\tan^2 \theta + 1}{4 \tan^4 \theta}} = -1, \quad \tan \theta (1 + 4y) < 0$$

となります。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  であれば  $\tan \theta > 0$  ですから  $y < -\frac{1}{4}$  となって、双曲線の下半分を意味し、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  であれば上半分です。この境目の  $y = -\frac{1}{4}$  のラインは、以下の通り準線になっています。

この双曲線の焦点は

$$\frac{\tan^2 \theta + 1}{4 \tan^2 \theta} + \frac{\tan^2 \theta + 1}{4 \tan^4 \theta} = \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{2 \tan^2 \theta} \right)^2$$

の計算により、平行移動を施して  $(0, \frac{1}{4})$ ,  $(0, -\frac{3}{4} - \frac{1}{\tan^2 \theta})$  であり、それぞれの準線は

$$y = \pm \frac{\frac{\tan^2 \theta + 1}{4 \tan^4 \theta}}{\frac{\tan^2 \theta + 1}{2 \tan^2 \theta}} = \pm \frac{1}{2 \tan^2 \theta}$$

をやはり平行移動して  $y = -\frac{1}{4}$  および  $y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{\tan^2 \theta}$  です。

前者は放物線と共有であることに注意します。ちなみに離心率は  $\frac{1}{|\cos \theta|}$  です。

$D$  の方程式で  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  とすれば、 $y = -\frac{1}{4}$  の直線になっています。

また、式 (3.1) :

$$x^2 - y = \tan^2 \theta \left( y + \frac{1}{4} \right)^2$$

を別の形に変形すると

$$\begin{aligned} x^2 - y + \left( y + \frac{1}{4} \right)^2 &= (1 + \tan^2 \theta) \left( y + \frac{1}{4} \right)^2 \\ x^2 + \left( y - \frac{1}{4} \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( y + \frac{1}{4} \right)^2 \\ \frac{x^2 + \left( y - \frac{1}{4} \right)^2}{\left( y + \frac{1}{4} \right)^2} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + \left( y - \frac{1}{4} \right)^2}}{\left| y + \frac{1}{4} \right|} = \frac{1}{|\cos \theta|}$$

ですから、焦点  $(0, \frac{1}{4})$ 、準線  $y = -\frac{1}{4}$ 、離心率  $\frac{1}{|\cos \theta|} > 1$  の双曲線であることを直ちにすることも出来ます。

□

## 4 楕円の場合

事実 2.4 で見たように、楕円  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  に対して、外部の点  $P(x_P, y_P)$  から常に 2 本の接線を引くことが出来ます。

### 4.1 $x_P = \pm a$ のとき

この場合は 1 つの接線が  $y$  軸に平行な直線  $x - x_P = 0$  であり、もう一方は傾きが  $\frac{y_P^2 - b^2}{2x_P y_P}$  でしたから、後者の  $x$  軸正方向からの回転角を  $0 \leq \alpha < \pi$  と置けば  $\tan \alpha = \frac{y_P^2 - b^2}{2x_P y_P}$  であって、2 直線の挟む角（の一方）が  $\theta$  であることは

$$\left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right| = \theta$$

と同値であり、更にこれは

$$\tan^2 \theta = \tan^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{4x_P^2 y_P^2}{(y_P^2 - b^2)}$$

とも書くことが出来ます。

### 4.2 $x_P \neq \pm a$ のとき

この場合は 2 本の接線は  $y$  軸に平行でなく、傾きは 2 次方程式 :

$$(x_P^2 - a^2)m^2 - 2x_P y_P m + y_P^2 - b^2 = 0$$

の異なる 2 つの解ですから、それらを  $m_1, m_2$  とすれば解と係数の関係によって

$$m_1 + m_2 = \frac{2x_P y_P}{x_P^2 - a^2}, \quad m_1 m_2 = \frac{y_P^2 - b^2}{x_P^2 - a^2}$$

が成り立っていることが分かります。

傾きが  $m_1, m_2$  の 2 直線の挟む角（の一方）が  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  であるための条件は

$$\left( \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right)^2 = \tan^2 \theta$$

でしたが、これを变形すると

$$(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 = \tan^2 \theta (1 + m_1 m_2)^2$$

と書けることに注意すれば、 $x_P \neq \pm a$  であるような点  $P$  における 2 本の接線の挟む角（の一方）が  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  であるための条件は

$$\begin{aligned} \frac{4x_P^2 y_P^2}{(x_P^2 - a^2)^2} - 4 \frac{y_P^2 - b^2}{x_P^2 - a^2} &= \tan^2 \theta \left( 1 + \frac{y_P^2 - b^2}{x_P^2 - a^2} \right)^2 \\ 4x_P^2 y_P^2 - 4(x_P^2 - a^2)(y_P^2 - b^2) &= \tan^2 \theta (x_P^2 + y_P^2 - a^2 - b^2)^2 \\ 4(b^2 x_P^2 + a^2 y_P^2 - a^2 b^2) &= \tan^2 \theta (x_P^2 + y_P^2 - a^2 - b^2)^2 \\ (x_P^2 + y_P^2 - a^2 - b^2)^2 &= \frac{4a^2 b^2}{\tan^2 \theta} \left( \frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

