

## 目次

|                                    |    |                                          |    |
|------------------------------------|----|------------------------------------------|----|
| 第Ⅰ部 基本的な不等式                        | 4  | 8.2.1 $x = 1$ を重根にもつこと                   | 15 |
| 1 Jensen-Hölder の凸不等式              | 4  | 8.2.2 商の係数が全て正であること                      | 16 |
| 2 AM-GM 不等式                        | 4  | 8.2.3 その他 $L_n$ について分かっていること             | 17 |
| 3 並べ替え不等式                          | 5  | 8.3 $C_n$ と $M_n$ の関係：試行錯誤篇              | 18 |
| 3.1 一般の並べ替え不等式                     | 5  | 8.3.1 $C_n \leq M_n$                     | 18 |
| 3.2 全ての並べ替えとの内積                    | 5  | 8.3.2 $M_n$ の単調増加性を使って $C_n$ について言えること   | 18 |
| 4 Maclaurin の不等式                   | 6  | 8.3.3 $C_{n+1} \leq M_n$                 | 18 |
| 4.1 方程式の解に関する基本事項                  | 6  | 8.3.4 $C_n \leq M_1$ ?                   | 19 |
| 4.2 基本的な補題                         | 7  | 8.3.5 $C_n \leq M_2$ かどうか?               | 20 |
| 4.3 基本対称式                          | 7  | 8.3.6 $C_{n+3} \leq M_n$ ?               | 21 |
| 4.4 Maclaurin の不等式                 | 8  | 8.3.7 一旦まとめ                              | 23 |
| 5 Newton の不等式                      | 9  | 8.3.8 $M_2 C_2 = C_4^2$                  | 23 |
| 5.1 例                              | 9  | 8.4 $C_n$ と $M_n$ の関係：解決篇                | 24 |
| 5.2 基本的な補題                         | 9  | 8.4.1 $C_{n+3} \leq M_n$                 | 24 |
| 5.3 Newton の不等式の証明                 | 10 | 8.4.2 $C_n \leq C_{n+1}$                 | 24 |
| 6 Maclaurin の不等式と Newton の不等式の関係   | 10 | 8.4.3 $M_n$ の単調性、再び                      | 25 |
| 6.1 Newton $\Rightarrow$ Maclaurin | 10 | 9 2変数巡回型 power mean $C_{m,n}$            | 25 |
| 6.2 Newton $\Leftarrow$ Maclaurin  | 11 | 9.1 $m = 1$                              | 26 |
| 第Ⅱ部 Power Mean Inequalities        | 11 | 9.2 $m = 2$                              | 26 |
| 7 2変数 power mean inequalities      | 11 | 9.3 $m = 3$                              | 28 |
| 7.1 基本的な計算                         | 11 | 9.3.1 $C_{3,5}$                          | 30 |
| 7.2 多項式の性質へ                        | 13 | 9.3.2 余談                                 | 30 |
| 8 2変数巡回型 power mean inequalities   | 14 | 9.3.3 復帰 $C_{3,4}$                       | 32 |
| 8.1 定義と試算                          | 14 | 9.3.4 脱線                                 | 33 |
| 8.2 $C_n$ の単調性 最初の試み               | 14 | 9.3.5 復帰                                 | 33 |
|                                    |    | 9.3.6 $C_{3,3}$                          | 33 |
|                                    |    | 9.3.7 既視感について                            | 34 |
|                                    |    | 9.3.8 余談 一般の場合への想い                       | 35 |
|                                    |    | 9.4 $m = 4$                              | 35 |
|                                    |    | 9.4.1 $m = 2$ からの翻訳                      | 35 |
|                                    |    | 9.4.2 単調性                                | 36 |
|                                    |    | 9.4.3 小さいところ                             | 36 |
|                                    |    | 9.4.4 $n < 8$ と $n > 8$ との兼ね合い $C_{4,7}$ | 37 |
|                                    |    | 9.4.5 $C_{4,6}$                          | 37 |

|        |                                                |    |
|--------|------------------------------------------------|----|
| 9.4.6  | $C_{4,5}$                                      | 37 |
| 9.4.7  | $C_{4,4}$                                      | 39 |
| 9.5    | 小さいところの単調減少性                                   | 40 |
| 9.6    | $m = 6$ $m = 2, 3$ との関係に基づいて                   | 40 |
| 9.6.1  | $C_{6,11}, C_{6,13}$                           | 41 |
| 9.6.2  | $C_{6,11}, C_{6,14}$                           | 41 |
| 9.6.3  | $C_{6,9}$ と $C_{6,10}, C_{6,15}$               | 42 |
| 9.6.4  | $C_{6,9}, C_{6,18}$                            | 42 |
| 9.6.5  | $C_{6,8}$ と $C_{6,18}, C_{6,24}$               | 43 |
| 9.6.6  | $C_{6,6}, C_{6,24}$ 具体的な計算                     | 43 |
| 9.6.7  | $C_{6,6}, C_{6,24}$ 一般的な計算                     | 44 |
| 9.6.8  | $C_{6,8}$ 一般的な計算                               | 45 |
| 9.6.9  | $C_{6,m} \leq C_{6,7}$                         | 46 |
| 9.6.10 | $C_{6,20} \leq C_{6,7}$                        | 46 |
| 9.6.11 | $C_{6,7} \leq C_{6,m}$                         | 47 |
| 9.7    | $m = 5$                                        | 48 |
| 9.7.1  | $C_{5,n} \leq C_{5,r}$ 一般的な計算                  | 48 |
| 9.7.2  | $C_{5,16} \leq C_{5,6}$                        | 49 |
| 9.7.3  | $C_{5,14} \leq C_{5,7}$                        | 50 |
| 9.7.4  | $C_{5,19} \leq C_{5,5}$ (既出ですが、やってみたので載せて置きます) | 50 |
| 9.7.5  | 多項式の正値性                                        | 50 |
| 9.7.6  | $C_{5,r} \leq C_{5,n}$ 一般的な計算                  | 51 |
| 9.8    | 一般の $m$                                        | 52 |
| 9.8.1  | $C_{m,r} \leq C_{m,n}$ の一般的な計算                 | 52 |
| 9.8.2  | $C_{m,n} \leq C_{m,m}$ となる $n$ の最大値            | 53 |
| 9.9    | $C_{m,n}$ と $M_n$ の関係                          | 54 |
| 9.9.1  | 基本的な関係                                         | 54 |
| 9.9.2  | $C_{m,n} \leq M_n$                             | 55 |
| 9.9.3  | $M_j$ の単調性から得られる $C_{m,n}$ の不等式                | 56 |
| 9.9.4  | $C_{m,2m-1} \leq C_{m,2m+2}$                   | 56 |
| 9.9.5  | $C_{m,m+1} \leq C_{m,m(m+1)}$                  | 56 |
| 9.10   | $C_{m,r} \leq C_{m,n}$ の一般的な計算                 | 57 |
| 9.10.1 | 今のところ分かっている一般的な結果                              | 58 |
| 9.11   | $C_{m,n} \leq C_{m,r}$                         | 58 |
| 9.11.1 | 特別な場合: $C_{m,n} \leq C_{m,m+1}$                | 58 |

|        |                                              |    |
|--------|----------------------------------------------|----|
| 9.11.2 | 特別な場合: $C_{m,n} \leq C_{m,m+1}$ となる $n$ の最大値 | 59 |
| 9.11.3 | 一般的な計算                                       | 59 |
| 9.12   | $C_{m,n} \leq C_{r,n}$ の一般的な計算               | 59 |
| 9.13   | $C_{v,sv} \leq C_{w,tw}$                     | 61 |
| 9.13.1 | 決着                                           | 63 |
| 9.13.2 | $v = w$ の場合                                  | 64 |
| 9.13.3 | $v + w = tw$ の場合                             | 65 |
| 9.13.4 | $v + w = sv$ の場合                             | 66 |
| 9.14   | $C_{m,n}$ ( $m$ 一定): 最終的な結論                  | 67 |
| 9.15   | $C_{m,n}$ ( $n$ 一定): 最終的な結論                  | 67 |
| 9.16   | 最終的な結論                                       | 68 |

### 第 III 部 Generalized Muirhead Means

70

#### 10 2 変数再考 多変数化へ向けて

70

|        |                                                           |    |
|--------|-----------------------------------------------------------|----|
| 10.0.1 | $a + b = v + w$ の場合                                       | 71 |
| 10.1   | 1 変数化による計算再検討                                             | 71 |
| 10.1.1 | 極限值                                                       | 71 |
| 10.1.2 | 1 階微分                                                     | 72 |
| 10.1.3 | 微分が消える点                                                   | 72 |
| 10.2   | Hessian による判定へ向けて                                         | 74 |
| 10.2.1 | 偏微分の計算                                                    | 74 |
| 10.2.2 | Hessian                                                   | 80 |
| 10.2.3 | Hessian が消える点の現地調査 その 1 $F(x + tm, y + tn)$               | 81 |
| 10.2.4 | Hessian が消える点の現地調査 その 2 $F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ | 84 |
| 10.2.5 | Hessian が消える点の現地調査 その 3 $F(x, \frac{1}{x})$               | 85 |

#### 11 3 変数巡回平均不等式試論

86

|        |                                               |    |
|--------|-----------------------------------------------|----|
| 11.1   | 最初の具体例 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,5,0}$   | 86 |
| 11.1.1 | 2 変数の微積分への帰着                                  | 86 |
| 11.1.2 | weighted AM-GM                                | 86 |
| 11.2   | $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,3,0}$          | 87 |
| 11.3   | $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,2,0}$ は成り立つのか? | 87 |
| 11.3.1 | 2 変数の微積分への帰着                                  | 87 |
| 11.3.2 | weighted AM-GM                                | 88 |

|                                                                                               |            |                                                  |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------|------------|
| 11.3.3 部分的に weighted AM-GM を使う . . . . .                                                      | 88         | <b>15</b> Conical hull . . . . .                 | 103        |
| 11.3.4 また別の部分的な適用 . . . . .                                                                   | 89         | 15.1 言葉の定義 . . . . .                             | 104        |
| 11.4 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,1,0}, \quad \Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,0,0}$ . . . . . | 89         | 15.1.1 錐包 . . . . .                              | 104        |
| 11.5 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,n,0} (n \geq 3)$ . . . . .                                | 90         | 15.1.2 双対錐 . . . . .                             | 105        |
| 11.6 $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,0}$ が成立するための 1 つの十分条件 . . . . .                         | 91         | 15.2 Minkowski-Farkas の定理 . . . . .              | 105        |
| 11.6.1 十分条件 . . . . .                                                                         | 91         | <b>16</b> Weighted AM-GM を 2 変数に適用してみる . . . . . | <b>106</b> |
| 11.6.2 付加条件について . . . . .                                                                     | 92         | 16.1 条件について . . . . .                            | 107        |
| 11.7 $\Gamma_{1,1,2n} \not\leq \Gamma_{n+1,n+1,0} (n \geq 2)$ . . . . .                       | 92         | <b>17</b> 有界条件 . . . . .                         | <b>108</b> |
| 11.8 $\Gamma_{1,1,3} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{3,3,0}$ . . . . .                             | 93         |                                                  |            |
| 11.9 $\Gamma_{1,m,0} \not\leq \Gamma_{1,n,0}$ . . . . .                                       | 93         |                                                  |            |
| <b>12</b> $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に AM-GM が適用できる条件 その 1 . . . . .                | <b>93</b>  |                                                  |            |
| 12.1 $b \neq 0$ の場合 . . . . .                                                                 | 94         |                                                  |            |
| 12.2 例外の計算 . . . . .                                                                          | 96         |                                                  |            |
| 12.3 $b = 0$ の場合 . . . . .                                                                    | 96         |                                                  |            |
| 12.4 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に weighted AM-GM を適用できる十分条件 . . . . .               | 97         |                                                  |            |
| 12.5 $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{2,3,1}$ に weighted AM-GM を適用できる十分条件 . . . . .               | 97         |                                                  |            |
| 12.6 両方同時に適用できる例はないこと . . . . .                                                               | 98         |                                                  |            |
| <b>13</b> $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に AM-GM が適用できる条件 その 2 . . . . .                | <b>98</b>  |                                                  |            |
| 13.1 対称な計算 . . . . .                                                                          | 98         |                                                  |            |
| 13.2 rank $M$ による分類 . . . . .                                                                 | 99         |                                                  |            |
| 13.2.1 rank $M = 0$ の場合 . . . . .                                                             | 99         |                                                  |            |
| 13.2.2 rank $M = 1$ の場合 . . . . .                                                             | 100        |                                                  |            |
| 13.2.3 rank $M = 2$ の場合 . . . . .                                                             | 100        |                                                  |            |
| 13.3 $a, b, c$ による分類 . . . . .                                                                | 100        |                                                  |            |
| 13.3.1 $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ の場合 . . . . .                                              | 100        |                                                  |            |
| 13.3.2 $b = 0, c \neq 0, a \neq 0$ の場合、 $c = 0, a \neq 0, b \neq 0$ の場合 . . . . .             | 101        |                                                  |            |
| 13.3.3 $a = b = 0, c \neq 0$ の場合 . . . . .                                                    | 101        |                                                  |            |
| <b>14</b> $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に AM-GM が適用できる条件 その 3 . . . . .                | <b>102</b> |                                                  |            |
| 14.1 逆行列の計算 . . . . .                                                                         | 102        |                                                  |            |
| 14.2 AM-GM 不等式が適用できる場合のまとめ . . . . .                                                          | 103        |                                                  |            |

## 第I部

## 基本的な不等式

## 1 Jensen-Hölder の凸不等式

定理 1.0.1  $f(x)$  が区間  $I$  で連続、 $I$  の内部で  $f''(x) > 0$  ならば、区間  $I$  の任意の  $a, b$  と  $0 < t < 1$  に対して次式が成立し、等号は  $a = b$  のときのみ成り立ちます：

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

【証明】区間内の任意の  $b < a$  と任意の  $0 < t < 1$  に対して、平均値の定理から

$$\begin{aligned} & (1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb) \\ &= (1-t)\{f(a) - f((1-t)a + tb)\} + t\{f(b) - f((1-t)a + tb)\} \\ &= (1-t)\{a - (1-t)a - tb\}f'(v) + t\{b - (1-t)a - tb\}f'(w) \end{aligned}$$

となる  $v$  が  $a$  と  $(1-t)a + tb$  の間に、 $w$  が  $b$  と  $(1-t)a + tb$  の間に存在し、

$$(1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb) = (1-t)t(a-b)\{f'(v) - f'(w)\}$$

となりますが、 $w < (1-t)a + tb < v$  である事と、区間  $I$  の内部で  $f''(x) > 0$  であれば、 $f'(x)$  が狭義単調増加であることから、

$$(1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb) > 0$$

となります。 $a = b$  のときに等号が成立するのは自明です。  $\square$

$f(x)$  が  $f''(x) > 0$  を満たしているならば、3項の場合も同様に、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) &= f\left(\frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}c\right) \\ &\leq \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(c) \\ &\leq \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right\} + \frac{1}{3}f(c) = \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \end{aligned}$$

が成り立っており、一般に次の事実が得られます（帰納法で証明出来る筈です）：

定理 1.0.2 [ Jensen-Hölder の凸不等式 ]  $f''(x) > 0$  であれば、任意の  $a_1, \dots, a_n$  に対して

$$f\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n}$$

であり等号は  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみ成立します。

$a_j > 0$  と仮定し、 $f(x) = -\log x$  を考えれば次の AM-GM 不等式が得られます。

## 2 AM-GM 不等式

定理 2.0.1 [ AM-GM 不等式 ]  $a_1, \dots, a_n$  がすべて正の実数であるとき

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

であり、等号は  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみ成り立ちます。

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$  は算術平均 (arithmetic mean = AM)、 $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$  は幾何平均 (geometric mean = GM) と呼ばれます。

また、次の一般化も同様です：

定理 2.0.2 [ Weighted AM-GM 不等式 ]  $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  がすべて正の実数であるとき、

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \geq \sqrt[\lambda_1 + \dots + \lambda_n]{a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}}$$

であり、等号は  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみ成り立ちます。

### 3 並べ替え不等式

#### 3.1 一般の並べ替え不等式

定理 3.1.1 [ Rearrangement 不等式 ]  $a_1 \leq \dots \leq a_n, A_1 \leq \dots \leq A_n$  であるような実数列  $\{a_j\}, \{A_j\}$  と  $\{1, \dots, n\}$  の任意の並べ替え  $\{j_1, \dots, j_n\}$  に対して、

$$a_1 A_n + \dots + a_n A_1 \leq a_1 A_{j_i} + \dots + a_n A_{j_n} \leq a_1 A_1 + \dots + a_n A_n$$