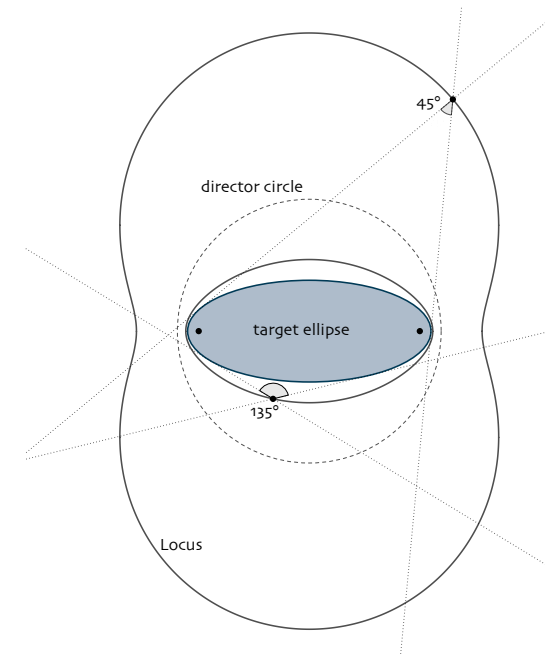
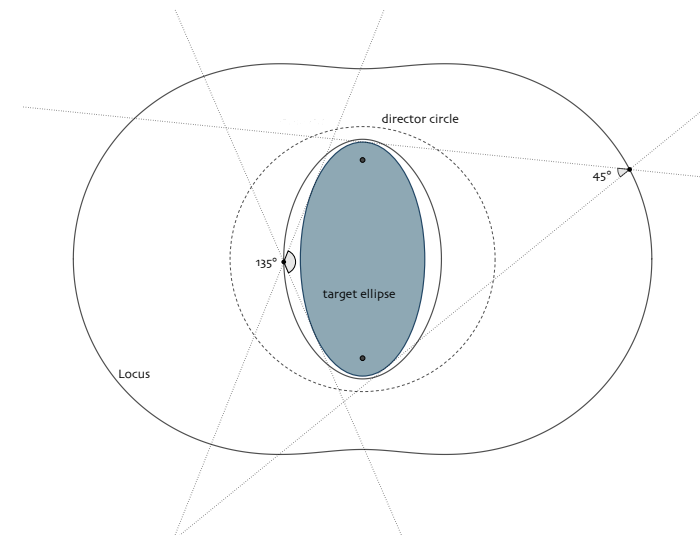
となります。

この式において  $x_P = \pm a$  の場合を考えれば、先に見た  $x_P = \pm a$  の場合の条件式になっていますから、結局、 $x_P = \pm a$  であろうとなかろうと、どちらの場合もこの式が条件式と考えて良いことになります。

以上から、楕円  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$  に引いた 2 本の接線の挟む角（の 1 つ）が  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  であるような点の軌跡は、

$$\underbrace{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2}_{\text{準円}} = \frac{4a^2 b^2}{\tan^2 \theta} \underbrace{\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)}_{\text{楕円}}$$

です。



$\theta = \frac{\pi}{2}$  の場合は  $\tan \theta$  が発散して右辺、従って左辺が 0 となり、準円が現れます。 $\theta = 0$  の場合は、2 本の接線が重なって 1 本になり、分母の 0 と釣り合って楕円自体になっていますね。

### 4.3 Cassinian ovals

2点  $(\pm v, 0)$  からの距離の積が一定値  $w^2$  であるような点の軌跡は、

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-v)^2+y^2}\sqrt{(x+v)^2+y^2} &= w^2 \\ (x^2+y^2+v^2)^2 - 4v^2x^2 &= w^4 \\ (x^2+y^2)^2 + 2v^2(x^2+y^2) + v^4 - 4v^2x^2 - w^4 &= 0 \\ (x^2+y^2)^2 - 2v^2(x^2-y^2) - (w^4-v^4) &= 0\end{aligned}$$

で表され、Cassini の oval と呼ばれています。これを变形すると任意の  $r^2$  を挿入して

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2 - 2v^2(x^2-y^2) - (w^4-v^4) &= 0 \\ (x^2+y^2-r^2)^2 + 2r^2(x^2+y^2) - r^4 - 2v^2(x^2-y^2) - (w^4-v^4) &= 0 \\ (x^2+y^2-r^2)^2 + 2(r^2-v^2)x^2 + 2(r^2+v^2)y^2 - r^4 + v^4 - w^4 &= 0 \\ (x^2+y^2-r^2)^2 + 2(r^2-v^2)x^2 + 2(r^2+v^2)y^2 - (r^4-v^4) - w^4 &= 0 \\ (x^2+y^2-r^2)^2 + (r^4-v^4) \left\{ \frac{x^2}{\frac{r^2+v^2}{2}} + \frac{y^2}{\frac{r^2-v^2}{2}} - 1 \right\} &= w^4\end{aligned}$$

と書けますが、ここで  $r^2 > v^2$  として

$$\frac{r^2+v^2}{2} = a^2, \quad \frac{r^2-v^2}{2} = b^2$$

と置けば、

$$a^2 + b^2 = r^2, \quad 4a^2b^2 = r^4 - v^4$$

ですから

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = w^4$$

と变形されます。これは2点  $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$  からの距離の積が一定値  $w^2$  であるような点の軌跡です。

## 5 双曲線の場合

## 6 直交する法線

### 6.1 放物線の場合

放物線  $y = x^2$  の、異なる2点  $A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$  での法線はそれぞれ

$$y - \alpha^2 = -\frac{1}{2\alpha}(x - \alpha), \quad y - \beta^2 = -\frac{1}{2\beta}(x - \beta)$$

であり、その交点は

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 &= \frac{1}{2\alpha}(x - \alpha) - \frac{1}{2\beta}(x - \beta) \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta}x \\ x &= -2\alpha\beta(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2\alpha}(x - \alpha) + \alpha^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

より  $(-2\alpha\beta(\alpha + \beta), \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \frac{1}{2})$  です。

2法線が直交するとき、 $\alpha\beta = -\frac{1}{4}$  であって、交点の座標について

$$\begin{aligned}x &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ 4x^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2} \\ y &= \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4} \\ &= 4x^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

が成り立ちます。

### 6.2 楕円の場合

楕円の異なる2点における法線が直交するとき、この2点における接線同士も直交していますから、この接線は準円上の点から引いた2接線ということになります。

楕円を  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  とするとその準円は  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$  ですから、準円上の点  $(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta)$  から引いた 2 接線の接点での法線の交点の軌跡を求めましょう。

準円上の点  $(\alpha, \beta) = (\sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta)$  を極としたときの極線（2 接点を通る直線）は

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1$$

であり、極と 2 接点ともう 1 点で長方形が作られ、そのもう 1 点こそが 2 法線の交点に他なりません。この長方形の対角線のうち極を通るものは楕円の中心である原点を通るので、この情報から長方形の第 4 の点の座標を求めることができます。

極線を  $Lx + My + N = 0$ 、極を  $(\alpha, \beta)$  とし、極と原点を通る直線を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

とすれば、この直線と極線の交点は

$$L(1-t)\alpha + M(1-t)\beta + N = 0$$

$$1-t = -\frac{N}{L\alpha + M\beta}$$

$$t = 1 + \frac{N}{L\alpha + M\beta}$$

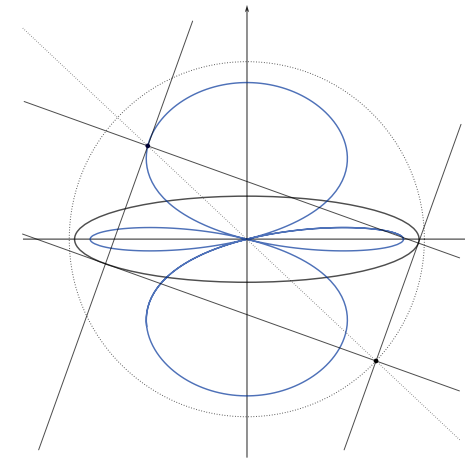
に対応する点です。従って、ここが対角線の交点ですから、長方形の第 4 の点は  $t = 2 + \frac{2N}{L\alpha + M\beta}$  に対応する点であることが分かります。

$$\left( -\left( 1 + \frac{2N}{L\alpha + M\beta} \right) \alpha, -\left( 1 + \frac{2N}{L\alpha + M\beta} \right) \beta \right)$$

$L = \frac{\alpha}{a^2}, M = \frac{\beta}{b^2}, N = -1$  によれば第 4 の点、すなわち直交する法線の交点は

$$\left( -\frac{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta - a^2 b^2}{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta + a^2 b^2} \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, -\frac{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta - a^2 b^2}{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta + a^2 b^2} \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta \right)$$

です。



### 6.3 双曲線の場合

## 7 一般的な理論

### 7.1 接線と極線

### 7.2 $(\alpha, \beta)$ が曲線上にある場合 ～接線～

#### 事実 7.1 [ 2 次曲線の接線 ]

(1) 楕円  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  上の点  $(\alpha, \beta)$  における接線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

(2) 放物線  $y - y_0 = p(x - x_0)^2$  上の点  $(\alpha, \beta)$  における接線：

$$(y - y_0) + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)(x - x_0).$$

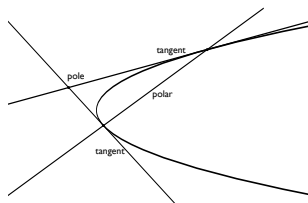
(3) 双曲線  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  上の点  $(\alpha, \beta)$  における接線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

どれも点  $(\alpha, \beta)$  を通り、傾きが微分（など）によって求まるものと一致しているので確かに接線になっています。

### 7.3 $(\alpha, \beta)$ が外部にある場合 ～極線～

定義 7.2 2 次曲線に外部の点  $P$  から引いた 2 本の接線の 2 接点を通る直線を  $l$  とするとき、直線  $l$  は点  $P$  を極（pole）とする極線（polar）と言い、点  $P$  は直線  $l$  を極線とする極と言います。



楕円  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  の外部の点  $(\alpha, \beta)$  から引いた 2 本の接線の接点を  $(v_1, w_1), (v_2, w_2)$  とおけば、それぞれの点での接線は

$$\frac{(v_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(w_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

$$\frac{(v_2 - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(w_2 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

ですが、どちらも極である  $(\alpha, \beta)$  を通りますから

$$\begin{cases} \frac{(v_1 - x_0)(\alpha - x_0)}{a^2} + \frac{(w_1 - y_0)(\beta - y_0)}{b^2} = 1 \\ \frac{(v_2 - x_0)(\alpha - x_0)}{a^2} + \frac{(w_2 - y_0)(\beta - y_0)}{b^2} = 1 \end{cases}$$

が成り立っており、これは直線：

$$\frac{(x - x_0)(\alpha - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(\beta - y_0)}{b^2} = 1$$

が 2 点  $(v_1, w_1), (v_2, w_2)$  を通る事を意味しており、従ってこれが極線の方程式です。

放物線・双曲線の場合も全く同様です。ただし、『外部』とは、焦点を含まない側とします。

#### 事実 7.3 [ 2 次曲線の極線 ]

(1) 楕円  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  の、外部の点  $(\alpha, \beta)$  を極とする極線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