であり、もしも  $a_1 < \dots < a_n, A_1 < \dots < A_n$  であれば、等号は右辺、左辺のような並べ替えの場合に限ります。

非常に重要な不等式であり、ここから様々な他の不等式が導かれる源泉ではありますが、一般の場合についてはここでは証明しません。

#### 3.2 全ての並べ替えとの内積

特に  $a_j = A_j$  である場合は、内積を使って簡単に証明することが出来ます。

一般に、

$$|a||b| - a \cdot b = |a||b|(1 - \cos \theta) \geq 0$$

が成り立っており、等号は2つのベクトルが平行で同じ向きの場合にのみ成立します。これと、ベクトルの大きさは成分を並べ替えても変化しないことを組み合わせると次の補題が成立します：

補題 3.2.1 任意の  $n$  次元ベクトル  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  に対して

$$n!(a_1^2 + \dots + a_n^2) - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} \right\}}_{a_1, \dots, a_n \text{ のすべての並べ替え}} \geq 0$$

であり、等号は  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみ成り立ちます。

【証明の概略】  $a_1, \dots, a_n$  の並べ替えは全部で  $n!$  個あり、その1つ1つに対して、例えば  $n = 4$  のときに

$$0 \leq \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{pmatrix} \right| - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{pmatrix} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

が成り立つのと全く同様のことが成立していますから、これを全部足したものを考えれば題意の不等式が得られます。

等号は、1つ1つの大きさの積から内積を引いたものがすべて0のときにのみ成立しており、それは  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみです。

例えば、 $a_1$  と  $a_4$  だけが入れ替わった場合を見れば差が0になる条件として  $a_1 = a_4$  が出て来ます。

$$0 = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} a_4 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \right| - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_4 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_4^2 - 2a_1 a_4 \Leftrightarrow a_1 = a_4$$

従って全てを見ていけば同様に  $a_1 = a_j$  が全て出て来ます（必要性）。十分性は自明です。

□

この補題を変形すれば次の定理が得られます：

定理 3.2.2 [ 並べ替え内積不等式 ] 任意の実数  $a_1, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) に対して

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \geq \frac{2n}{n-1} \underbrace{(a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n)}_{\text{すべての組み合わせ } \binom{n}{2} \text{ 個}}$$

であり、等号は  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみ成り立ちます。

【証明】補題 3.2.1 によれば任意の実数  $a_1, \dots, a_n$  に対して

$$n!(a_1^2 + \dots + a_n^2) - \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} \right\}}_{a_1, \dots, a_n \text{ のすべての並べ替え}} \geq 0$$

が成り立っていますが、左辺第 2 項の全ての並べ替えの和を詳しく見ると、第  $j$  成分が  $a_k$  であるような並べ替えは  $(n-1)!$  個ずつありますから

$$n!(a_1^2 + \dots + a_n^2) - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (n-1)!a_1 + \dots + (n-1)!a_n \\ \vdots \\ (n-1)!a_1 + \dots + (n-1)!a_n \end{pmatrix} \geq 0$$

となっています。更に変形すると

$$n!(a_1^2 + \dots + a_n^2) - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (n-1)!(a_1 + \dots + a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$n!(a_1^2 + \dots + a_n^2) - (n-1)!(a_1 + \dots + a_n)^2 \geq 0$$

ですが、

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = (a_1 + \dots + a_n)^2 - 2 \underbrace{(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n)}_{\text{すべての組み合わせ } \binom{n}{2} \text{ 個}}$$

に注意すれば

$$n! \{ (a_1 + \dots + a_n)^2 - 2(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n) \} - (n-1)!(a_1 + \dots + a_n)^2 \geq 0$$

$$(n-1)(a_1 + \dots + a_n)^2 - 2n(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n) \geq 0$$

が得られます。これは変形のみですから、等号成立条件は変わらず  $a_1 = \dots = a_n$  です。□

一般に

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 - 2(a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n) = a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$$

は明らかに成り立っていますが、今見た並べ替え内積不等式は、実は 2 よりも少し大きい  $\frac{2n}{n-1}$  倍を引いても不等式が成立することを言ってくれています。ちなみにこの『並べ替え内積不等式』という呼び名は、本稿独自のものであり、一般には通用しませんので悪しからず（一般には『Maclaurin の不等式の特別な場合』もしくは『再配列不等式』からの派生）。

## 4 Maclaurin の不等式

### 4.1 方程式の解に関する基本事項

補題 4.1.1 2 次以上の方程式  $f(x) = 0$  の解がすべて実数であるとき、 $f'(x) = 0$  の解もすべて実数であり、その解は  $f(x) = 0$  の隣り合う相異なる解の間に 1 つずつと、 $f(x) = 0$  の  $k+1$  重根 ( $k \geq 1$ ) のところに  $k$  個あって、特に全体は  $f(x) = 0$  の最小解と最大解の間にあります。

【証明】 $m$  次方程式  $f(x) = 0$  の解を、重複を許して  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$  とします。

【 $a_j < a_{j+1}$  のとき】このとき、平均値の定理により、 $f'(b_j) = 0$  となる  $b_j$  が  $a_j < b_j < a_{j+1}$  の範囲に存在します。

【 $a_j = \dots = a_{j+k}$  のとき】このとき  $f(x) = (x - a_j)^{k+1}g(x)$  と書けており、 $f'(x) = (x - a_j)^k h(x)$  と書けることになるので、 $a_j$  と  $a_{j+k}$  の間に（従ってこれらと等しい値ですが） $f'(x) = 0$  の解が（重複を許して）少なくとも  $k$  個存在します。

以上から、各  $[a_j, a_{j+1}]$  の中に最低 1 つずつ  $f'(x) = 0$  の解をカウントして合計で  $m-1$  個になりますから、今『最低 1 個』と言ったところは本当に 1 個であったことも分かります。従って  $f'(x) = 0$  の  $m-1$  個の解もすべて実数であり、題意の範囲内にあります。□

補題 4.1.2 3 次以上の方程式  $f(x) = 0$  の解がすべて実数であって、 $f'(x) = 0$  の解がすべて同じ値である場合、 $f(x) = 0$  の解もすべて同じ値です。

【簡潔な証明】 $f'(x) = K(x - \lambda)^{m-1}$  であれば  $m-1 \geq 2$  ですから

$$f(x) = \frac{K}{m}(x - \lambda)^m + C$$

ですが、 $C \neq 0$  の場合は 3 次以上の方程式  $\frac{K}{m}(x - \lambda)^m = -C$  は必ず複素数解をもちます。従って仮定から  $C = 0$  が分かります。

【平均値の定理による別証明】 $f(x) = 0$  は  $m$  次方程式 ( $m \geq 3$ ) であり、 $f'(x) = K(x - \lambda)^{m-1}$  であると仮定します。

平均値の定理によれば、 $f(x) = 0$  の解で  $\lambda$  より大きいものは高々 1 個であり、 $\lambda$  より小さいものも高々 1 個しかありません。従って少なくとも  $x = \lambda$  は  $m - 2$  重解になっています。しかし、 $\lambda$  が  $f(x) = 0$  の解であると、やはり平均値の定理により、 $f(x) = 0$  の解は  $\lambda$  だけであることが分かります。□

補題 4.1.3 2 次以上の方程式  $f(x) = 0$  の解が全て実数であって、 $f'(x) = 0$  が  $x = \lambda$  を  $k$  重根 ( $k \geq 2$ ) にもてば、 $f(x) = 0$  は  $x = \lambda$  を  $k + 1$  重根にもちます。

【証明】  $n + 1$  次方程式  $f(x) = 0$  の解は全て実数であると仮定します。また、 $n$  次方程式  $f'(x) = 0$  は  $x = \lambda$  を重複度  $k$  の重解としてもつと仮定します。

まず補題 4.1.1 によれば  $f(\lambda) = 0$  です ( $f'(x) = 0$  の重解は  $f(x) = 0$  の重解からしか導かれせん)。

また、 $x = \lambda$  を含む小さな开区間  $J$  を、 $J$  内の  $f'(x) = 0$  の解が  $\lambda$  ( $k$  重根) のみであるようにとることが出来ます。

仮に  $f(x) = 0$  の解で  $J$  の外にあるものが  $m$  個あれば、平均値の定理により  $f'(x) = 0$  の  $\lambda$  以外の解も少なくとも  $m$  個ありますから、

$$m \leq n - k$$

でなければならず、従って  $f(x) = 0$  の  $J$  外の解は多くても  $n - k$  個であり、 $J$  内の解は少なくとも  $n + 1 - (n - k) = k + 1$  あります。

これが  $\lambda$  を含む任意の小さな区間  $I \subset J$  に対して言えるので、結局、 $f(x) = 0$  は  $x = \lambda$  を少なくとも  $k + 1$  重解としてもつことが分かります。

しかし、微分計算によれば、 $f(x) = 0$  が  $x = \lambda$  を  $k + 2$  重以上の重解としてもつと、 $f'(x) = 0$  は  $x = \lambda$  を  $k + 1$  重解としてもつことになってしまうので、以上から  $f(x) = 0$  は  $x = \lambda$  をちょうど  $k + 1$  重解としてもつことが示されました。□

## 4.2 基本的な補題

次の補題は、ほぼ AM-GM 不等式そのままですが、全ての Maclaurin 不等式が（微分によって）ここに帰着されると云う意味で重要なので挙げておきます。

補題 4.2.1 1 次以上の方程式  $f(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \cdots + r_1x + r_0$  の解がすべて負の実数であるとき、

$$\frac{r_1}{m} \geq r_0^{\frac{m-1}{m}}$$

であり、等号は  $f(x) = (x + \lambda)^m$  の型の際のみ成り立ちます。

【証明】  $f(x) = 0$  の解を  $-a_1, \dots, -a_m$  ( $a_j > 0$ ) とします。つまり、

$$f(x) = (x + a_1) \cdots (x + a_m)$$

であるとして。すると解と係数の関係から

$$\begin{cases} a_1 \cdots a_m = r_0 \\ \frac{r_0}{a_1} + \cdots + \frac{r_0}{a_m} = r_1 \end{cases}$$

なので、AM-GM 不等式から

$$\frac{r_1}{m} = \frac{\frac{r_0}{a_1} + \cdots + \frac{r_0}{a_m}}{m} \geq \sqrt[m]{\frac{r_0 \cdots r_0}{a_1 \cdots a_m}} = \sqrt[m]{\frac{r_0^m}{r_0}} = \sqrt[m]{r_0^{m-1}}$$

が成り立っており、等号は

$$\frac{r_0}{a_1} = \cdots = \frac{r_0}{a_m}$$

のとき、すなわち、 $a_1 = \cdots = a_m$  のときのみ成り立ちます。□

## 4.3 基本対称式

定義 4.3.1  $n$  個の実数  $a_1, \dots, a_n$  に対して  $(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n)$  を展開したときの：

$$x^n + (a_1 + \cdots + a_n)x^{n-1} + (a_1a_2 + \cdots + a_{n-1}a_n)x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdots a_n$$

$n - j$  次の係数  $\sigma_{n,j}$  を、 $a_1, \dots, a_n$  に対する  $j$  次の基本対称式と言います。

幾つか具体的に書けば

$$\sigma_{2,0} = 1, \quad \sigma_{2,1} = a_1 + a_2, \quad \sigma_{2,2} = a_1 a_2$$

$$\sigma_{3,0} = 1, \quad \sigma_{3,1} = a_1 + a_2 + a_3, \quad \sigma_{3,2} = a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2, \quad \sigma_{3,3} = a_1 a_2 a_3$$

$$\sigma_{4,0} = 1, \quad \sigma_{4,1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \sigma_{4,2} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4,$$

$$\sigma_{4,3} = a_2 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_2 a_3, \quad \sigma_{4,4} = a_1 a_2 a_3 a_4$$

です ( $\sigma_{n,0}$  は常に 1 です)。

$\sigma_{n,j}$  は  $\binom{n}{j}$  個の和になっていますが、 $\sigma_{n,j}$  を  $\binom{n}{j}$  で割ったものを  $P_{n,j} = \frac{\sigma_{n,j}}{\binom{n}{j}}$  と書く

ことにすれば、

$$P_{2,0} = 1, \quad P_{2,1} = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad P_{2,2} = a_1 a_2$$

$$P_{3,0} = 1, \quad P_{3,1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad P_{3,2} = \frac{a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2}{3}, \quad P_{3,3} = a_1 a_2 a_3$$

などとなっています。

#### 4.4 Maclaurin の不等式

定理 4.4.1 [ Maclaurin's inequality, 1729 ] 任意の正の実数  $a_1, \dots, a_n$  に対して、これらから作られる  $j$  次の基本対称式を  $\binom{n}{j}$  で割ったものを  $P_{n,j}$  とするとき、

$$P_{n,1} \geq \sqrt[2]{P_{n,2}} \geq \sqrt[3]{P_{n,3}} \geq \dots \geq \sqrt[n]{P_{n,n}}$$

が成り立ち、どの等号も成立する必要十分条件は  $a_1 = \dots = a_n$  であり、このとき全ての等号が成立します。

【証明】  $f(x) = (x + a_1) \cdots (x + a_n)$  とします。これを展開すると

$$f(x) = x^n + \sigma_{n,1}x^{n-1} + \sigma_{n,2}x^{n-2} + \dots + \sigma_{n,n-1}x + \sigma_{n,n}$$

となっていますので、任意の  $k = 0, 1, \dots, n-2$  に対して

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}\sigma_{n,1}x^{n-k-1} \\ &\quad + \dots + \frac{(k+1)!}{1!}\sigma_{n,n-k-1}x + k!\sigma_{n,n-k} \\ \frac{(n-k)!}{n!}f^{(k)}(x) &= x^{n-k} + \frac{(n-k)!}{n!}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}\sigma_{n,1}x^{n-k-1} \\ &\quad + \dots + \frac{(n-k)!(k+1)!}{n!}\sigma_{n,n-k-1}x + \frac{(n-k)!k!}{n!}\sigma_{n,n-k} \\ &= x^{n-k} + \frac{(n-k)!}{n!}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}\sigma_{n,1}x^{n-k-1} \\ &\quad + \dots + (n-k)\frac{\sigma_{n,n-k-1}}{\binom{n}{n-k-1}}x + \frac{\sigma_{n,n-k}}{\binom{n}{n-k}} \\ &= x^{n-k} + \dots + (n-k)P_{n,n-k-1}x + P_{n,n-k} \end{aligned}$$

であって、補題 4.1.1 によれば  $f^{(k)}(x) = 0$  の  $n-k$  個の解もすべて負の実数です。

すると今度は補題 4.2.1 により

$$\begin{aligned} {}^{n-k-1}\sqrt{\frac{(n-k)P_{n,n-k-1}}{n-k}} &\geq {}^{n-k}\sqrt{P_{n,n-k}} \\ {}^{n-k-1}\sqrt{P_{n,n-k-1}} &\geq {}^{n-k}\sqrt{P_{n,n-k}} \end{aligned}$$

が分かります。

等号の成立条件は、補題 4.2.1 のそれであり、 $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-\lambda)^{n-k}$  の形であるときのみです。

このとき  $k \leq n-2$  によれば  $2 \leq n-k$  ですから補題 4.1.2 から  $f^{(k-1)}(x) = 0$  の解は  $x = \lambda$  が  $n-k+1$  重根のみであることが分かります。

同様の議論を繰り返せば、結局、 $f(x) = (x-\lambda)^n$  の形であることが分かり、(また、十分性は自明なので) 従って等号が成立するのは  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみです。  $\square$

ちなみに、 $k = n-1$  の場合は  $\sqrt[n]{P_{n,0}}$  をどう考えるかという問題があります。これを回避して

$$P_{n,0}^1 \geq P_{n,1}^0$$

の形にすれば、これは明らかに成り立っています。

## 5 Newton の不等式

### 5.1 例

例えば  $n = 2$  の時には

$$P_{2,0} = 1, \quad P_{2,1} = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad P_{2,2} = a_1 a_2$$

ですから、

$$(P_{2,1})^2 - P_{2,0}P_{2,2} = \frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2 - a_1 a_2 = \frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

であって、等号は  $a_1 = a_2$  のときのみ成立しています。

また、 $n = 3$  のときは

$$P_{3,0} = 1, \quad P_{3,1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad P_{3,2} = \frac{a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2}{3}, \quad P_{3,3} = a_1 a_2 a_3$$

ですから、

$$\begin{aligned} (P_{3,1})^2 - P_{3,0}P_{3,2} &= \frac{1}{9} \{ (a_1 + a_2 + a_3)^2 - 3(a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2) \} \\ &= \frac{1}{9} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 - a_1 a_3 - a_1 a_2) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \right| - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であり、最後の不等号は2つのベクトルが平行である場合、すなわち  $a_1 = a_2 = a_3$  である場合にのみ等号が成り立っています。また少し難しいですが

$$\begin{aligned} (P_{3,2})^2 - P_{3,1}P_{3,3} &= \frac{1}{9} \{ (a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2)^2 - 3(a_1 + a_2 + a_3)a_1 a_2 a_3 \} \\ &= \frac{1}{9} \{ (a_2 a_3)^2 + (a_1 a_3)^2 + (a_1 a_2)^2 - a_1^2 a_2 a_3 - a_1 a_2^2 a_3 - a_1 a_2 a_3^2 \} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

も同様に成り立っている事が分かります（等号成立条件も同じ）。一般に次の定理が成立します：

**定理 5.1.1** [ Newton's inequalities, 1707 ] 任意の実数  $a_1, \dots, a_n$  に対して、これらから作られる  $j$  次の基本対称式を  $\binom{n}{j}$  で割ったものを  $P_{n,j}$  とするとき、

$$(P_{n,j})^2 \geq P_{n,j-1}P_{n,j+1}$$

が成り立ち、 $a_1, \dots, a_n \neq 0$  の場合は等号は  $a_1 = \dots = a_n$  のときのみ成立します。

証明は以下順を追って説明します。

### 5.2 基本的な補題

次の補題の主張自体は Maclaurin の不等式の特別な場合に過ぎませんが、その特別な場合自体が並べ替え内積不等式によって証明できており、また、全ての Newton 不等式が微分操作によってこの補題に帰着されると言う意味で重要なのでまずこれを見ておきましょう。

**補題 5.2.1** 2 次以上の方程式  $f(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$  の解がすべて実数であるとき、

$$r_1^2 \geq \frac{2m}{m-1} r_2 r_0$$

であり、 $f(0) \neq 0$  であれば等号は  $f(x) = (x + \lambda)^m$  の型のときのみ成り立ちます。

【証明】

【 $f(0) \neq 0$  のとき】  $f(x) = 0$  の解を  $-b_1, \dots, -b_m \neq 0$  とすると、解と係数の関係から

$$\begin{cases} b_1 \cdots b_m = r_0 \\ \frac{b_1 \cdots b_m}{b_1} + \dots + \frac{b_1 \cdots b_m}{b_m} = r_1 \\ \underbrace{\frac{b_1 \cdots b_m}{b_1 b_2} + \dots + \frac{b_1 \cdots b_m}{b_{m-1} b_m}}_{\text{すべての組み合わせ } \binom{n}{2} \text{ 個}} = r_2 \end{cases}$$

であり、

$$\begin{cases} \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_m} = \frac{r_1}{r_0} \\ \frac{1}{b_1 b_2} + \dots + \frac{1}{b_{m-1} b_m} = \frac{r_2}{r_0} \end{cases}$$

が成り立っています。ここで  $a_j = \frac{1}{b_j}$  と置けばこれは

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_m = \frac{r_1}{r_0} \\ a_1 a_2 + \cdots + a_{m-1} a_m = \frac{r_2}{r_0} \end{cases}$$

と書けますから、並べ替え内積不等式から

$$\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 \geq \frac{2m}{m-1} \frac{r_2}{r_0} \quad \text{すなわち} \quad r_1^2 \geq \frac{2m}{m-1} r_2 r_0$$

を得ます。等号成立条件は  $a_1 = \cdots = a_m$ 、すなわち、 $b_1 = \cdots = b_m$  ですから、これは  $f(x)$  が  $(x + \lambda)^m$  の型のときのみです。

【 $f(0) = 0$  のとき】左辺は自乗であり、右辺は 0 ですから、不等式は明らかに成り立ちます。  $\square$

### 5.3 Newton の不等式の証明

$f(x) = (x + a_1) \cdots (x + a_n)$  とします。これを展開すると

$$f(x) = x^n + \sigma_{n,1} x^{n-1} + \sigma_{n,2} x^{n-2} + \cdots + \sigma_{n,n-1} x + \sigma_{n,n}$$

となっていますので、任意の  $k = 0, 1, \dots, n-2$  に対して

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \sigma_{n,1} x^{n-k-1} + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{(k+2)!}{2!} \sigma_{n,n-k-2} x^2 + \frac{(k+1)!}{1!} \sigma_{n,n-k-1} x + k! \sigma_{n,n-k} \\ \frac{(n-k)!}{n!} f^{(k)}(x) &= x^{n-k} + \frac{(n-k)!}{n!} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \sigma_{n,1} x^{n-k-1} + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)!(k+2)!}{2! n!} \sigma_{n,n-k-2} x^2 \\ &\quad + \frac{(n-k)!(k+1)!}{n!} \sigma_{n,n-k-1} x + \frac{(n-k)!k!}{n!} \sigma_{n,n-k} \\ &= x^{n-k} + \cdots + \binom{n-k}{2} \frac{\sigma_{n,n-k-2}}{\binom{n}{n-k-2}} x^2 + (n-k) \frac{\sigma_{n,n-k-1}}{\binom{n}{n-k-1}} x + \frac{\sigma_{n,n-k}}{\binom{n}{n-k}} \\ &= x^{n-k} + \cdots + \binom{n-k}{2} P_{n,n-k-2} x^2 + (n-k) P_{n,n-k-1} x + P_{n,n-k} \end{aligned}$$

であって、 $k = n-j-1, (k = 0, 1, \dots, n-2)$  とすれば

$$\frac{(j+1)!}{n!} f^{(n-j-1)}(x) = x^{j+1} + \cdots + \binom{j+1}{2} P_{n,j-1} x^2 + (j+1) P_{n,j} x + P_{n,j+1}$$

が分かります。

$f(x) = 0$  の解は全て実数でしたから、その微分である  $F(x) = \frac{(j+1)!}{n!} f^{(n-j-1)}(x)$  の解も全て実数です。

すると  $k \leq n-2$  のとき  $F(x)$  は 2 次以上であって、補題 5.2.1 から

$$\{(j+1)P_{n,j}\}^2 \geq \frac{2(j+1)}{j} \binom{j+1}{2} P_{n,j-1} P_{n,j+1}$$

すなわち

$$(P_{n,j})^2 \geq P_{n,j-1} P_{n,j+1} \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

が得られ、 $a_1, \dots, a_n$  がすべて 0 でない場合は等号成立条件は  $a_1 = \cdots = a_n$  となります。  $\square$

## 6 Maclaurin の不等式と Newton の不等式の関係

### 6.1 Newton $\Rightarrow$ Maclaurin

今見た Newton の不等式を例えば  $n = 3$  の時に全て並べてみると

$$(P_{3,2})^2 \geq P_{3,1} P_{3,3} \quad (6.1)$$

$$(P_{3,1})^2 \geq P_{3,0} P_{3,2} = P_{3,2} \quad (6.2)$$

であり、(6.1) の両辺を自乗し (6.2) を代入すれば

$$(P_{3,2})^4 \geq (P_{3,1})^2 (P_{3,3})^2 \geq P_{3,2} (P_{3,3})^2$$

から  $(P_{3,2})^3 \geq (P_{3,3})^2$  が分かり、(6.2) を変形したものと合わせれば

$$P_{3,1} \geq (P_{3,2})^{\frac{1}{2}} \geq (P_{3,3})^{\frac{1}{3}}$$

が得られます。構成の仕方から明らかに等号は  $a_1 = a_2 = a_3$  のときのみ成立しています。これは具体的に書くと

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt{\frac{a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_1 a_2}{3}} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

であって、両端は算術平均と幾何平均の関係式になっています。

$n = 4$  の場合も

$$(P_{4,3})^2 \geq P_{4,2} P_{4,4} \quad (6.3)$$

$$(P_{4,2})^2 \geq P_{4,1} P_{4,3} \quad (6.4)$$

$$(P_{4,1})^2 \geq P_{4,0} P_{4,2} = P_{4,2} \quad (6.5)$$

においてまず (6.5) から  $P_{4,1} \geq \sqrt{P_{4,2}}$  であり、これを (6.4) に代入して  $\sqrt{P_{4,2}} \geq \sqrt[3]{P_{4,3}}$ 、更にこれを (6.3) に代入して  $\sqrt[3]{P_{4,3}} \geq \sqrt[4]{P_{4,4}}$  が得られますから合わせて

$$P_{4,1} \geq \sqrt{P_{4,2}} \geq \sqrt[3]{P_{4,3}} \geq \sqrt[4]{P_{4,4}}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &\geq \sqrt{\frac{a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4}{6}} \\ &\geq \sqrt[3]{\frac{a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4}{4}} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \end{aligned}$$

が得られます (等号は  $a_1 = \dots = a_4$  のときのみ成立)。

一般にはどうでしょうか。

## 6.2 Newton $\Leftarrow$ Maclaurin

Newton の不等式を証明するときに使った並べ替え内積不等式は Maclaurin の不等式の特別な場合ですから、そう言う意味では既に Maclaurin の不等式から Newton の不等式が得られているとも言えます。

しかしもっと直接的に導くことは出来ないでしょうか？

## 第 II 部

# Power Mean Inequalities

## 7 2 変数 power mean inequalities

**事実 7.0.1** 任意の正数  $a, b > 0$  と正の整数  $n$  に対して指数  $n$  の power mean  $M_n$  を次で定義します：

$$M_n = M_n(a, b) = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

### 7.1 基本的な計算

**事実 7.1.1** 任意の正の整数  $n$  に対して

$$M_1 \leq M_n$$

であり、等号は  $a = b$  のときのみ成立します。

$$\begin{aligned} M_1 \leq M_n &\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \\ &\Leftrightarrow 2(a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n) \\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + 1\right)^n \leq 2^n \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 \right\} \end{aligned}$$

なので、

$$A_n(x) = 2^n(x^n + 1) - 2(x+1)^n$$

と置いて  $x > 0$  で  $A_n(x) \geq 0$  であることを示します。

$$A'_n(x) = 2^n \cdot nx^{n-1} - 2n(x+1)^{n-1} = 2n \{ (2x)^{n-1} - (x+1)^{n-1} \}$$

なので、 $x > 0$  では  $A'_n(x) = 0$  となるのは  $2x = x + 1$  となるとき、すなわち、 $x = 1$  の時のみです。

|           |           |            |   |            |
|-----------|-----------|------------|---|------------|
| $x$       | 0         | ...        | 1 | ...        |
| $A_n(x)$  | $2^n - 2$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |
| $A'_n(x)$ | $-2n$     | -          | 0 | +          |

増減表によれば、 $x > 0$  では  $A_n(x) \geq 0$  であり、等号は  $x = 1$  のときにのみ成立します。

以上から題意の事実が成立し、等号は  $a = b$  のときにのみ成立します。□

予想 7.1.2  $M_2 \leq M_3$

$$\begin{aligned}
 M_2 \leq M_3 &\Leftrightarrow \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^3 \leq 2(a^3 + b^3)^2 \\
 &\Leftrightarrow \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1\right\}^3 \leq 2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 1\right\}^2
 \end{aligned}$$

なので、

$$B(x) = 2(x^3 + 1)^2 - (x^2 + 1)^3$$

と置いて  $x > 0$  で  $B(x) \geq 0$  を示したいわけです。

$$\begin{aligned}
 B'(x) &= 4(x^3 + 1) \cdot 3x^2 - 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x \\
 &= 6x\{2x(x^3 + 1) - (x^2 + 1)^2\} \\
 &= 6x(x^4 - 2x^2 + 2x - 1) \\
 &= 6x(x - 1)(x^3 + x^2 - x + 1)
 \end{aligned}$$

ですが、ここで  $C(x) = x^3 + x^2 - x + 1$  と置けば、

$$C'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1)$$

であって

|         |    |            |                 |            |
|---------|----|------------|-----------------|------------|
| $x$     | 0  | ...        | $\frac{1}{3}$   | ...        |
| $C(x)$  | 1  | $\searrow$ | $\frac{22}{27}$ | $\nearrow$ |
| $C'(x)$ | -1 | -          | 0               | +          |

によれば  $x > 0$  では  $C(x) > 0$  なので  $B(x)$  の増減表は

|         |   |            |   |            |
|---------|---|------------|---|------------|
| $x$     | 0 | ...        | 1 | ...        |
| $B(x)$  | 1 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |
| $B'(x)$ | 0 | -          | 0 | +          |

となり、 $x > 0$  では  $B(x) \geq 0$  であることが示されます。従って予想は正しいことが分かります。等号は  $a = b$  のときにのみ成立します。

事実 7.1.3  $M_2 \leq M_3$  であり、等号は  $a = b$  のときにのみ成立します。

一般に  $M_n \leq M_{n+1}$  となっているのではないかと予想され、実際正しいことが分かります。

事実 7.1.4 任意の正の整数  $n$  に対して

$$M_n \leq M_{n+1}$$

であり、等号は  $a = b$  のときにのみ成立します。

$$\begin{aligned}
 M_n^n &= \frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n \\
 &= \left(\frac{1}{2}a^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \left(\frac{1}{2}b^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}
 \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{1}{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{n+1} = 1$$

であることと Hölder の不等式により

$$M_n^n \leq \left(\frac{1}{2}a^{n+1} + \frac{1}{2}b^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} = M_{n+1}^n$$

ですから、

$$M_n \leq M_{n+1}$$

が分かります。等号成立条件は  $a = b$  となります。□

定理 7.1.5 [ Hölder's inequality ]  $a_j, b_j, p, q > 0$  であって  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  であるとき、

$$\sum_j a_j b_j \leq \left( \sum_j a_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_j b_j^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

であり、等号はベクトル  $(a_j), (b_j)$  が平行なときのみ成立します。

## 7.2 多項式の性質へ

今見たように、Hölder の不等式によって  $M_n \leq M_{n+1}$  であることは証明されました。これを別の、元々の見方から見ると、

$$\begin{aligned} M_n \leq M_{n+1} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^n + b^n}{2} \right)^{n+1} \leq \left( \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2} \right)^n \\ &\Leftrightarrow (a^n + b^n)^{n+1} \leq 2(a^{n+1} + b^{n+1})^n \\ &\Leftrightarrow \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^n + 1 \right\}^{n+1} \leq 2 \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^{n+1} + 1 \right\}^n \end{aligned}$$

ですから

$$B_n(x) = 2(x^{n+1} + 1)^n - (x^n + 1)^{n+1}$$

と置けば、 $x > 0$  では  $B_n(x) \geq 0$  が成り立っていることが分かります。

$n = 2$  の場合はさっき具体的に見ましたが、結局は

$$B_2(x) = x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0 \quad (x > 0)$$

だったと云うことです。

明らかに  $B_n(1) = 0$  である上に、

$$\begin{aligned} B'_n(x) &= 2n(x^{n+1} + 1)^{n-1} \cdot (n+1)x^n - (n+1)(x^n + 1)^n \cdot nx^{n-1} \\ &= n(n+1)x^{n-1} \{ 2x(x^{n+1} + 1)^{n-1} - (x^n + 1)^n \} \\ B'_n(1) &= 0 \end{aligned}$$

でもありますから、 $B_n(x)$  は  $(x-1)^2$  で割り切れるはずです。実際、

$$B_2(x) = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1)$$

ですし、

$$\begin{aligned} B_3(x) &= x^{12} - 4x^9 + 6x^8 - 6x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 1 \\ &= (x-1)^2(x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + 3x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 3x^2 + 2x + 1) \\ B_4(x) &= x^{20} - 5x^{16} + 8x^{15} - 10x^{12} + 12x^{10} - 10x^8 + 8x^5 - 5x^4 + 1 \\ &= (x-1)^2(x^{18} + 2x^{17} + 3x^{16} + 4x^{15} + 4x^{13} + 8x^{12} + 12x^{11} \\ &\quad + 6x^{10} + 6x^8 + 12x^7 + 8x^6 + 4x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) \\ B_5(x) &= x^{30} - 6x^{25} + 10x^{24} - 15x^{20} + 20x^{18} - 20x^{15} + 20x^{12} - 15x^{10} + 10x^6 - 6x^5 + 1 \\ &= (x-1)^2(x^{28} + 2x^{27} + 3x^{26} + \cdots) \end{aligned}$$

などとなっています。

ここで注意すべきなのは、 $n$  が偶数の場合は  $B_n(x)$  は  $x < 0$  において負の値もとる(らしい)と云うことです。 $n$  が奇数の場合はそうはならず、任意の  $x$  で  $B_n(x) \geq 0$  となっているようです。いずれにせよ、 $x > 0$  においては、任意の  $n$  で  $M_n(x) \geq 0$  です。

どうやら  $B_n(x)$  を  $(x-1)^2$  で割った商は係数が全て正になっているようですが、証明したわけではありません。

また、 $B_n(0) \neq 0$  であることと

$$\begin{aligned} B_n\left(\frac{1}{x}\right) &= 2\left\{x^{-(n+1)} + 1\right\}^n - (x^{-n} + 1)^{n+1} \\ &= x^{-n(n+1)} \{ 2(x^{n+1} + 1)^n - (x^n + 1)^{n+1} \} \\ &= x^{-n(n+1)} M_n(x) \end{aligned}$$