(2) 放物線  $y - y_0 = p(x - x_0)^2$  の外部の点  $(\alpha, \beta)$  を極とする極線：

$$(y - y_0) + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)(x - x_0).$$

(3) 双曲線  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  の外部の点  $(\alpha, \beta)$  を極とする極線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1.$$

双曲線の外部の点のうち、漸近線上からは接線を 2 本引くことができませんので注意が必要です。ただ、その場合でも上の直線の式は何らかの直線を表しています。無限遠方で漸近線と接すると考えれば・・・

## 7.4 $(\alpha, \beta)$ が内部にある場合 ～拡張された極線～

例えば楕円の場合、直線

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

は、点  $(\alpha, \beta)$  が楕円上にあれば接線を表し、楕円外にあれば極線を表していました。では点  $(\alpha, \beta)$  が楕円の内部にある場合、この直線は一体どんな直線なのでしょう？ ただし  $(\alpha, \beta) = (x_0, y_0)$  の場合はこの方程式は直線を表さないのので除外しておきます。

### 7.4.1 交点：楕円の場合

まずこの直線と楕円の交点を考えます。直接計算するのも面白いですが、煩雑です。平行移動・拡大縮小しても交点の数の状況に変化はないので、特別な場合：

$$\text{楕円} : x^2 + y^2 = 1, \quad \text{直線} : \alpha x + \beta y = 1 \quad ((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

に計算すれば十分でしょう。

$\beta \neq 0$  であれば、直線の式から  $y = \frac{1}{\beta}(1 - \alpha x)$  ですから、これを楕円の式に代入して

$$x^2 + \frac{(1 - \alpha x)^2}{\beta^2} = 1$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2\alpha x + 1 - \beta^2 = 0$$

が得られますから、 $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  よりこれは2次方程式であって、判別式  $D$  は

$$D = \alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(1 - \beta^2) = \beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - 1)$$

となります。

従って  $(\alpha, \beta)$  が楕円の内部の点であれば  $D < 0$  ですから、この直線は楕円と交わりません。また、点  $(\alpha, \beta)$  が楕円の外部の点であれば  $D > 0$  であってこの直線は楕円と異なる2点で交わり、点  $(\alpha, \beta)$  が楕円上の点ならば  $D = 0$  となって、この直線は楕円と1点のみで交わり、接線であることが分かるわけです。

また  $\beta = 0$  の場合は、 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  から直線  $x = \frac{1}{\alpha}$  であり、 $(\alpha, 0)$  が楕円の内部の点であれば  $|\alpha| < 1$  なので直線は楕円の外部にあり交わりません。 $(\alpha, 0)$  が楕円上の点であれば  $\alpha = \pm 1$  であって、直線は楕円に接しています。また、 $(\alpha, 0)$  が楕円の外部の点であれば  $|\alpha| > 1$  なので、直線は楕円と異なる2点で交わります。

**事実 7.4** 楕円： $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  と直線： $\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2} + \frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2} = 1$  の交点について、以下が成り立ちます ( $(\alpha, \beta) \neq (x_0, y_0)$ )。

- (i) 点  $(\alpha, \beta)$  が楕円外にある  $\Leftrightarrow$  異なる2点で交わる。
- (ii) 点  $(\alpha, \beta)$  が楕円内にある  $\Leftrightarrow$  交わらない。
- (iii) 点  $(\alpha, \beta)$  が楕円上にある  $\Leftrightarrow$  1点で接する。

### 7.4.2 交点：双曲線の場合

次に双曲線と直線の交点ですが、平行移動・拡大縮小しても交点の数の状況に変化はないので、やはり特別な場合：

$$\text{双曲線} : x^2 - y^2 = 1, \quad \text{直線} : \alpha x - \beta y = 1 \quad ((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

に計算すれば十分でしょう。

$\beta \neq 0$  であれば  $y = \frac{1}{\beta}(\alpha x - 1)$  ですから、これを双曲線の式に代入して

$$x^2 - \frac{(\alpha x - 1)^2}{\beta^2} = 1$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha x + 1 + \beta^2 = 0$$

が得られます。

まず  $|\alpha| = |\beta|$  の場合、つまり点  $(\alpha, \beta)$  が漸近線上にある場合は、直線は漸近線に平行であり、 $x = \frac{1+\beta^2}{2\alpha}$  から交点はただ1つであることが分かります。

$|\alpha| \neq |\beta|$  であればこれは2次方程式であって、判別式  $D$  は

$$D = \alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)(1 + \beta^2) = -\beta^2(\alpha^2 - \beta^2 - 1)$$

となります。ここで

$$\text{点 } (\alpha, \beta) \text{ が双曲線の内部} \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 > 1$$

に注意すれば、 $(\alpha, \beta)$  が双曲線の内部の点であれば  $D < 0$  ですから、この直線は双曲線と交わりません。また、点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線の外部の点（であり、かつ、漸近線上の点

でない) であれば  $D > 0$  であってこの直線は双曲線と異なる 2 点で交わり、点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線上の点ならば  $D = 0$  となって、この直線は双曲線と 1 点のみで交わり、接線であることが分かるわけです。

また  $\beta = 0$  の場合は、 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  から直線は  $x = \frac{1}{\alpha}$  であり、 $(\alpha, 0)$  が双曲線の内部の点であれば  $|\alpha| > 1$  なので直線は双曲線の外部にあり交わりません。 $(\alpha, 0)$  が双曲線上の点であれば  $\alpha = \pm 1$  であって、直線は双曲線に接しています。また、 $(\alpha, 0)$  が双曲線の外部の点であれば  $|\alpha| < 1$  なので、直線は双曲線と異なる 2 点で交わります。

【直接計算】 双曲線： $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  と直線： $\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2} - \frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2} = 1$  の交点を考えます。

$$\text{点 } (\alpha, \beta) \text{ が双曲線の内部} \Leftrightarrow \frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2} - \frac{(\beta-y_0)^2}{b^2} > 1$$

に注意します。

$\beta \neq y_0$  である場合は直線の式を変形して

$$\frac{y-y_0}{b} = \frac{b}{\beta-y_0} \left\{ \frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2} - 1 \right\}$$

双曲線の式に代入すれば方程式：

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{b^2}{(\beta-y_0)^2} \left\{ \frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2} - 1 \right\}^2 &= 1 \\ \frac{1}{a^2} \left\{ 1 - \frac{b^2(\alpha-x_0)^2}{a^2(\beta-y_0)^2} \right\} (x-x_0)^2 + 2 \frac{b^2(\alpha-x_0)}{a^2(\beta-y_0)^2} (x-x_0) - \frac{b^2}{(\beta-y_0)^2} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が得られますが、2 次の係数が 0 である可能性があります。それは

$$\frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2} = \frac{(\beta-y_0)^2}{b^2} \quad \text{すなわち、} \quad \frac{\alpha-x_0}{a} \pm \frac{\beta-y_0}{b} = 0$$

つまり、点  $(\alpha, \beta)$  が漸近線上にある場合です。この場合は  $\beta \neq y_0$  は  $\alpha - x_0 \neq 0$  を意味するので方程式は 1 次式であって、

$$x = \frac{a^2 \{b^2 + (\beta-y_0)^2\}}{2b^2(\alpha-x_0)} = \frac{a^2 + (\alpha-x_0)^2}{2(\alpha-x_0)}$$

となって交点は 1 つです。

点  $(\alpha, \beta)$  が漸近線上にない場合は、これは 2 次方程式であって、判別式  $D$  は

$$\begin{aligned} D &= \frac{b^4(\alpha-x_0)^2}{a^4(\beta-y_0)^4} + \frac{1}{a^2} \left\{ 1 - \frac{b^2(\alpha-x_0)^2}{a^2(\beta-y_0)^2} \right\} \left\{ \frac{b^2}{(\beta-y_0)^2} + 1 \right\} \\ &= \frac{b^4}{a^2(\beta-y_0)^4} \left( -\frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2} + \left\{ \frac{(\beta-y_0)^2}{b^2} - \frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{(\beta-y_0)^2}{b^2} \right\} \right) \\ &= \frac{b^4}{a^2(\beta-y_0)^4} \frac{(\beta-y_0)^2}{b^2} \left\{ \frac{(\beta-y_0)^2}{b^2} - \frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2} + 1 \right\} \\ &= -\frac{b^2}{a^2(\beta-y_0)^2} \left\{ \frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2} - \frac{(\beta-y_0)^2}{b^2} - 1 \right\} \end{aligned}$$

です。

従って  $(\alpha, \beta)$  が双曲線の内部の点であれば  $D < 0$  ですから、この直線は双曲線と交わりません。また、点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線の外部の点（であり、かつ、漸近線上の点でない）であれば  $D > 0$  であってこの直線は双曲線と異なる 2 点で交わり、点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線上の点ならば  $D = 0$  となって、この直線は双曲線と 1 点のみで交わり、接線であることが分かるわけです。

$\beta = y_0$  の場合は  $(\alpha, \beta) = (x_0, y_0)$  から  $\alpha \neq x_0$  であって、直線は

$$x = x_0 + \frac{a^2}{\alpha - x_0} = x_0 + a \frac{a}{\alpha - x_0}$$

です。

$(\alpha, y_0)$  が双曲線の内部の点であれば  $|\alpha - x_0| > a$  なので、直線は双曲線の外部にあり交わりません。 $(\alpha, y_0)$  が双曲線上の点であれば  $\alpha = x_0 \pm a$  であって、直線は双曲線に接しています。また、 $(\alpha, y_0)$  が双曲線の外部の点であれば  $|\alpha - x_0| < a$  なので、直線は双曲線と異なる 2 点で交わります。

事実 7.5 双曲線： $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  と直線： $\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2} - \frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2} = 1$  の交点について、以下が成り立ちます ( $(\alpha, \beta) \neq (x_0, y_0)$ )。

- (i) 点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線外にあって、漸近線上にない  $\Leftrightarrow$  異なる 2 点で交わる。
- (ii) 点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線外にあって、漸近線上にある  $\Leftrightarrow$  1 点で交わる。
- (iii) 点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線内にある  $\Leftrightarrow$  交わらない。
- (iv) 点  $(\alpha, \beta)$  が双曲線上にある  $\Leftrightarrow$  1 点で接する。



### 7.4.3 交点：放物線の場合

平行移動・拡大縮小しても交点の数の状況に変化はないので、特別な場合：

$$\text{放物線: } y = x^2, \quad \text{直線: } y + \beta = 2\alpha x$$

に計算すれば十分です。  $y = 2\alpha x - \beta$  として放物線の式に代入すれば

$$\begin{aligned} 2\alpha x - \beta &= x^2 \\ 0 &= x^2 - 2\alpha x + \beta \end{aligned}$$

であり、判別式は

$$D = \alpha^2 - \beta$$

ですから、点  $(\alpha, \beta)$  が放物線の内部にあれば、 $D < 0$  であり、直線と放物線は交わりません。点  $(\alpha, \beta)$  が放物線上にあれば、 $D = 0$  であって、1点で接しています。また、点  $(\alpha, \beta)$  が放物線の外部にあれば、 $D > 0$  であり、直線と放物線は異なる2点で交わっています。