によれば、

$$B_n(\alpha) = 0 \iff B_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

であり、 $n$  が偶数の場合には  $x = 1$  以外に 2 つの実数解がありそうな雰囲気です。

例えば  $n = 2$  の場合は

$$B_2(x) = (x-1)^2(x^2 + \{1 + \sqrt{3}\}x + 1)(x^2 + \{1 - \sqrt{3}\}x + 1)$$

と因数分解され、解と係数の関係から  $x^2 + \{1 + \sqrt{3}\}x + 1 = 0$  の 2 つの実数解は互いに逆数の関係にあります。

## 8 2変数巡回型 power mean inequalities

### 8.1 定義と試算

定義 8.1.1 任意の正数  $a, b > 0$  と正の整数  $n$  に対して巡回型の power mean  $C_n$  を次で定義します：

$$C_n = C_n(a, b) = \sqrt[n]{\frac{a^{n-1}b + ab^{n-1}}{2}}$$

$$C_1 = \frac{a+b}{2}, \quad C_2 = \sqrt{ab}$$

ですから、AM-GM 不等式により  $C_1 \geq C_2$  ですが、

$$C_3 = \sqrt[3]{\frac{a^2b + ab^2}{2}} = \sqrt[3]{ab \frac{a+b}{2}} \geq \sqrt[3]{ab \sqrt{ab}} = \sqrt{ab} = C_2$$

であり、一般に

$$C_n \geq \sqrt[n]{\sqrt{a^n b^n}} = \sqrt{ab} = C_2$$

となっています。また、

$$\begin{aligned} C_4^{12} - C_3^{12} &= \left( \frac{a^3b + ab^3}{2} \right)^3 - \left( \frac{a^2b + ab^2}{2} \right)^4 \\ &= \frac{a^3b^3}{2^4} \{ 2(a^2 + b^2)^3 - ab(a+b)^4 \} \\ &\geq \frac{a^3b^3}{2^4} \{ 2(a^2 + b^2)^2 2ab - ab(a+b)^4 \} \\ &= \frac{a^4b^4}{2^4} \{ 4(a^2 + b^2)^2 - (a+b)^4 \} \end{aligned}$$

ですが、

$$4(a^2 + b^2)^2 - (a+b)^4 = 3a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 + 3b^4 = (a-b)^2(3a^2 + 2ab + 3b^2) \geq 0$$

なので結局

$$C_4 \geq C_3$$

が分かります。 $\{C_n\}$  は  $n \geq 2$  で単調増加なのでしょう？

### 8.2 $C_n$ の単調性 最初の試み

予想 8.2.1 任意の正数  $a, b > 0$  と 2 以上の整数  $n$  に対して

$$C_n = \sqrt[n]{\frac{a^{n-1}b + ab^{n-1}}{2}}$$

と定義すると、 $n$  に関して単調増加である。

$$\begin{aligned} C_{n+2} \geq C_{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt[n+2]{\frac{a^{n+1}b + ab^{n+1}}{2}} \geq \sqrt[n+1]{\frac{a^nb + ab^n}{2}} \\ \left( \frac{a^{n+1}b + ab^{n+1}}{2} \right)^{n+1} &\geq \left( \frac{a^nb + ab^n}{2} \right)^{n+2} \\ 2(a^{n+1}b + ab^{n+1})^{n+1} &\geq (a^nb + ab^n)^{n+2} \\ 2 \left( \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{a}{b} \right)^{n+1} &\geq \left( \frac{a^n}{b^n} + \frac{a}{b} \right)^{n+2} \end{aligned}$$

ここで  $\frac{a}{b} = x$  と置けば

$$\begin{aligned} 2(x^{n+1} + x)^{n+1} &\geq (x^n + x)^{n+2} \\ 2x^{n+1}(x^n + 1)^{n+1} &\geq x^{n+2}(x^{n-1} + 1)^{n+2} \\ 2(x^n + 1)^{n+1} &\geq x(x^{n-1} + 1)^{n+2} \end{aligned}$$

ですから

$$L_n(x) = 2(x^n + 1)^{n+1} - x(x^{n-1} + 1)^{n+2}$$

と置いて、 $L_n(x)$  が非負であることを示せば良いことになります。

事実 8.2.2

$$C_{n+1} \leq C_{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad L_n(x) \geq 0 \quad (x > 0)$$

問題 8.2.3 任意の正の整数  $n$  と任意の（正の）実数  $x$  に対して次を示せ：

$$L_n(x) = 2(x^n + 1)^{n+1} - x(x^{n-1} + 1)^{n+2} \geq 0.$$

8.2.1  $x = 1$  を重根にもつこと

$$L_n(1) = 2^{n+2} - 2^{n+2} = 0$$

$$\begin{aligned} L'_n(x) &= 2(n+1)(x^n + 1)^n n x^{n-1} \\ &\quad - (x^{n-1} + 1)^{n+2} - x(n+2)(x^{n-1} + 1)^{n+1}(n-1)x^{n-2} \\ &= 2n(n+1)(x^n + 1)^n x^{n-1} \\ &\quad - (x^{n-1} + 1)^{n+2} - (n-1)(n+2)(x^{n-1} + 1)^{n+1} x^{n-1} \end{aligned}$$

$$L'_n(1) = n(n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} - (n-1)(n+2)2^{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned} L''_n(x) &= 2n^3(n+1)(x^n + 1)^{n-1} x^{2(n-1)} + 2n(n+1)(n-1)(x^n + 1)^n x^{n-2} \\ &\quad - (n+2)(n-1)(x^{n-1} + 1)^{n+1} x^{n-2} \\ &\quad - (n-1)^2(n+2)(n+1)(x^{n-1} + 1)^n x^{2n-3} \\ &\quad - (n-1)^2(n+2)(x^{n-1} + 1)^{n+1} x^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L''_n(1) &= n^3(n+1)2^n + n(n+1)(n-1)2^{n+1} \\ &\quad - (n+2)(n-1)2^{n+1} - (n-1)^2(n+2)(n+1)2^n - (n-1)^2(n+2)2^{n+1} \\ &= \{n^3 - (n-1)^2(n+2)\}(n+1)2^n \\ &\quad + \{n(n+1) - (n+2) - (n-1)(n+2)\}(n-1)2^{n+1} \\ &= (3n-2)(n+1)2^n - n(n-1)2^{n+1} \\ &= (n^2 + 3n - 2)2^n \neq 0 \end{aligned}$$

従って  $L_n(x) = 0$  は  $x = 1$  を重複度 2 の根にもちます。

事実 8.2.4  $L_n(x)$  は  $(x-1)^2$  で割り切れます。

具体的に割り算を実行すると以下の通りです：

$$L_1(x) = 2(x+1)^2 - 8x = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 2(x^2 + 1)^3 - x(x+1)^4 \\ &= 2x^6 - x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-1)^2(2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 2) \\ &= (x-1)^2(x^2 + x + 2)(2x^2 + x + 1) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= 2(x^3 + 1)^4 - 2(x^2 + 1)^5 \\ &= 2x^{12} - x^{11} + 3x^9 - 10x^7 + 12x^6 - 10x^5 + 3x^3 - x + 2 \\ &= (x-1)^2(2x^{10} + 3x^9 + 4x^8 + 8x^7 + 12x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 3x + 2) \\ &\geq 0 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4(x) &= 2(x^4 + 1)^5 - x(x^3 + 1)^6 \\ &= 2x^{20} - x^{19} + 4x^{16} - 15x^{13} + 20x^{12} - 20x^{10} + 20x^8 - 15x^7 + 4x^4 - x + 2 \\ &= (x-1)^2(2x^{18} + 3x^{17} + 4x^{16} + 5x^{15} + 10x^{14} + 15x^{13} \\ &\quad + 20x^{12} + 10x^{11} + 20x^{10} + 30x^9 + 20x^8 + 10x^7 \\ &\quad + 20x^6 + 15x^5 + 10x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2) \\ &\geq 0 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_5(x) &= 2x^{30} - x^{29} + 5x^{25} - 21x^{21} + 30x^{20} - 35x^{17} + 40x^{15} \\ &\quad - 35x^{13} + 30x^{10} - 21x^9 + 5x^5 - x + 2 \\ &= (x-1)^2(2x^{28} + 3x^{27} + 4x^{26} + 5x^{25} + 6x^{24} + 12x^{23} + 18x^{22} \\ &\quad + 24x^{21} + 30x^{20} + 15x^{19} + 30x^{18} + 45x^{17} + 60x^{16} + 40x^{15} \\ &\quad + 20x^{14} + 40x^{13} + 60x^{12} + 45x^{11} + 30x^{10} + 15x^9 + 30x^8 \\ &\quad + 24x^7 + 18x^6 + 12x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2) \\ &\geq 0 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

従ってとりあえず分かっている大小関係は

$$C_2 \leq C_3 \leq C_4 \leq C_5 \leq C_6 \leq C_7$$

です（計算機によるともっと行けそうです）。

事実 8.2.5 任意の正の整数  $n$  に対して

$$C_2 \leq C_n$$

であり、次も分かっています：

$$C_3 \leq C_4 \leq C_5 \leq C_6 \leq C_7.$$

### 8.2.2 商の係数が全て正であること

先ほどの具体的な割り算  $L_n(x)/(x-1)^2$  において商の係数は全て正になっている雰囲気がありました。

予想 8.2.6  $L_n(x)$  を  $(x-1)^2$  で割った商の係数は全て正である。

$$L_n(x) = 2(x^n + 1)^{n+1} - x(x^{n-1} + 1)^{n+2}.$$

$L_n(x)$  の展開式を具体的に書いてみよう。

$$2(x^n + 1)^{n+1} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (x^n)^k \cdot 1^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} 2 \binom{n+1}{k} x^{nk} \quad \dots (A)$$

$$x(x^{n-1} + 1)^{n+2} = x \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} (x^{n-1})^j \cdot 1^{n+2-j} = \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} x^{nj-j+1} \quad \dots (B)$$

であって、展開時のべきの並びは

$$(A) \quad 1, x^n, x^{2n}, x^{3n}, \dots, x^{n(n+1)}$$

$$(B) \quad x, x^n, x^{2n-1}, x^{3n-2}, \dots, x^{n(n+1)-1}$$

となっており、具体的に書くと

$$n = 4$$

$$(A) \quad 1, \boxed{x^4}, x^8, x^{12}, \boxed{x^{16}}, x^{20} \quad \text{公差 } 4$$

$$(B) \quad x, \boxed{x^4}, x^7, x^{10}, x^{13}, \boxed{x^{16}}, x^{19} \quad \text{公差 } 3$$

$$n = 5$$

$$(A) \quad 1, \boxed{x^5}, x^{10}, x^{15}, x^{20}, \boxed{x^{25}}, x^{30} \quad \text{公差 } 5$$

$$(B) \quad x, \boxed{x^5}, x^9, x^{13}, x^{17}, x^{21}, \boxed{x^{25}}, x^{29} \quad \text{公差 } 4$$

$$n = 6$$

$$(A) \quad 1, \boxed{x^6}, x^{12}, x^{18}, x^{24}, x^{30}, \boxed{x^{36}}, x^{42} \quad \text{公差 } 6$$

$$(B) \quad x, \boxed{x^6}, x^{11}, x^{16}, x^{21}, x^{26}, x^{31}, \boxed{x^{36}}, x^{41} \quad \text{公差 } 5$$

$$n = 7$$

$$(A) \quad 1, \boxed{x^7}, x^{14}, x^{21}, x^{28}, x^{35}, x^{42}, \boxed{x^{49}}, x^{56} \quad \text{公差 } 7$$

$$(B) \quad x, \boxed{x^7}, x^{13}, x^{19}, x^{25}, x^{31}, x^{37}, x^{43}, \boxed{x^{49}}, x^{55} \quad \text{公差 } 6$$

$$n = 8$$

$$(A) \quad 1, \boxed{x^8}, x^{16}, x^{24}, x^{32}, x^{40}, x^{48}, x^{56}, \boxed{x^{64}}, x^{72} \quad \text{公差 } 8$$

$$(B) \quad x, \boxed{x^8}, x^{15}, x^{22}, x^{29}, x^{36}, x^{43}, x^{50}, x^{57}, \boxed{x^{64}}, x^{71} \quad \text{公差 } 7$$

一般の場合

$$(A) \quad \text{初項 } 0, \text{ 公差 } n \text{ の等差数列 } \quad nk$$

$$(B) \quad \text{初項 } 1, \text{ 公差 } n-1 \text{ の等差数列 } \quad (n-1)j+1$$

### 問題 8.2.7

$$nk = (n-1)j+1 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n+1, j=0, 1, 2, \dots, n+2)$$

の解  $(k, j)$  を決定せよ。

●  $(k, j) = (1, 1)$  は解である：

$$nk = n, \quad (n-1)j+1 = n-1+1 = n.$$

●  $(k, j) = (n, n+1)$  は解である：

$$nk = n^2, \quad (n-1)j + 1 = (n-1)(n+1) + 1 = n^2.$$

●他に解はない事を示す。

$$nk = (n-1)j + 1$$

$$n(k-j) = 1-j$$

$$n(j-k) = j-1$$

$j=0$  のとき、 $nk=1$  ですから  $n=1, k=1$  のみが解です。しかし  $n=1$  のときは特殊ですから ((B) が1項しかない) 除外して考えた方が良いでしょう。

$n \geq 2$  で考えます。このとき  $j=0$  は解となりません。

$j=1$  のとき、 $j=k$  なので  $(1, 1)$  です。

$j \geq 2$  のとき。  $0 < j-1 \leq n+1$  なので、 $j-1$  が  $n$  の倍数になるのは  $j-1=n$  のときのみです。このときが  $(n, n+1)$  に相当します。

以上から問題は解決されました。

**事実 8.2.8**  $n$  を2以上の整数とすると

$$nk = (n-1)j + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n+1, j = 0, 1, 2, \dots, n+2)$$

となるのは

$$(k, j) = (1, 1), (n, n+1)$$

のときのみである。

$$(A) \quad 1, \boxed{x^n}, x^{2n}, x^{3n}, x^{4n}, \dots, \boxed{x^{n^2}}, x^{n(n+1)} \quad \text{公差 } n$$

$$(B) \quad x, \boxed{x^n}, x^{2n-1}, x^{3n-2}, \dots, \boxed{x^{n^2}}, x^{n(n+1)-1} \quad \text{公差 } n-1$$

$$(A) \quad 2 \cdot 1 \quad 2(n+1)x^n \quad 2\binom{n+1}{2}x^{2n} \quad \dots \quad 2\binom{n+1}{n}x^{n^2} \quad 2\binom{n+1}{n+1}x^{n(n+1)}$$

$$(B) \quad -x \quad -(n+2)x^n \quad -\binom{n+2}{2}x^{2n-1} \quad \dots \quad -\binom{n+2}{n+1}x^{n^2} \quad -\binom{n+2}{n+2}x^{n(n+1)-1}$$

$$\downarrow \\ nx^n$$

$$\downarrow \\ nx^{n^2}$$

共通の項は分かったので、あとは和の順番。

$$0 < 1 < n < 2n-1 < 2n < 3n-2 < 3n < 4n-3 < 4n < 5n-4 < \dots$$

$$\dots < n(n-1) < n^2 - n + 1 < n^2 < n(n+1) - 1 < n(n+1)$$

なので以下の通り：

**事実 8.2.9**

$$\begin{aligned} L_n(x) = & 2 - x + nx^n - \binom{n+2}{2}x^{2n-1} + 2\binom{n+1}{2}x^{2n} \\ & - \binom{n+2}{3}x^{3n-2} + 2\binom{n+1}{3}x^{3n} - \dots \\ & \dots + 2\binom{n+1}{n-1}x^{n(n-1)} - \binom{n+2}{n}x^{n(n-1)-1} \\ & + nx^{n^2} - x^{n(n+1)-1} + 2x^{n(n+1)} \end{aligned}$$

ここまではやってみましたが、この先、商の係数が正になることを示すのはなかなかしんどそうです。とりあえずこの辺で中断しておきましょう。

**8.2.3** その他  $L_n$  について分かっていること

$L_n(0) = 2 \neq 0$  であり、 $L_n(\alpha) = 0$  であれば

$$\begin{aligned} L_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + 1 \right\}^{n+1} - \frac{1}{\alpha} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + 1 \right\}^{n+2} \\ &= 2\alpha^{-n(n+1)}(1 + \alpha^n)^{n+1} - \alpha^{-(n-1)(n+2)-1}(1 + \alpha^{n-1})^{n+2} \\ &= \alpha^{-n(n+1)} \{ 2(\alpha^n + 1)^{n+1} - \alpha(\alpha^{n-1} + 1)^{n+2} \} \\ &= \alpha^{-n(n+1)} L_n(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が分かります。従って  $x = \alpha$  が根であれば  $\frac{1}{\alpha}$  も根であって、上の変形から重複度も一致します。