放物線は軸と平行な直線とは1点で接せずに交わりますが、問題の直線は  $y$  軸に平行な直線をあらかじめ含んでいませんので、これが問題になることはありません。

**事実 7.6** 放物線:  $y - y_0 = p(x - x_0)^2$  と直線:  $(y - y_0) + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)(x - x_0)$  の交点について、以下が成り立ちます。

- (i) 点  $(\alpha, \beta)$  が放物線外にある  $\Leftrightarrow$  異なる2点で交わる。
- (ii) 点  $(\alpha, \beta)$  が放物線内にある  $\Leftrightarrow$  交わらない。
- (iii) 点  $(\alpha, \beta)$  が放物線上にある  $\Leftrightarrow$  1点で接する。

### 7.4.4 極線との関係

次に、自明な次の事実に注目すれば：

**事実 7.7**

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1 \text{ 上に点 } (A, B) \text{ がある}$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \frac{(A - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(B - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1 \text{ 上に点 } (\alpha, \beta) \text{ がある} \end{array}$$

楕円内部に点  $(\alpha, \beta)$  があるとき、直線

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

は、楕円外部の点  $(A, B)$  のうち、この点を極とした場合の極線が点  $(\alpha, \beta)$  を通るような点全体のなす直線であることが分かります。

**事実 7.8** 楕円:  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  とその内部にある点  $(\alpha, \beta) \neq (x_0, y_0)$  に対して、直線：

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

は、点  $(\alpha, \beta)$  を通る任意の極線の極の全体です。

この場合も、この直線のことを極  $(\alpha, \beta)$  に関する極線とすることにします。

**定義 7.9** 楕円  $C$  とその内部の点  $P$  が与えられたとき、点  $P$  を通る極線の（外部）極全体のなす直線を、点  $P$  を（内部）極としたときの楕円  $C$  の極線と言います。

この様に、外部極に関する極線を使って内部極に関する極線が定義されますが、これらを統一的に扱うのであれば、上の吟味において実は点  $(\alpha, \beta)$  が楕円の『内部』にある必要はなく、外部の点であっても全く同じことが言えることに注目すれば、次の様に定義し直すことも可能です：

**定義 7.10** 2次曲線  $C$  と点  $P$  が与えられたとき、点  $P$  を通り  $C$  と2点で交わる直線で、その2交点における  $C$  の接線が平行でないものが存在するとき、それら

接線の交点はある一定の直線上にあり、この直線のことを点  $P$  を極としたときの 2 次曲線  $C$  の極線と言います。

また、2 次曲線  $C$  と直線  $l$  があたえられたとき、直線  $l$  上の点で  $C$  へ 2 本の接線が引ける点が存在するならば、その 2 接点を結ぶ直線はある 1 点を共有しており、この点を直線  $l$  を極線としたときの 2 次曲線  $C$  の極と言います。

| 例外  |                                 |
|-----|---------------------------------|
| 楕円  | 中心を極とする極線はない。                   |
| 放物線 | 軸と平行な直線を極線とする極はない。              |
| 双曲線 | 中心を極とする極線はない。<br>漸近線を極線とする極はない。 |

放物線では任意の点に対してその点を極とした場合の極線が存在しますが、楕円、双曲線では中心においてのみ極線が存在しません。無限遠直線なるものを考えれば・・・

内部の点ということで、最も気になるのは焦点でしょうか。

**事実 7.11** 2 次曲線の焦点を極としたときの極線は準線です。

## 7.5 極線上の点からの極線

**事実 7.12** 点  $P$  を極とする楕円の極線が点  $Q$  を通るならば、点  $Q$  を極とする楕円の極線は点  $P$  を通ります。

楕円を

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

とし、 $P(\alpha, \beta)$  とすると、極線は

$$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2} + \frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2} = 1$$

です。更に点  $Q$  を  $Q(A, B)$  とおけば、

$$\frac{(\alpha-x_0)(A-x_0)}{a^2} + \frac{(\beta-y_0)(B-y_0)}{b^2} = 1 \quad (7.1)$$

が成り立っています。

一方、 $Q$  を極とする極線は

$$\frac{(A-x_0)(x-x_0)}{a^2} + \frac{(B-y_0)(y-y_0)}{b^2} = 1$$

ですから、(7.1) はこの極線が点  $P(\alpha, \beta)$  を通ることを示しています。  $\square$

**事実 7.13** 点  $P$  を極とする放物線の極線が点  $Q$  を通るならば、点  $Q$  を極とする放物線の極線は点  $P$  を通ります。

放物線を

$$y-y_0 = p(x-x_0)^2$$

とし、 $P(\alpha, \beta)$  とすると、極線は

$$(y-y_0) + (\beta-y_0) = 2p(\alpha-x_0)(x-x_0)$$

です。更に点  $Q$  を  $Q(A, B)$  とおけば、

$$(B-y_0) + (\beta-y_0) = 2p(\alpha-x_0)(A-x_0) \quad (7.2)$$

が成り立っています。

一方、 $Q$  を極とする極線は

$$(y - y_0) + (B - y_0) = 2p(A - x_0)(x - x_0)$$

ですから、(7.2) はこの極線が点  $P(\alpha, \beta)$  を通ることを示しています。□

**事実 7.14** 点  $P$  を極とする双曲線の極線が点  $Q$  を通るならば、点  $Q$  を極とする双曲線の極線は点  $P$  を通ります。

双曲線を

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

とし、 $P(\alpha, \beta)$  とすると、極線は

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

です。更に点  $Q$  を  $Q(A, B)$  とおけば、

$$\frac{(\alpha - x_0)(A - x_0)}{a^2} - \frac{(\beta - y_0)(B - y_0)}{b^2} = 1 \quad (7.3)$$

が成り立っています。

一方、 $Q$  を極とする極線は

$$\frac{(A - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(B - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

ですから、(7.3) はこの極線が点  $P(\alpha, \beta)$  を通ることを示しています。□

**事実 7.15** 極が準線上にあることと、焦点が極線上にあることは同値です。

## 7.6 極と極線の中点を結ぶ直線

**事実 7.16** 楕円の外部の点を極とする極線の（2 接点の）中点と極を結ぶ直線は楕円の中心を通ります。

これは円の場合に証明して拡大・縮小すれば良いことは明白です。そうするとこの問題は自明であることに気がつくでしょう。□

**事実 7.17** 放物線の外部の点を極とする極線の（2 接点の）中点と極を結ぶ線分は放物線の軸に平行であり、放物線と中点で交わります。

放物線を  $y - y_0 = p(x - x_0)^2$  とし、極を  $(\alpha, \beta)$  とします。放物線の軸は  $y$ -軸に平行です。

$$\begin{cases} (y - y_0) + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)(x - x_0) \\ y - y_0 = p(x - x_0)^2 \end{cases}$$

から、

$$p(x - x_0)^2 + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)(x - x_0)$$

$$px^2 - 2px_0x + px_0^2 - 2p(\alpha - x_0)x + 2p(\alpha - x_0)x_0 + \beta - y_0 = 0$$

$$px^2 - 2p\alpha x + px_0^2 + 2p(\alpha - x_0)x_0 + \beta - y_0 = 0$$

となり、確かに極線の中点の  $x$ -座標は  $\alpha$  です。題意は示されました。更に 2 接点の  $x$  座標を求めると

$$p(x - \alpha)^2 - p\alpha^2 + px_0^2 + 2p(\alpha - x_0)x_0 + \beta - y_0 = 0$$

$$p(x - \alpha)^2 - p(\alpha - x_0)(\alpha + x_0) + p(\alpha - x_0)2x_0 + \beta - y_0 = 0$$

$$p(x - \alpha)^2 - p(\alpha - x_0)^2 + \beta - y_0 = 0$$

$$p(x - \alpha)^2 = p(\alpha - x_0)^2 - \beta + y_0$$

ですから

$$x = \alpha \pm \sqrt{(\alpha - x_0)^2 - \frac{1}{p}(\beta - y_0)}$$

です。

また、極線の中点の  $y$ -座標は

$$(y - y_0) + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)^2$$

$$\frac{y + \beta}{2} = p(\alpha - x_0)^2 + y_0$$

を満たしており、この中点と極を結ぶ線分は、放物線上の  $x = \alpha$  に対応する点で2等分されることが分かります。

□

**事実 7.18** 双曲線の外部の点を極とする極線の（2接点の）中点と極を結ぶ直線は双曲線の中心を通ります。

2接線の方程式は

$$\begin{cases} \frac{(v_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(w_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1 \\ \frac{(v_2 - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(w_2 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1 \end{cases}$$

ですから、交点すなわち極の座標は

$$\frac{1}{w_1 - y_0} \left\{ \frac{(v_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} - 1 \right\} = \frac{1}{w_2 - y_0} \left\{ \frac{(v_2 - x_0)(x - x_0)}{a^2} - 1 \right\}$$

$$(w_2 - y_0)(v_1 - x_0)(x - x_0) - (w_2 - y_0)a^2 = (w_1 - y_0)(v_2 - x_0)(x - x_0) - (w_1 - y_0)a^2$$

$$x - x_0 = \frac{a^2(w_2 - w_1)}{(w_2 - y_0)(v_1 - x_0) - (w_1 - y_0)(v_2 - x_0)}$$

$$= \frac{a \frac{w_2 - w_1}{b}}{\frac{w_2 - y_0}{b} \frac{v_1 - x_0}{a} - \frac{w_1 - y_0}{b} \frac{v_2 - x_0}{a}}$$

$$\frac{1}{v_1 - x_0} \left\{ 1 + \frac{(w_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2} \right\} = \frac{1}{v_2 - x_0} \left\{ 1 + \frac{(w_2 - y_0)(y - y_0)}{b^2} \right\}$$

$$(v_2 - x_0)(w_1 - y_0)(y - y_0) + (v_2 - x_0)b^2 = (v_1 - x_0)(w_2 - y_0)(y - y_0) + (v_1 - x_0)b^2$$

$$y - y_0 = \frac{b^2(v_1 - v_2)}{(v_2 - x_0)(w_1 - y_0) - (v_1 - x_0)(w_2 - y_0)}$$

$$= \frac{b \frac{v_1 - v_2}{a}}{\frac{v_2 - x_0}{a} \frac{w_1 - y_0}{b} - \frac{v_1 - x_0}{a} \frac{w_2 - y_0}{b}}$$

となりますが、ここで  $x - x_0$  の分母は

$$\begin{aligned} & \frac{w_2 - y_0}{b} \frac{v_1 - x_0}{a} - \frac{w_1 - y_0}{b} \frac{v_2 - x_0}{a} \\ &= \left( \frac{w_2 - y_0}{b} - \frac{w_1 - y_0}{b} \right) \left( \frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a} \right) - \frac{w_2 - y_0}{b} \frac{v_2 - x_0}{a} + \frac{w_1 - y_0}{b} \frac{v_1 - x_0}{a} \\ &= \left( \frac{w_2 - y_0}{b} + \frac{w_1 - y_0}{b} \right) \left( \frac{v_1 - x_0}{a} - \frac{v_2 - x_0}{a} \right) + \frac{w_2 - y_0}{b} \frac{v_2 - x_0}{a} - \frac{w_1 - y_0}{b} \frac{v_1 - x_0}{a} \end{aligned}$$