$L_n(x)$  は  $n(n+1)$  次式であってこれは偶数次であり、最高次の係数は2です。

### 8.3 $C_n$ と $M_n$ の関係：試行錯誤篇

#### 8.3.1 $C_n \leq M_n$

Hölder の不等式によれば

$$a^{n-1}b + ab^{n-1} \leq (a^n + b^n)^{\frac{n-1}{n}} (b^n + a^n)^{\frac{1}{n}} = a^n + b^n$$

ですから

**事実 8.3.1** 任意の正の整数  $n$  に対して

$$C_n \leq M_n$$

であり、等号は  $a = b$  のときのみ成り立ちます。

#### 8.3.2 $M_n$ の単調増加性を使って $C_n$ について言えること

また、

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \sqrt[n+1]{\frac{a^n b + ab^n}{2}} = \sqrt[n+1]{\frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2}} \cdot ab = M_{n-1}^{\frac{n-1}{n+1}} C_2^{\frac{2}{n+1}} \\ C_{n+1}^{n+1} &= M_{n-1}^{n-1} C_2^2 \\ C_{n+2}^{n+2} &= M_n^n C_2^2 \\ M_n^n &= \frac{C_{n+2}^{n+2}}{C_2^2} \\ M_n &= \frac{C_{n+2}^{\frac{n+2}{n}}}{C_2^{\frac{2}{n}}} \end{aligned}$$

であり、 $\{M_n\}$  が単調増加であったことによれば

$$\begin{aligned} \frac{C_{n+1}^{\frac{n+1}{n-1}}}{C_2^{\frac{2}{n-1}}} &\leq \frac{C_{n+2}^{\frac{n+2}{n}}}{C_2^{\frac{2}{n}}} \\ C_{n+1}^{\frac{n+1}{n-1}} &\leq \frac{C_2^{\frac{2}{n-1}}}{C_2^{\frac{2}{n}}} C_{n+2}^{\frac{n+2}{n}} \\ &= C_2^{\frac{2}{n(n-1)}} C_{n+2}^{\frac{n+2}{n}} \\ C_{n+1} &\leq C_2^{\frac{2}{n(n+1)}} C_{n+2}^{\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}} \\ &= C_2^{\frac{2}{n(n+1)}} C_{n+2}^{1 - \frac{2}{n(n+1)}} \\ &= \left( \frac{C_2}{C_{n+2}} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} C_{n+2} \end{aligned}$$

が成り立っていることは分かります。 $\{C_n\}$  の単調性はどのようなのでしょうか？

#### 8.3.3 $C_{n+1} \leq M_n$

また、 $C_n$  の増え方と  $M_n$  の増え方を見て行くと、

$$\begin{aligned} C_{n+1} \leq M_n &\Leftrightarrow \sqrt[n+1]{\frac{a^n b + ab^n}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} \\ \left( \frac{a^n b + ab^n}{2} \right)^n &\leq \left( \frac{a^n + b^n}{2} \right)^{n+1} \\ 2(a^n b + ab^n)^n &\leq (a^n + b^n)^{n+1} \\ 2 \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^n + \frac{a}{b} \right\}^n &\leq \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^n + 1 \right\}^{n+1} \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x$  と置いて  $x > 0$  で

$$A(x) = (x^n + 1)^{n+1} - 2(x^n + x)^n \geq 0$$

となるかどうかを見ます。計算機によると  $n = 2, 3, \dots, 9$  では上は正しい様です。

$$C_2 = \sqrt{\frac{ab + ab}{2}} = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = M_1$$

$$\begin{aligned}
C_3 \leq M_2 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{a^2b+ab^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\
&\left(\frac{a^2b+ab^2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^3 \\
&2(a^2b+ab^2)^2 \leq (a^2+b^2)^3 \\
&2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b}\right\}^2 \leq \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1\right\}^3
\end{aligned}$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  と置いて

$$\begin{aligned}
(x^2+1)^3 - 2(x^2+x)^2 &= x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 \\
&= x^6 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 1 \\
&= (x^3-1)^2 + x^2(x-1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

が成立しています。

予想 8.3.2

$$C_{n+1} \leq M_n$$

まず Hölder の不等式から

$$\begin{aligned}
a^n b + ab^n &= a^{n-1}ab + b^{n-1}ab \\
&\leq \left\{a^{(n-1)\frac{n}{n-1}} + b^{(n-1)\frac{n}{n-1}}\right\}^{\frac{n-1}{n}} \{(ab)^n + (ab)^n\}^{\frac{1}{n}} \\
&= (a^n + b^n)^{\frac{n-1}{n}} \cdot 2^{\frac{1}{n}} \{a^n b^n\}^{\frac{1}{n}} \\
\frac{a^n b + ab^n}{2} &\leq (a^n + b^n)^{\frac{n-1}{n}} \cdot 2^{\frac{1}{n}-1} \{a^n b^n\}^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \{a^n b^n\}^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

であり、右辺第2因子は AM-GM 不等式から

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \\
&= \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} \\
\sqrt[n+1]{\frac{a^n b + ab^n}{2}} &\leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}
\end{aligned}$$

となって確かに正しいことが分かります。

事実 8.3.3 任意の正の整数  $n$  に対して

$$C_{n+1} \leq M_n$$

です。

8.3.4  $C_n \leq M_1$  ?

$$\begin{aligned}
C_3 \leq M_1 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{a^2b+ab^2}{2}} \leq \frac{a+b}{2} \\
&\frac{a^2b+ab^2}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \\
&2^2(a^2b+ab^2) \leq (a+b)^3
\end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 - 4(a^2b+ab^2) &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 4a^2b - 4ab^2 \\
&= a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \\
&= (a-b)(a^2 - b^2) \\
&= (a-b)^2(a+b) \geq 0
\end{aligned}$$

からこれも成立しています。

$$\begin{aligned}
C_4 \leq M_1 &\Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{a^3b+ab^3}{2}} \leq \frac{a+b}{2} \\
&\frac{a^3b+ab^3}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \\
&2^3(a^3b+ab^3) \leq (a+b)^4
\end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 - 8(a^3b+ab^3) &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - 8a^3b - 8ab^3 \\
&= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
&= (a-b)^4 \geq 0
\end{aligned}$$

からこれも成立っています。しかし  $a=5, b=1, n=5$  の場合、

$$\begin{aligned}
C_5^5 &= \frac{5^4 \cdot 1 + 5 \cdot 1^4}{2} = 315 \\
M_1^5 &= \left(\frac{5+1}{2}\right)^5 = 3^5 = 243
\end{aligned}$$

ですから  $C_5 \leq M_1$  は成り立ちません。逆はどうなのでしょう？  $M_1 \leq C_5$  も成り立たないでしょうか。  $a=2, b=1, n=5$  の場合、

$$\begin{aligned}
C_5^5 &= \frac{2^4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^4}{2} = 8.5 \\
M_1^5 &= \left(\frac{2+1}{2}\right)^5 \approx 7.5
\end{aligned}$$

ですから  $C_5 \geq M_1$  も成り立ちません。

では  $M_1 \leq C_m$  となるような  $m$  は存在するのでしょうか？

$$\begin{aligned}
M_1 \leq C_m &\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^m \leq \frac{ab^{m-1} + a^{m-1}b}{2} \\
&(a+b)^m \leq 2^{m-1}(ab^{m-1} + a^{m-1}b)
\end{aligned}$$

ですから

$$\frac{(x+1)^m}{x^{m-1}+x} \leq 2^{m-1}$$

が  $x > 0$  で成り立つかと云うことですが、左辺の分子は  $m$  次、分母は  $m-1$  次なので、 $x \rightarrow +\infty$  で左辺は  $+\infty$  に発散しますから上に有界ではあり得ません。従って  $M_1 \leq C_m$  となるような  $m$  は存在しないことが分かります。

### 8.3.5 $C_n \leq M_2$ はどうか？

$$C_4 \leq M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq M_4$$

は成立っています。

しかし  $C_n \leq M_2$  もいつも成り立つわけではありません。

$$\begin{aligned}
C_n \leq M_2 &\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a^{n-1}b+ab^{n-1}}{2}} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\
&\left(\frac{a^{n-1}b+ab^{n-1}}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n \\
&2^{n-2}(a^{n-1}b+ab^{n-1})^2 \leq (a^2+b^2)^n \\
&2^{n-2} \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \frac{a}{b} \right\}^2 \leq \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 \right\}^n
\end{aligned}$$

ですから

$$F_n(x) = (x^2+1)^n - 2^{n-2}(x^{n-1}+x)^2$$

として  $x > 0$  で  $F_n(x) \geq 0$  であるかどうかを見ます。

$$F_1(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0$$

$$F_2(x) = (x^2+1)^2 - (x+x)^2 = (x^2-1)^2 \geq 0$$

は自明であり、また先に見た結果より  $C_3 \leq M_2, C_4 \leq M_1 \leq M_2$  は分かっていますが、念のため計算して見ると：

$$F_3(x) = (x^2+1)^3 - 2(x^2+x)^2 = (x^3-1)^2 + x^2(x-1)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}
F_4(x) &= (x^2+1)^4 - 2^2(x^3+x)^2 \\
&= (x^2+1)^4 - 4x^2(x^2+1)^2 \\
&= (x^2+1)^2(x^2-1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

となっています。また少し難しいですが

$$\begin{aligned}
 F_5(x) &= (x^2 + 1)^5 - 2^3(x^4 + x)^2 \\
 &= x^{10} - 3x^8 + 10x^6 - 16x^5 + 10x^4 - 3x^2 + 1 \\
 &= (x - 1)^2(x^8 + 2x^7 - 2x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 2x + 1) \\
 &= (x - 1)^2\{(x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1)^2 + 3x^2(x^2 - 1)^2 + 4x^4\} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

も得られます。

しかし、 $n = 6$  の場合は

$$\begin{aligned}
 F_6(x) &= (x^2 + 1)^6 - 2^4(x^5 + x)^2 \\
 &= x^{12} - 10x^{10} + 15x^8 - 12x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1 \\
 &= (x - 1)^2(x + 1)^2(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1) \\
 F_6(2) &= 5^6 - 2^4(2^5 + 2)^2 = -2871 < 0
 \end{aligned}$$

となってしまう、 $C_6 \leq M_2$  は成り立ちません。

$n = 7$  の場合も同様に

$$\begin{aligned}
 F_7(x) &= (x^2 + 1)^7 - 2^5(x^6 + x)^2 \\
 F_7(2) &= 5^7 - 2^5(2^6 + 2)^2 = -61267 < 0
 \end{aligned}$$

です。

#### 事実 8.3.4

$$\begin{aligned}
 C_1, C_2, C_3, C_4 &\leq M_1, \quad C_5 \not\leq M_1 \\
 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 &\leq M_2, \quad C_6 \not\leq M_2, C_7 \not\leq M_2
 \end{aligned}$$

#### 8.3.6 $C_{n+3} \leq M_n$ ?

と云うことは・・・

#### 予想 8.3.5

$$C_{n+3} \leq M_n, \quad C_{n+4} \not\leq M_n$$

$C_4 \leq M_1, C_5 \leq M_2$  は既に見ました ( $n = 1, 2$  に相当)。 $n = 3, 4$  のときは、計算機によると正しそうです。

$$\begin{aligned}
 C_{n+3} \leq M_n &\Leftrightarrow \sqrt[n+3]{\frac{a^{n+2}b + ab^{n+2}}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}} \\
 \left(\frac{a^{n+2}b + ab^{n+2}}{2}\right)^n &\leq \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{n+3} \\
 2^3(a^{n+2}b + ab^{n+2})^n &\leq (a^n + b^n)^{n+3} \\
 8\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+2} + \frac{a}{b}\right\}^n &\leq \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right\}^{n+3}
 \end{aligned}$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  と置いて  $x > 0$  で

$$D_n(x) = (x^n + 1)^{n+3} - 8(x^{n+2} + x)^n \geq 0$$

が示せるかどうかです。

$n = 3$  の場合は特殊な事情で計算できます：

$$\begin{aligned}
 C_6 \leq M_3 &\Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{a^5b + ab^5}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \\
 \frac{a^5b + ab^5}{2} &\leq \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2 \\
 2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^5 + \frac{a}{b}\right\} &\leq \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 1\right\}^2
 \end{aligned}$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  として

$$\begin{aligned}
 (x^3 + 1)^2 - 2(x^5 + x) &= x^6 - 2x^5 + 2x^3 - 2x + 1 \\
 &= (x - 1)^2(x^4 - x^2 + 1) \geq 0
 \end{aligned}$$

が分かっただけです。従って  $C_6 \leq M_3$  も分かりました。

このとき確かに  $C_7 \leq M_3$  は成り立っていません。例えば  $a = 3, b = 2$  のとき左辺の方が右辺より大きいからです：

$$\begin{aligned}
 2^4(3^6 \cdot 2 + 3 \cdot 2^6)^3 &= 71874000000 \\
 (3^3 + 2^3)^7 &= 64339296875.
 \end{aligned}$$

**事実 8.3.6**

$$C_1, \dots, C_6 \leq M_3, \quad C_7 \not\leq M_3$$

計算のし易さから言うと  $C_9 \leq M_6$  も証明できるかも知れません。

$$\begin{aligned} C_9 \leq M_6 &\Leftrightarrow \sqrt[9]{\frac{a^8b + ab^8}{2}} \leq \sqrt[6]{\frac{a^6 + b^6}{2}} \\ &\left(\frac{a^8b + ab^8}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a^6 + b^6}{2}\right)^3 \\ &2(a^8b + ab^8)^2 \leq (a^6 + b^6)^3 \\ &2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^8 + \frac{a}{b}\right\}^2 \leq \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^6 + 1\right\}^3 \end{aligned}$$

ですから  $x > 0$  で

$$D_6^*(x) = (x^6 + 1)^3 - 2(x^8 + x)^2 \geq 0$$

が言えるかどうかです。計算機によれば正しい様ですが、証明はできるでしょうか？

**事実 8.3.7**

$$D_6^*(x) = (x^6 + 1)^3 - 2(x^8 + x)^2 \geq 0 \quad (x > 0)$$

$$A(x) = \frac{(x^6 + 1)^3}{(x^8 + x)^2}$$

と置いて、 $x > 0$  で  $A(x) \geq 2$  を示して見ましょう。

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{3(x^6 + 1)^2 6x^5(x^8 + x)^2 - (x^6 + 1)^3 2(x^8 + x)(8x^7 + 1)}{(x^8 + x)^4} \\ &= \frac{2(x^6 + 1)^2(x^8 + x) \{9x^5(x^8 + x) - (x^6 + 1)(8x^7 + 1)\}}{(x^8 + x)^4} \\ &= \frac{2(x^6 + 1)^2 \{x^{13} - 8x^7 + 8x^6 - 1\}}{(x^8 + x)^3} \\ &= \frac{2(x^6 + 1)^2(x - 1)(x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 - 7x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{(x^8 + x)^3} \end{aligned}$$

ですが、ここで

$$\begin{aligned} &x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 - 7x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= x^6 \left( x^6 + \dots + x - 7 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^6} \right) \end{aligned}$$

であって、 $x > 0$  のとき

$$x^k + \frac{1}{x^k} \geq 2$$

であることから (AM-GM 不等式)、

$$x^6 + \dots + x - 7 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^6} \geq 12 - 7 > 0$$

が分かります。従って  $A'(x) = 0$  となるのは、 $x > 0$  の範囲内では  $x = 1$  のみであることが分かります。すると  $A(x)$  の増減表は

|         |   |            |   |            |
|---------|---|------------|---|------------|
| $x$     | 0 | $\dots$    | 1 | $\dots$    |
| $A'(x)$ |   | $-$        | 0 | $+$        |
| $A(x)$  |   | $\searrow$ | 2 | $\nearrow$ |

となって、 $x > 0$  の範囲内では  $A(x) \geq 2$  であることが示されました。従って  $C_9 \leq M_6$  です。□

また、 $a = 6, b = 5$  のとき

$$4(a^9b + ab^9)^3 \approx 9.58 \times 10^{23} > 9.37 \times 10^{23} \approx (a^6 + b^6)^5$$

なので確かに  $C_{10} \not\leq M_6$  です。  $C_7 \leq M_6$  は別の事実 (8.3.3) で既に見ました。

**事実 8.3.8**

$$C_1, \dots, C_7, C_9 \leq M_6, \quad C_{10} \not\leq M_6$$

注意： $C_8$  についてはまだ証明できていません。やっておきましょう。

$$\begin{aligned}
 C_8 \leq M_6 &\Leftrightarrow \sqrt[8]{\frac{a^7b+ab^7}{2}} \leq \sqrt[6]{\frac{a^6+b^6}{2}} \\
 \left(\frac{a^7b+ab^7}{2}\right)^6 &\leq \left(\frac{a^6+b^6}{2}\right)^8 \\
 \left(\frac{a^7b+ab^7}{2}\right)^3 &\leq \left(\frac{a^6+b^6}{2}\right)^4 \\
 2(a^7b+ab^7)^3 &\leq (a^6+b^6)^4 \\
 2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^7 + \frac{a}{b}\right\}^3 &\leq \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^6 + 1\right\}^4 \\
 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 &\leq \left(\frac{a}{b}\right)^6 + 1 \\
 0 &\leq \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1\right\}^2
 \end{aligned}$$

従ってこれは正しいことが分かります。

**事実 8.3.9**

$$C_1, \dots, C_9 \leq M_6, \quad C_{10} \not\leq M_6$$

この場合はものすごく上手くいきましたが、他にも適用可能でしょうか？

$$\begin{aligned}
 C_{n+2} \leq M_n &\Leftrightarrow \sqrt[n+2]{\frac{a^{n+1}b+ab^{n+1}}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \\
 \left(\frac{a^{n+1}b+ab^{n+1}}{2}\right)^n &\leq \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{n+2} \\
 \left(\frac{a^n+b^n}{2} \cdot ab\right)^n &\leq \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{n+2} \\
 (ab)^n &\leq \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

ですが最後の不等式は AM-GM 不等式に他なりませんのでこれは正しいことが分かります。

**事実 8.3.10** 任意の正の整数  $n$  に対して

$$C_{n+2} \leq M_n$$

です。

### 8.3.7 一旦まとめ

**事実 8.3.11** 任意の正の整数  $n$  に対して

$$C_n, C_{n+1}, C_{n+2} \leq M_n.$$

**事実 8.3.12 [ 計算機による計算 ]**

$$D_{m,n}(x) = (x^n + 1)^m - 2^{m-n}(x^{m-1} + x)^n$$

と置けば

$$C_m \leq M_n \Leftrightarrow D_{m,n}(x) \geq 0 \quad (x > 0)$$

$$C_1, \dots, C_7 \leq M_4, \quad C_8 \not\leq M_4$$

$$C_1, \dots, C_8 \leq M_5, \quad C_9 \not\leq M_5$$

$$C_1, \dots, C_9 \leq M_6, \quad C_{10} \not\leq M_6 \quad (\text{証明済み})$$

$$C_1, \dots, C_{10} \leq M_7, \quad C_{11} \not\leq M_7$$

は正しい様です。

### 8.3.8 $M_2C_2 = C_4^2$

そういえば

$$M_2C_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^3b+ab^3}{2}} = C_4^2$$

なので、何か一般化は出来ないか？

$$\begin{aligned} C_{n+2}^{n+2} &= \frac{a^{n+1}b + ab^{n+1}}{2} \\ &= \frac{a^n + b^n}{2} \cdot ab \\ C_{n+2}^{n+2} &= M_n^n C_2^2 \end{aligned}$$

## 8.4 $C_n$ と $M_n$ の関係：解決篇

### 8.4.1 $C_{n+3} \leq M_n$

$C_9 \leq M_6$  を証明した時の方法は他の場合にも適用できそうなので問題の本丸もこれで攻めてみることにします。

$$A_n(x) = \frac{(x^n + 1)^{n+3}}{(x^{n+2} + x)^n} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} A'_n(x) &= \frac{(n+3)(x^n + 1)^{n+2}nx^{n-1}(x^{n+2} + x)^n - (x^n + 1)^{n+3}n(x^{n+2} + x)^{n-1}\{(n+2)x^{n+1} + 1\}}{(x^{n+2} + x)^{2n}} \\ &= \frac{n(x^n + 1)^{n+2} \{x^{2n-1} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x^n - 1\}}{(x^{n+2} + x)^{n+1}} \\ &= \frac{n(x^n + 1)^{n+2}(x-1) \{x^{2n} + \dots + x^{n+1} - (n+1)x^n + x^{n-1} + \dots + 1\}}{(x^{n+2} + x)^{n+1}} \end{aligned}$$

であり、 $x > 0$  では AM-GM 不等式により

$$\begin{aligned} &x^{2n} + \dots + x^{n+1} - (n+1)x^n + x^{n-1} + \dots + 1 \\ &= x^n \left\{ x^n + \dots + x - (n+1) + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^n} \right\} \\ &\geq x^n(2n - n - 1) \end{aligned}$$

が得られますから  $A'_n(x) = 0$  となるのは  $x > 0$  の範囲内では  $x = 1$  のみです。すると増減表は

|           |   |            |   |            |
|-----------|---|------------|---|------------|
| $x$       | 0 | ...        | 1 | ...        |
| $A'_n(x)$ |   | -          | 0 | +          |
| $A_n(x)$  |   | $\searrow$ | 8 | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A_n(x) \geq 8$  であることが分かります。従って  $C_{n+3} \leq M_n$  が  $n = 2, 3, \dots$  で成り立ちます（ただし、 $n = 1$  のときも既に見ましたから、結局任意の正の整数で成り立ちます）。

**事実 8.4.1** 任意の正の整数  $n$  に対して

$$C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3} \leq M_n.$$

### 8.4.2 $C_n \leq C_{n+1}$

この方法は非常に有効であり、 $C_n$  ( $n \geq 2$ ) の単調性を示すのにも使えるのではないのでしょうか。

**事実 8.4.2**

$$\begin{aligned} C_{n+1} \leq C_{n+2} &\Leftrightarrow 2(x^n + 1)^{n+1} - x(x^{n-1} + 1)^{n+2} \geq 0 \quad (x > 0) \\ &\Leftrightarrow A(x) = \frac{(x^n + 1)^{n+1}}{x(x^{n-1} + 1)^{n+2}} \geq \frac{1}{2} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$n = 1$  の時は既に  $C_2 \leq C_3$  であることは示してあります。

$n \geq 2$  のとき、

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{(n+1)(x^n+1)^n n x^{n-1} (x^{n-1}+1)^{n+2} - (x^n+1)^{n+1} \{(x^{n-1}+1)^{n+2} + x(n+2)(x^{n-1}+1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}\}}{x^2(x^{n-1}+1)^{2n+4}} \\
 &= \frac{n(n+1)(x^n+1)^n x^n (x^{n-1}+1) - (x^n+1)^{n+1} \{x^{n-1}+1 + (n+2)(n-1)x^{n-1}\}}{x^2(x^{n-1}+1)^{n+3}} \\
 &= \frac{n(n+1)(x^n+1)^n x^n (x^{n-1}+1) - (x^n+1)^{n+1} \{(n^2+n-1)x^{n-1}+1\}}{x^2(x^{n-1}+1)^{n+3}} \\
 &= \frac{(x^n+1)^n [n(n+1)(x^{2n-1}+x^n) - (x^n+1)\{(n^2+n-1)x^{n-1}+1\}]}{x^2(x^{n-1}+1)^{n+3}} \\
 &= \frac{(x^n+1)^n \{n(n+1)(x^{2n-1}+x^n) - (n^2+n-1)x^{2n-1} - x^n - (n^2+n-1)x^{n-1} - 1\}}{x^2(x^{n-1}+1)^{n+3}} \\
 &= \frac{(x^n+1)^n \{x^{2n-1} + (n^2+n-1)x^n - (n^2+n-1)x^{n-1} - 1\}}{x^2(x^{n-1}+1)^{n+3}}
 \end{aligned}$$

であり、ここで分子の第2因子は  $x-1$  で割り切れるため、実際に割り算を実行すると

$$\begin{aligned}
 &x^{2n-1} + (n^2+n-1)x^n - (n^2+n-1)x^{n-1} - 1 \\
 &= (x-1) \{x^{2n-2} + \cdots + x^n + n(n+1)x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1\}
 \end{aligned}$$

ですから商の係数が全て正であることから  $A'(x) = 0$  となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみです。

すると増減表は

|          |   |            |               |            |
|----------|---|------------|---------------|------------|
| $x$      | 0 | $\cdots$   | 1             | $\cdots$   |
| $A'(x)$  |   | $-$        | 0             | $+$        |
| $A_n(x)$ |   | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A_n(x) \geq \frac{1}{2}$  であることが分かります。

以上から  $\{C_n\}_{n=2,3,\dots}$  は単調増加であることが分かりました。

です ( $C_1 = M_1$ )。また、

$$C_{n+3} \leq M_n$$

でもあります。

### 8.4.3 $M_n$ の単調性、再び

またこの方法は、別の方法で証明済みの事実の別証明をももたらしてくれます。

$$A(x) = \frac{(x^{n+1}+1)^n}{(x^n+1)^{n+1}}$$

と置けば

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{n(x^{n+1}+1)^{n-1}(n+1)x^n(x^n+1)^{n+1} - (x^{n+1}+1)^n(n+1)(x^n+1)^n n x^{n-1}}{(x^n+1)^{2n+2}} \\
 &= \frac{n(n+1)(x^{n+1}+1)^{n-1} x^{n-1} \{x(x^n+1) - (x^{n+1}+1)\}}{(x^n+1)^{n+2}} \\
 &= \frac{n(n+1)(x^{n+1}+1)^{n-1} x^{n-1} (x-1)}{(x^n+1)^{n+2}}
 \end{aligned}$$

ですから、 $A'(x) = 0$  となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみであって、増減表は

|         |   |            |               |            |
|---------|---|------------|---------------|------------|
| $x$     | 0 | $\cdots$   | 1             | $\cdots$   |
| $A'(x)$ |   | $-$        | 0             | $+$        |
| $A(x)$  |   | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A_n(x) \geq \frac{1}{2}$  であることが分かります。これはすなわち

$$2(x^{n+1}+1)^n - (x^n+1)^{n+1} \geq 0$$

を意味し、従って  $\{M_n\}$  の単調増加性が分かります。

## 9 2変数巡回型 power mean $C_{m,n}$

事実 8.4.3 任意の2以上の整数  $n$  に対して

$$C_n \leq C_{n+1}$$

であり、また

$$C_4 \leq C_1, \quad C_5 \not\leq C_1$$

**定義 9.0.1**  $a, b > 0$  に対して

$$C_{m,n}(a,b) = C_{m,n} = \sqrt[n]{\frac{a^{n-m}b^m + a^m b^{n-m}}{2}} \quad (m \leq n)$$

と定めます。明らかに  $C_{m,n} = C_{n-m,n}$  が成り立っています。

## 9.1 $m = 1$

$$C_{1,1} = \frac{a+b}{2} = M_1$$

$$C_{1,2} = \sqrt{ab}$$

$$C_{1,3} = \sqrt[3]{\frac{ab^2 + a^2b}{2}}$$

$\vdots$

$C_{1,n} = C_n$  ですからこれは既に見ました：

**事実 9.1.1**

$$C_{1,1} \geq C_{1,2} \leq C_{1,3} \leq \cdots$$

特に

$$C_{1,4} \leq C_{1,1}, \quad C_{1,5} \not\leq C_{1,1}.$$

## 9.2 $m = 2$

$$C_{2,2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = M_2$$

$$C_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{ab^2 + a^2b}{2}} = C_{1,3}$$

$$C_{2,4} = \sqrt[4]{a^2b^2} = \sqrt{ab} = C_{1,2}$$

$$C_{2,5} = \sqrt[5]{\frac{a^3b^2 + a^2b^3}{2}}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} C_{2,n} \leq C_{2,n+1} &\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2}}{2}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n-1}b^2 + a^2b^{n-1}}{2}} \\ &\left(\frac{a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2}}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{a^{n-1}b^2 + a^2b^{n-1}}{2}\right)^n \\ &(a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2})^{n+1} \leq 2(a^{n-1}b^2 + a^2b^{n-1})^n \\ &\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}^{n+1} \leq 2\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}^n \end{aligned}$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  と置いて  $x > 0$  で

$$A_n(x) = \frac{(x^{n-1} + x^2)^n}{(x^{n-2} + x^2)^{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

となる事を示します ( $n \geq 4$ )。

$$\begin{aligned} A'_n(x) &= \frac{n(x^{n-1} + x^2)^{n-1}\{(n-1)x^{n-2} + 2x\}(x^{n-2} + x^2)^{n+1} - (x^{n-1} + x^2)^n(n+1)(x^{n-2} + x^2)^n\{(n-2)x^{n-3} + 2x\}}{(x^{n-2} + x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{(x^{n-1} + x^2)^{n-1}\{2x^{2n-4} + (n^2 - 3n - 2)x^n - (n^2 - 3n - 2)x^{n-1} - 2x^3\}}{(x^{n-2} + x^2)^{n+2}} \\ &= \frac{(x^{n-1} + x^2)^{n-1}(x-1)\{2x^{2n-5} + \cdots + 2x^n + n(n-3)x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + 2x^3\}}{(x^{n-2} + x^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

です。ただしこれは  $n \geq 5$  のときに有効であって、 $n = 4$  のときは

$$\begin{aligned} A'_4(x) &= \frac{(x^3 + x^2)^3 \{2x^4 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^3\}}{(x^2 + x^2)^6} \\ &= \frac{4x^6(x+1)^3(x^4 - x^3)}{2^6 x^{12}} \\ &= \frac{(x+1)^3(x-1)}{2^4 x^3} \end{aligned}$$

です。いずれにせよ  $x > 0$  の範囲では  $A'_n(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のときのみです。

すると増減表は

|           |   |            |               |            |
|-----------|---|------------|---------------|------------|
| $x$       | 0 | $\cdots$   | 1             | $\cdots$   |
| $A'_n(x)$ |   | $-$        | 0             | $+$        |
| $A_n(x)$  |   | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A_n(x) \geq \frac{1}{2}$  であることが分かります。

以上により

$$C_{2,4} \leq C_{2,5} \leq C_{2,6} \leq \cdots$$

であることが分かりました。 $C_{1,n}$  の結果と合わせて次が分かります：

### 事実 9.2.1

$$C_{2,2} \geq C_{2,3} \geq C_{2,4} \leq C_{2,5} \leq C_{2,6} \leq \cdots$$

では  $C_{2,3}$  と  $C_{2,5}, C_{2,6}$  の大小関係はどうなっているのでしょうか。

$$\begin{aligned} C_{2,3} \geq C_{2,5} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{ab^2 + a^2b}{2}} \geq \sqrt[5]{\frac{a^3b^2 + a^2b^3}{2}} \\ &\left(\frac{ab^2 + a^2b}{2}\right)^5 \geq \left(\frac{a^3b^2 + a^2b^3}{2}\right)^3 \\ (ab^2 + a^2b)^5 &\geq 4(a^3b^2 + a^2b^3)^3 \\ (ab)^5(a+b)^5 &\geq 4(ab)^6(a+b)^3 \\ (a+b)^2 &\geq 4ab \\ (a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

によれば確かに  $C_{2,5} \leq C_{2,3}$  となっています。また、

$$\begin{aligned} C_{2,3} \leq C_{2,6} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{ab^2 + a^2b}{2}} \leq \sqrt[6]{\frac{a^4b^2 + a^2b^4}{2}} \\ &\left(\frac{ab^2 + a^2b}{2}\right)^6 \leq \left(\frac{a^4b^2 + a^2b^4}{2}\right)^3 \\ &\left(\frac{ab^2 + a^2b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4b^2 + a^2b^4}{2} \\ (ab^2 + a^2b)^2 &\leq 2(a^4b^2 + a^2b^4) \\ (ab)^2(a+b)^2 &\leq 2(ab)^2(a^2 + b^2) \\ (a+b)^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\ 0 &\leq (a-b)^2 \end{aligned}$$

でもありますから  $C_{2,3} \leq C_{2,6}$  です。

さてそれでは  $C_{2,2}$  と  $C_{2,6}$  はどうでしょうか？ これは簡単で、AM-GM 不等式から

$$C_{2,6}^6 = a^2b^2 \frac{a^2 + b^2}{2} \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^3 = C_{2,2}^6$$