と2通りに変形されますので

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{2a \frac{w_2 - w_1}{b}}{\left( \frac{w_2 - y_0}{b} - \frac{w_1 - y_0}{b} \right) \left( \frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a} \right) + \left( \frac{w_2 - y_0}{b} + \frac{w_1 - y_0}{b} \right) \left( \frac{v_1 - x_0}{a} - \frac{v_2 - x_0}{a} \right)} \\ &= \frac{2a}{\left( \frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a} \right) + \left( \frac{w_2 - y_0}{b} + \frac{w_1 - y_0}{b} \right) \frac{\frac{v_1 - x_0}{a} - \frac{v_2 - x_0}{a}}{\frac{w_2 - y_0}{b} - \frac{w_1 - y_0}{b}}} \end{aligned}$$

ですが、接点  $(v_1, w_1), (v_2, w_2)$  は双曲線上にあるので

$$\begin{cases} \frac{(v_1 - x_0)^2}{a^2} - \frac{(w_1 - y_0)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(v_2 - x_0)^2}{a^2} - \frac{(w_2 - y_0)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

を辺々引いて

$$\begin{aligned} \frac{(v_1 - x_0)^2}{a^2} - \frac{(v_2 - x_0)^2}{a^2} &= \frac{(w_1 - y_0)^2}{b^2} - \frac{(w_2 - y_0)^2}{b^2} \\ \frac{\frac{v_1 - x_0}{a} - \frac{v_2 - x_0}{a}}{\frac{w_1 - y_0}{b} - \frac{w_2 - y_0}{b}} &= \frac{\frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b}}{\frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a}} \end{aligned}$$

が成り立っているので、これを代入すれば

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{2a}{\left( \frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a} \right) - \left( \frac{w_2 - y_0}{b} + \frac{w_1 - y_0}{b} \right) \frac{\frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b}}{\frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a}}} \\ &= \frac{2a \left( \frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a} \right)}{\left( \frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a} \right)^2 - \left( \frac{w_2 - y_0}{b} + \frac{w_1 - y_0}{b} \right)^2} \\ &= \frac{4}{\left( \frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a} \right)^2 - \left( \frac{w_2 - y_0}{b} + \frac{w_1 - y_0}{b} \right)^2} \left( \frac{v_1 + v_2}{2} - x_0 \right) \end{aligned}$$

です。また  $y - y_0$  の分母も

$$\begin{aligned} & \frac{v_2 - x_0}{a} \frac{w_1 - y_0}{b} - \frac{v_1 - x_0}{a} \frac{w_2 - y_0}{b} \\ &= \left( \frac{v_2 - x_0}{a} + \frac{v_1 - x_0}{a} \right) \left( \frac{w_1 - y_0}{b} - \frac{w_2 - y_0}{b} \right) + \frac{v_2 - x_0}{a} \frac{w_2 - y_0}{b} - \frac{v_1 - x_0}{a} \frac{w_1 - y_0}{b} \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{v_2 - x_0}{a} - \frac{v_1 - x_0}{a} \right) \left( \frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b} \right) - \frac{v_2 - x_0}{a} \frac{w_2 - y_0}{b} + \frac{v_1 - x_0}{a} \frac{w_1 - y_0}{b}$$

と2通りに変形されますので、同様に

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{2b \frac{v_1 - v_2}{a}}{\left( \frac{v_2 - x_0}{a} - \frac{v_1 - x_0}{a} \right) \left( \frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b} \right) + \left( \frac{v_2 - x_0}{a} + \frac{v_1 - x_0}{a} \right) \left( \frac{w_1 - y_0}{b} - \frac{w_2 - y_0}{b} \right)} \\ &= \frac{-2b}{\left( \frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b} \right) + \left( \frac{v_2 - x_0}{a} + \frac{v_1 - x_0}{a} \right) \frac{\frac{w_1 - y_0}{b} - \frac{w_2 - y_0}{b}}{\frac{v_2 - x_0}{a} - \frac{v_1 - x_0}{a}}} \\ &= \frac{-2b}{\left( \frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b} \right) - \left( \frac{v_2 - x_0}{a} + \frac{v_1 - x_0}{a} \right) \frac{\frac{v_1 - x_0}{a} + \frac{v_2 - x_0}{a}}{\frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b}}} \\ &= \frac{-2b \left( \frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b} \right)}{\left( \frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b} \right)^2 - \left( \frac{v_2 - x_0}{a} + \frac{v_1 - x_0}{a} \right)^2} \\ &= \frac{4}{\left( \frac{v_2 - x_0}{a} + \frac{v_1 - x_0}{a} \right)^2 - \left( \frac{w_1 - y_0}{b} + \frac{w_2 - y_0}{b} \right)^2} \left( \frac{w_1 + w_2}{2} - y_0 \right) \end{aligned}$$

です。

以上から双曲線の中心  $(x_0, y_0)$  と極と2接点の中点  $\left( \frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{w_1 + w_2}{2} \right)$  は1直線上にあることが分かりました。□

| こんな複雑な計算は必要なく、平行移動・拡大縮小して特別な場合に示せば十分です。