がすぐに分かります。次に  $C_{2,7}$  よりも計算が楽そうな  $C_{2,8}$  を比べてみると、

$$\begin{aligned} C_{2,2} \geq C_{2,8} &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt[8]{\frac{a^6b^2 + a^2b^6}{2}} \\ &\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^8 \geq \left(\frac{a^6b^2 + a^2b^6}{2}\right)^2 \\ &\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^4 \geq \frac{a^6b^2 + a^2b^6}{2} \\ (a^2 + b^2)^4 &\geq 2^3(a^6b^2 + a^2b^6) \\ \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1\right\}^4 &\geq 8\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  と置いて  $x > 0$  で

$$(x^2 + 1)^4 \geq 8(x^6 + x^2)$$

である事を示せば良いのですが、

$$(x^2 + 1)^4 - 8(x^6 + x^2) = (x^2 - 1)^4 \geq 0$$

からこれはすぐに分かってしまいます。従って  $C_{2,7} \leq C_{2,8} \leq C_{2,2}$  です。

次に  $C_{2,9}$  と比較してみると、

$$\begin{aligned} C_{2,2}(3,5)^9 &= 17^9 \approx 1.2 \times 10^{11} \\ C_{2,9}(3,5)^2 &= \left( \frac{3^7 5^2 + 3^2 5^7}{2} \right)^2 \approx 1.4 \times 10^{11} \\ C_{2,2}(3,1)^9 &= 5^9 = 1953125 \\ C_{2,9}(3,1)^2 &= \left( \frac{3^7 + 3^2}{2} \right)^2 = 1205604 \end{aligned}$$

ですから  $C_{2,2} \leq C_{2,9}$  も  $C_{2,2} \geq C_{2,9}$  もどちらも成り立ちません。

#### 事実 9.2.2

$$C_{2,4} \leq C_{2,5} \leq C_{2,3} \leq C_{2,6} \leq \cdots \leq C_{2,8} \leq C_{2,9} \leq \cdots$$

$\begin{matrix} & & C_{2,2} \\ & & \leq \\ & & \end{matrix}$

残る問題は  $C_{2,2} \leq C_{2,m}$  となるような  $m \geq 4$  を見つけれられるかどうかです。

$$C_{2,2} \leq C_{2,m} \Leftrightarrow \left( \frac{a^2 + b^2}{2} \right)^m \leq \left( \frac{a^2 b^{m-2} + a^{m-2} b^2}{2} \right)^2$$

$$(a^2 + b^2)^m \leq 2^{m-2} (a^2 b^{m-2} + a^{m-2} b^2)^2$$

ですから  $x > 0$  で

$$\frac{(x^2 + 1)^m}{(x^{m-2} + x^2)^2} \leq 2^{m-2}$$

が成り立つかどうかですが、左辺の分子は  $2m$  次、分母は  $2m - 4$  次ですから有界ではあり得ません。したがって  $C_{2,2} \leq C_{2,m}$  となるような  $m \geq 4$  はありません。

### 9.3 $m = 3$

$$\begin{aligned} C_{3,3} &= \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} = M_3 \\ C_{3,4} &= \sqrt[4]{\frac{ab^3 + a^3b}{2}} = C_{1,4} \\ C_{3,5} &= \sqrt[5]{\frac{a^2b^3 + a^3b^2}{2}} = C_{2,5} \\ C_{3,6} &= \sqrt[6]{\frac{a^3b^3 + a^3b^3}{2}} = \sqrt{ab} = C_{1,2} \\ C_{3,7} &= \sqrt[7]{\frac{a^4b^3 + a^3b^4}{2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3,n} \leq C_{3,n+1} &\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a^{n-3}b^3 + a^3b^{n-3}}{2}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n-2}b^3 + a^3b^{n-2}}{2}} \\ &\left( \frac{a^{n-3}b^3 + a^3b^{n-3}}{2} \right)^{n+1} \leq \left( \frac{a^{n-2}b^3 + a^3b^{n-2}}{2} \right)^n \\ &(a^{n-3}b^3 + a^3b^{n-3})^{n+1} \leq 2(a^{n-2}b^3 + a^3b^{n-2})^n \\ &\left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^{n-3} + \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right\}^{n+1} \leq 2 \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^{n-2} + \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right\}^n \end{aligned}$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  と置いて  $x > 0$  で

$$A_n(x) = \frac{(x^{n-2} + x^3)^n}{(x^{n-3} + x^3)^{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

となる事を示します ( $n \geq 6$ )。

$$\begin{aligned} A'_n(x) &= \frac{n(x^{n-2} + x^3)^{n-1} \{ (n-2)x^{n-3} + 3x^2 \} (x^{n-3} + x^3)^{n+1} - (x^{n-2} + x^3)^n (n+1)(x^{n-3} + x^3)^n \{ (n-3)x^{n-4} + 3x^2 \}}{(x^{n-3} + x^3)^{2n+2}} \\ &= \frac{(x^{n-2} + x^3)^{n-1} [ \{ n(n-2)x^{n-3} + 3nx^2 \} (x^{n-3} + x^3) - (x^{n-2} + x^3)(n+1) \{ (n-3)x^{n-4} + 3x^2 \} ]}{(x^{n-3} + x^3)^{n+2}} \\ &= \frac{(x^{n-2} + x^3)^{n-1} \{ 3x^{2n-6} + (n^2 - 5n - 3)x^n - (n^2 - 5n - 3)x^{n-1} - 3x^5 \}}{(x^{n-3} + x^3)^{n+2}} \end{aligned}$$

ですから  $n \geq 7$  のとき

$$= \frac{(x^{n-2} + x^3)^{n-1}(x-1)}{\{3x^{2n-7} + \cdots + 3x^n + n(n-5)x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + 3x^5\}} \\ = \frac{(x^{n-2} + x^3)^{n-1}(x-1)}{(x^{n-3} + x^3)^{n+2}}$$

となり、 $x > 0$  の範囲で  $A'_n(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみです。

また、 $n = 6$  の時も同様に

$$A'_6(x) = \frac{(x^4 + x^3)^5 n(n-5)x^5(x-1)}{2^8 x^{24}}$$

ですからやはり  $x > 0$  の範囲で  $A'_n(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみです。従って  $n \geq 6$  のとき増減表は

|           |   |            |               |            |
|-----------|---|------------|---------------|------------|
| $x$       | 0 | $\cdots$   | 1             | $\cdots$   |
| $A'_n(x)$ |   | $-$        | 0             | $+$        |
| $A_n(x)$  |   | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A_n(x) \geq \frac{1}{2}$  であることが分かります。これは

$$C_{3,6} \leq C_{3,7} \leq \cdots$$

を意味します。

では  $C_{3,3}, \dots, C_{3,5}$  はどうでしょうか？まず、

$$C_{3,6} = C_{1,2} = C_{2,4} \leq C_{2,5} = C_{3,5}$$

であり、また、

$$C_{3,5} \leq C_{3,4} \Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{a^2b^3 + a^3b^2}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{ab^3 + a^3b}{2}} \\ \left(\frac{a^2b^3 + a^3b^2}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{ab^3 + a^3b}{2}\right)^5 \\ 2(a^2b^3 + a^3b^2)^4 \leq (ab^3 + a^3b)^5$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  と置いて  $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^3 + x)^5}{(x^3 + x^2)^4} \geq 2$$

である事を示せるかどうかですが、

$$A'(x) = \frac{5(x^3 + x)^4(3x^2 + 1)(x^3 + x^2)^4 - (x^3 + x)^5 4(x^3 + x^2)^3(3x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2)^8} \\ = \frac{(x^3 + x)^4 \{5(3x^2 + 1)(x^3 + x^2) - 4(x^3 + x)(3x^2 + 2x)\}}{(x^3 + x^2)^5} \\ = \frac{(x^3 + x)^4 (3x^5 + 7x^4 - 7x^3 - 3x^2)}{(x^3 + x^2)^5} \\ = \frac{(x^3 + x)^4 (x-1)(3x^4 + 10x^3 + 3x^2)}{(x^3 + x^2)^5}$$

によれば  $x > 0$  の範囲内で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみであって増減表は

|         |   |            |   |            |
|---------|---|------------|---|------------|
| $x$     | 0 | $\cdots$   | 1 | $\cdots$   |
| $A'(x)$ |   | $-$        | 0 | $+$        |
| $A(x)$  |   | $\searrow$ | 2 | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A(x) \geq 2$  であることが分かります。従って  $C_{3,5} \leq C_{3,4}$  です。

また、 $C_4 \leq M_3$  でしたから

$$C_{3,4} = C_{1,4} = C_4 \leq M_3 = C_{3,3}$$

も言えます。

**事実 9.3.1**

$$C_{3,3} \geq C_{3,4} \geq C_{3,5} \geq C_{3,6} \leq C_{3,7} \leq \cdots$$

### 9.3.1 $C_{3,5}$

あとは小さいところと大きいところの絡み具合です。まずは  $C_{3,5}$  がどれくらいでかいのですが、

$$\begin{aligned}
 C_{3,10}^{10} &= \frac{a^3b^7 + a^7b^3}{2} \\
 &= (ab)^2 \frac{ab^5 + a^5b}{2} \\
 &= (ab)^2 C_{1,6}^6 \\
 &\geq (ab)^2 C_{1,3}^6 \\
 &= (ab C_{1,3}^3)^2 \\
 &= \left( \frac{a^2b^3 + a^3b^2}{2} \right)^2 \\
 &= C_{3,5}^{10}
 \end{aligned}$$

なのでさすがに  $C_{3,10}$  より小さいようです。では 8 ではどうでしょうか？

$$\begin{aligned}
 C_{3,5} \leq C_{3,8} &\Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{a^3b^2 + a^2b^3}{2}} \leq \sqrt[8]{\frac{a^3b^5 + a^5b^3}{2}} \\
 \left( \frac{a^3b^2 + a^2b^3}{2} \right)^8 &\leq \left( \frac{a^3b^5 + a^5b^3}{2} \right)^5 \\
 2^{-3}(a^3b^2 + a^2b^3)^8 &\leq (a^3b^5 + a^5b^3)^5
 \end{aligned}$$

ですから  $\frac{a}{b} = x$  と置いて  $x > 0$  で

$$\frac{(x^5 + x^3)^5}{(x^3 + x^2)^8} \geq 2^{-3}$$

となるかどうか調べます。

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{5(x^5 + x^3)^4(5x^4 + 3x^2)(x^3 + x^2)^8 - (x^5 + x^3)^5 8(x^3 + x^2)^7(3x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2)^{16}} \\
 &= \frac{(x^5 + x^3)^4 \{5(5x^4 + 3x^2)(x^3 + x^2) - 8(x^5 + x^3)(3x^2 + 2x)\}}{(x^3 + x^2)^9} \\
 &= \frac{(x^5 + x^3)^4 (x^7 + 9x^6 - 9x^5 - x^4)}{(x^3 + x^2)^9} \\
 &= \frac{(x^5 + x^3)^4 x^4 (x^3 + 9x^2 - 9x - 1)}{(x^3 + x^2)^9} \\
 &= \frac{(x^5 + x^3)^4 x^4 (x - 1)(x^2 + 10x + 1)}{(x^3 + x^2)^9}
 \end{aligned}$$

ですから  $x > 0$  の範囲で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみです。従って増減表は

|         |   |     |                 |     |
|---------|---|-----|-----------------|-----|
| $x$     | 0 | ... | 1               | ... |
| $A'(x)$ |   | −   | 0               | +   |
| $A(x)$  |   | ↘   | $\frac{1}{2^3}$ | ↗   |

となり、 $x > 0$  のとき  $A(x) \geq \frac{1}{2^3}$  であることが分かります。これは

$$C_{3,5} \leq C_{3,8}$$

を意味します。8 でもまだだめです。次は 7 です。

$$\begin{aligned}
 C_{3,5} \leq C_{3,7} &\Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{a^3b^2 + a^2b^3}{2}} \leq \sqrt[7]{\frac{a^3b^4 + a^4b^3}{2}} \\
 \left( \frac{a^3b^2 + a^2b^3}{2} \right)^7 &\leq \left( \frac{a^3b^4 + a^4b^3}{2} \right)^5 \\
 2^{-2}(a^3b^2 + a^2b^3)^7 &\leq (a^3b^4 + a^4b^3)^5 \\
 (ab)^{14}(a+b)^7 &\leq 4(ab)^{15}(a+b)^5 \\
 (a+b)^2 &\leq 4ab \\
 (a-b)^2 &\leq 0
 \end{aligned}$$

ですからこれは逆で、 $C_{3,7} \leq C_{3,5}$  が成り立っていることが分かります。

### 9.3.2 余談

この計算は完全に平方になっており、非常にスッキリします。確か同じことが  $n = 2$  のときにもあったはずですが、 $C_{2,5} \leq C_{2,3}$  を証明したときです。と云うことは一般に

予想 9.3.2

$$C_{m,2m+1} \leq C_{m,2m-1}$$

が成り立っているのではないのでしょうか？

$$\begin{aligned}
C_{m,2m+1} \leq C_{m,2m-1} &\Leftrightarrow \sqrt[2m+1]{\frac{a^m b^{m+1} + a^{m+1} b^m}{2}} \leq \sqrt[2m-1]{\frac{a^m b^{m-1} + a^{m-1} b^m}{2}} \\
&\left(\frac{a^m b^{m+1} + a^{m+1} b^m}{2}\right)^{2m-1} \leq \left(\frac{a^m b^{m-1} + a^{m-1} b^m}{2}\right)^{2m+1} \\
&4(a^m b^{m+1} + a^{m+1} b^m)^{2m-1} \leq (a^m b^{m-1} + a^{m-1} b^m)^{2m+1} \\
&4(ab)^{m(2m-1)}(a+b)^{2m-1} \leq (ab)^{(m-1)(2m+1)}(a+b)^{2m+1} \\
&4ab \leq (a+b)^2 \\
&0 \leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

ですから確かに成立しています。

**事実 9.3.3** 任意の正の整数  $m$  に対して

$$C_{m,2m+1} \leq C_{m,2m-1}.$$

他にも同様の事例はないか検討してみましょう。

$$a^2 b^4 + a^4 b^2 = a^2 b^2 (a^2 + b^2), \quad a^4 b^4 (a^2 + b^2) = a^6 b^4 + a^4 b^6$$

ですから  $C_{4,10}$  と  $C_{4,6}$  の関係を見てみましょう。

$$\begin{aligned}
C_{4,10} \leq C_{4,6} &\Leftrightarrow \sqrt[10]{\frac{a^4 b^6 + a^6 b^4}{2}} \leq \sqrt[6]{\frac{a^4 b^2 + a^2 b^4}{2}} \\
&\left(\frac{a^4 b^6 + a^6 b^4}{2}\right)^6 \leq \left(\frac{a^4 b^2 + a^2 b^4}{2}\right)^{10} \\
&2^4 (a^4 b^6 + a^6 b^4)^6 \leq (a^4 b^2 + a^2 b^4)^{10} \\
&2^4 (ab)^{24} (a^2 + b^2)^6 \leq (ab)^{20} (a^2 + b^2)^{10} \\
&2^4 (ab)^4 \leq (a^2 + b^2)^4 \\
&2ab \leq a^2 + b^2
\end{aligned}$$

これを逆算すると

$$\begin{aligned}
2ab &\leq a^2 + b^2 \\
2^m (ab)^m &\leq (a^2 + b^2)^m \\
2^m (ab)^{n(l+m)+m} (a^2 + b^2)^l &\leq (ab)^{n(l+m)} (a^2 + b^2)^{l+m} \\
2^m (ab)^{nl+(n+1)m} (a^2 + b^2)^l &\leq (ab)^{n(l+m)} (a^2 + b^2)^{l+m}
\end{aligned}$$

ここで  $(n+1)m = lk$  であるとして

$$\begin{aligned}
2^m (ab)^{(n+k)l} (a^2 + b^2)^l &\leq (ab)^{n(l+m)} (a^2 + b^2)^{l+m} \\
2^m (a^{n+k+2} b^{n+k} + a^{n+k} b^{n+k+2})^l &\leq (a^{n+2} b^n + a^n b^{n+2})^{l+m} \\
\left(\frac{a^{n+k+2} b^{n+k} + a^{n+k} b^{n+k+2}}{2}\right)^l &\leq \left(\frac{a^{n+2} b^n + a^n b^{n+2}}{2}\right)^{l+m} \\
\sqrt[l+m]{\frac{a^{n+k+2} b^{n+k} + a^{n+k} b^{n+k+2}}{2}} &\leq \sqrt[l]{\frac{a^{n+2} b^n + a^n b^{n+2}}{2}}
\end{aligned}$$

ですが、ここで

$$\begin{cases} 2n+2 = l \\ 2n+2k+2 = l+m \\ (n+1)m = lk \end{cases}$$

ですから

$$l = 2(n+1), \quad m = 2k$$

がわかり、結局、

$$\begin{aligned}
2ab &\leq a^2 + b^2 \\
\sqrt[2(n+k+1)]{\frac{a^{n+k+2} b^{n+k} + a^{n+k} b^{n+k+2}}{2}} &\leq \sqrt[2(n+1)]{\frac{a^{n+2} b^n + a^n b^{n+2}}{2}} \\
C_{n+k,2(n+k)+2} &\leq C_{n,2(n+1)}
\end{aligned}$$

が得られます。例えば  $k=2$  のとき、これは

$$C_{n+2,2(n+2)+2} \leq C_{n,2n+2} = C_{n+2,2n+2} = C_{n+2,2(n+2)-2}$$

となりますから、 $n+2$  を改めて  $m$  と書けば

$$C_{m,2m+2} \leq C_{m,2m-2}$$

です。

事実 9.3.4 任意の正の整数  $m$  に対して

$$C_{m,2m+2} \leq C_{m,2m-2}.$$

ただこの評価はギリギリのものではないかも知れません (実は  $C_{2,8} \leq C_{2,2}$  が言える、など)。

### 9.3.3 復帰 $C_{3,4}$

では  $C_{3,4}$  はどんな感じでしょうか?  $C_{3,10}$  よりは大きいでしょうか。

$$\begin{aligned} C_{3,10} \leq C_{3,4} &\Leftrightarrow \sqrt[10]{\frac{a^3b^7 + a^7b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{ab^3 + a^3b}{2}} \\ &\left(\frac{a^3b^7 + a^7b^3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a^3b + ab^3}{2}\right)^5 \\ 2^3(a^3b^7 + a^7b^3)^2 &\leq (a^3b + ab^3)^5 \end{aligned}$$

によれば、 $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^3 + x)^5}{(x^7 + x^3)^2} \geq 8$$

である事を示せば良いのですが、これは上手くいきません。  $B(x) = (x^3 + x)^5 - 8(x^7 + x^3)^2$  として

$$B(8) = 2.8 \times 10^{12} > 0$$

$$B(6) = -88662535200 < 0$$

だからです。この2つに大小関係はありません。

では  $C_{3,9}$  よりは大きいでしょうか。

$$\begin{aligned} C_{3,9} \leq C_{3,4} &\Leftrightarrow \sqrt[9]{\frac{a^3b^6 + a^6b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{ab^3 + a^3b}{2}} \\ &\left(\frac{a^3b^6 + a^6b^3}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{a^3b + ab^3}{2}\right)^9 \\ 2^5(a^3b^6 + a^6b^3)^4 &\leq (a^3b + ab^3)^9 \end{aligned}$$

によれば、 $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^3 + x)^9}{(x^6 + x^3)^4} \geq 2^5$$

が成り立つかと云う事ですが、これは上手くいきます。実際

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{9(x^3 + x)^8(3x^2 + 1)(x^6 + x^3)^4 - (x^3 + x)^9 4(x^6 + x^3)^3(6x^5 + 3x^2)}{(x^6 + x^3)^8} \\ &= \frac{(x^3 + x)^8 \{9(3x^2 + 1)(x^6 + x^3) - 4(x^3 + x)(6x^5 + 3x^2)\}}{(x^6 + x^3)^5} \\ &= \frac{(x^3 + x)^8(3x^8 - 15x^6 + 15x^5 - 3x^3)}{(x^6 + x^3)^5} \\ &= \frac{3(x^3 + x)^8 x^3(x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 1)}{(x^6 + x^3)^5} \\ &= \frac{3x^3(x^3 + x)^8(x-1)^3(x^2 + 3x + 1)}{(x^6 + x^3)^5} \end{aligned}$$

ですから  $x > 0$  で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみであり、増減表は

|         |   |            |       |            |
|---------|---|------------|-------|------------|
| $x$     | 0 | ...        | 1     | ...        |
| $A'(x)$ |   | -          | 0     | +          |
| $A(x)$  |   | $\searrow$ | $2^5$ | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A(x) \geq 2^5$  であることが分かります。これは

$$C_{3,9} \leq C_{3,4}$$

を意味します。

さらに  $C_{3,8}$  はどうでしょうか。

$$\begin{aligned} C_{3,8} \leq C_{3,4} &\Leftrightarrow \left(\frac{a^3b^5 + a^5b^3}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{a^3b + ab^3}{2}\right)^8 \\ &\frac{a^3b^5 + a^5b^3}{2} \leq \left(\frac{a^3b + ab^3}{2}\right)^2 \\ 2(a^3b^5 + a^5b^3) &\leq (a^3b + ab^3)^2 \\ 2ab(a^2 + b^2) &\leq (a^2 + b^2)^2 \\ 2ab &\leq a^2 + b^2 \end{aligned}$$

でありこれは常に成り立ちますから確かに  $C_{3,8} \leq C_{3,4}$  が成り立ちます。

### 9.3.4 脱線

この計算も一般化出来そうです。

$$\begin{aligned}
 2ab &\leq a^2 + b^2 \\
 2(ab^3 + a^3b) &\leq (a^2 + b^2)^2 \\
 2(ab)^{2m}(ab^3 + a^3b) &\leq (ab)^{2m}(a^2 + b^2)^2 \\
 2(a^{2m+1}b^{2m+3} + a^{2m+3}b^{2m+1}) &\leq (a^{m+2}b^m + a^mb^{m+2})^2 \\
 \frac{a^{2m+1}b^{2m+3} + a^{2m+3}b^{2m+1}}{2} &\leq \left(\frac{a^{m+2}b^m + a^mb^{m+2}}{2}\right)^2 \\
 \left(\frac{a^{2m+1}b^{2m+3} + a^{2m+3}b^{2m+1}}{2}\right)^{2m+2} &\leq \left(\frac{a^{m+2}b^m + a^mb^{m+2}}{2}\right)^{4m+4} \\
 C_{2m+1,4m+4} &\leq C_{m,2m+2}
 \end{aligned}$$

#### 事実 9.3.5

$$C_{2m+1,4m+4} \leq C_{m,2m+2}$$

### 9.3.5 復帰

$C_{3,4} \leq C_{3,m}$  となる最小の  $m \geq 6$  は何でしょうか。

$$\begin{aligned}
 C_{3,4} &\leq C_{3,m} \\
 \left(\frac{a^3b + ab^3}{2}\right)^m &\leq \left(\frac{a^3b^{m-3} + am - 3b^3}{2}\right)^4 \\
 (a^3b + ab^3)^m &\leq 2^{m-4}(a^3b^{m-3} + a^{m-3}b^3)^4
 \end{aligned}$$

ですから

$$\frac{(x^3 + x)^m}{(x^{m-3} + x^3)^4} \leq 2^{m-4}$$

が成り立つかどうかですが、分母と分子の次数の関係から

$$3m \leq 4(m-3)$$

従って  $m \geq 12$  である必要があります。実際に確かめてみると

$$\begin{aligned}
 C_{3,4} \leq C_{3,12} &\Leftrightarrow \left(\frac{a^3b + ab^3}{2}\right)^{12} \leq \left(\frac{a^3b^9 + a^9b^3}{2}\right)^4 \\
 &\left(\frac{a^3b + ab^3}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3b^9 + a^9b^3}{2} \\
 (a^3b + ab^3)^3 &\leq 2^2(a^3b^9 + a^9b^3) \\
 (a^2 + b^2)^3 &\leq 2^2(a^6 + b^6) \\
 (a^2 + b^2)^6 &\leq 2^4(a^6 + b^6)^2 \\
 \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^6 &\leq \left(\frac{a^6 + b^6}{2}\right)^2 \\
 M_2 &\leq M_6
 \end{aligned}$$

ですから確かに成り立っています。こう云った計算も一般化出来そうな感じがあります。

#### 事実 9.3.6

$$\begin{aligned}
 &\quad \quad \quad C_{3,4} \\
 &\quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 C_{3,6} \leq C_{3,7} \leq C_{3,5} &\leq C_{3,8} \leq C_{3,9} \leq \cdots \leq C_{3,12} \leq \cdots
 \end{aligned}$$

### 9.3.6 $C_{3,3}$

つぎは  $C_{3,3}$  です。今までの結果から  $C_{3,11}$  あたりでどうでしょうか。

$$\begin{aligned}
 C_{3,11} \leq C_{3,3} &\Leftrightarrow \sqrt[11]{\frac{a^3b^8 + a^8b^3}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \\
 \left(\frac{a^3b^8 + a^8b^3}{2}\right)^3 &\leq \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^{11} \\
 2^8(a^3b^8 + a^8b^3)^3 &\leq (a^3 + b^3)^{11}
 \end{aligned}$$

によれば、 $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^3 + 1)^{11}}{(x^8 + x^3)^3} \geq 2^8$$

が成り立つかと云う事です、

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{11(x^3+1)^{10}3x^2(x^8+x^3)^3 - (x^3+1)^{11}3(x^8+x^3)^2(8x^7+3x^2)}{(x^8+x^3)^6} \\
 &= \frac{3(x^3+1)^{10}\{11x^2(x^8+x^3) - (x^3+1)(8x^7+3x^2)\}}{(x^8+x^3)^4} \\
 &= \frac{3(x^3+1)^{10}(3x^{10}-8x^7+8x^5-3x^2)}{(x^8+x^3)^4} \\
 &= \frac{3(x^3+1)^{10}(x-1)(x+1)(3x^8+3x^6-8x^5+3x^4+3x^2)}{(x^8+x^3)^4}
 \end{aligned}$$

です。ここで AM-GM 不等式によれば

$$3x^8 + 3x^6 - 8x^5 + 3x^4 + 3x^2 = x^5 \left( 3x^3 + 3x - 8 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3} \right) \geq x^5(12-8) > 0$$

が分かりますから、 $x > 0$  の範囲内で  $A'(x) = 0$  となるのはやはり  $x = 1$  の時のみです。従って増減表は

|         |   |            |       |            |
|---------|---|------------|-------|------------|
| $x$     | 0 | ...        | 1     | ...        |
| $A'(x)$ |   | -          | 0     | +          |
| $A(x)$  |   | $\searrow$ | $2^8$ | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A(x) \geq 2^8$  であることが分かります。これは

$$C_{3,11} \leq C_{3,3}$$

を意味します。

また、

$$\begin{aligned}
 C_{3,12} \leq C_{3,3} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^3b^9 + a^9b^3}{2} \right)^3 \leq \left( \frac{a^3 + b^3}{2} \right)^{12} \\
 &\quad \frac{a^3b^9 + a^9b^3}{2} \leq \left( \frac{a^3 + b^3}{2} \right)^4 \\
 &\quad 8(a^3b^9 + a^9b^3) \leq (a^3 + b^3)^4 \\
 &\quad 0 \leq (a^3 - b^3)^4
 \end{aligned}$$

となってこれも明らかに成り立っています。これも既視感のある計算ですね ( $C_{1,4} = C_4 \leq M_1 = C_1 = C_{1,1}$  や  $C_{2,8} \leq C_{2,2}$  の計算)。

しかし  $C_{3,13}$  と比べると、

$$C_{3,13}(3,2)^3 \approx 1.56 \times 10^{16}$$

$$C_{3,3}(3,2)^{13} \approx 1.4 \times 10^{16}$$

$$C_{3,13}(2,1)^3 \approx 1.37 \times 10^8$$

$$C_{3,3}(2,1)^{13} \approx 3.1 \times 10^8$$

ですから  $C_{3,13} \leq C_{3,3}$  も  $C_{3,13} \geq C_{3,3}$  もどちらも成り立たないことが分かります。

### 事実 9.3.7

$$\begin{array}{c}
 C_{3,4} \leq C_{3,3} \\
 \leq \quad \leq \quad \leq \\
 C_{3,6} \leq C_{3,7} \leq C_{3,5} \leq C_{3,8} \leq C_{3,9} \leq \cdots \leq C_{3,12} \leq C_{3,13} \leq \cdots
 \end{array}$$

$C_{3,3} \leq C_{3,m}$  となる  $m \geq 6$  の存在は、

$$\begin{aligned}
 C_{3,3} \leq C_{3,m} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^3 + b^3}{2} \right)^m \leq \left( \frac{a^3b^{m-3} + a^{m-3}b^3}{2} \right)^3 \\
 &\quad (a^3 + b^3)^m \leq 2^{m-3}(a^3b^{m-3} + a^{m-3}b^3)^3
 \end{aligned}$$

から  $x > 0$  において

$$\frac{(x^3+1)^m}{(x^{m-3}+x^3)^3} \leq 2^{m-3}$$

が成り立つかと云う問題ですが、分子の方が次数が高いので有界にはなり得ません。

### 9.3.7 既視感について

今のところ

$$C_{1,4} \leq C_{1,1}$$

$$C_{2,8} \leq C_{2,2}$$

$$C_{3,12} \leq C_{3,3}$$

が成り立っており、一般に

**予想 9.3.8**

$$C_{m,4m} \leq C_{m,m}$$

が成り立っていそうな雰囲気です。

実際、

$$\begin{aligned} C_{m,4m} \leq C_{m,m} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^m b^{3m} + a^{3m} b^m}{2} \right)^m \leq \left( \frac{a^m + b^m}{2} \right)^{4m} \\ &\quad \frac{a^m b^{3m} + a^{3m} b^m}{2} \leq \left( \frac{a^m + b^m}{2} \right)^4 \\ &\quad 8(a^m b^{3m} + a^{3m} b^m) \leq (a^m + b^m)^4 \\ &\quad 0 \leq (a^m - b^m)^4 \end{aligned}$$

ですからこれは成立します。

**事実 9.3.9**

$$C_{m,4m} \leq C_{m,m}$$

**9.3.8 余談 一般の場合への想い**

あるいはついでにこんなことも考えてみる。

$$\begin{aligned} (C_{1,4} &\leq C_{1,1}) \\ C_{2,5} &\leq C_{2,3} \\ C_{3,7} &\leq C_{3,5} \end{aligned}$$

が成り立っていた。では  $C_{4,9} \leq C_{4,7}$  が成り立つのだろうか？これは一般に

$$C_{m,2m+1} \leq C_{m,2m-1}$$

だから既に示してある。

では次はどうなのか。次とは  $C_{m,2m-2}$  ですが、これも既に見ました：

$$C_{m,2m+2} \leq C_{m,2m-2}$$

ただ、ギリギリの評価ではありませんでしたからギリギリの評価を求める必要があります。

$$\begin{aligned} C_{2,8} &\leq C_{2,2} & C_{2,9} &\not\leq C_{2,2}, C_{2,2} &\not\leq C_{2,9} \\ C_{3,9} &\leq C_{3,4} & C_{3,10} &\not\leq C_{3,4}, C_{3,4} &\not\leq C_{3,10} \\ C_{4,10} &\leq C_{4,6} \end{aligned}$$

**9.4  $m = 4$** 

現状で  $m = 4$  に関して上がってきている事実は以下の通り：

**事実 9.4.1 一般的事実**

$$\begin{aligned} C_{m,2m+1} &\leq C_{m,2m-1} \\ C_{m,2m+2} &\leq C_{m,2m-2} \\ C_{m,4m} &\leq C_{m,m} \end{aligned}$$

**個別の結果**

$$C_{4,9} \leq C_{4,7}, \quad C_{4,10} \leq C_{4,6}, \quad C_{4,16} \leq C_{4,4}$$

**9.4.1  $m = 2$  からの翻訳**

$a^2 = A, b^2 = B$  と置けば

$$C_{4,10}(a, b) = \sqrt[10]{\frac{a^4 b^6 + a^6 b^4}{2}} = \sqrt[10]{\frac{A^2 B^3 + A^3 B^2}{2}} = \sqrt{C_{2,5}(A, B)}$$

ですから、 $C_{2,5} \leq C_{2,3}$  を適用して

$$\begin{aligned} C_{4,10}(a, b) &= \sqrt{C_{2,5}(a^2, b^2)} \leq \sqrt{C_{2,3}(a^2, b^2)} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^4b^2 + a^2b^4}{2}}} \\ &= \sqrt[6]{\frac{a^4b^2 + a^2b^4}{2}} \\ &= C_{4,6}(a, b) \end{aligned}$$

が（再び）得られます。全く同様にして  $C_{2,3} \leq C_{2,6}$  から  $C_{4,6} \leq C_{4,12}$  が新たに得られます。

この方法は  $C_{2,8} \leq C_{2,2}$  を  $C_{4,16} \leq C_{4,4}$  にも翻訳してくれます。

$m = 2$  の結果をこの方法で翻訳すると

$$C_{4,8} \leq C_{4,10} \leq C_{4,6} \leq C_{4,12} \leq \cdots$$

と

$$C_{4,16} \leq C_{4,4}$$

が得られるわけです。

#### 9.4.2 単調性

**事実 9.4.2**  $n \geq 8$  のとき

$$C_{4,n} \leq C_{4,n+1}.$$

【証明】

$$\begin{aligned} C_{4,n} \leq C_{4,n+1} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^4b^{n-4} + a^{n-4}b^4}{2} \right)^{n+1} \leq \left( \frac{a^4b^{n-3} + a^{n-3}b^4}{2} \right)^n \\ &\quad (a^4b^{n-4} + a^{n-4}b^4)^{n+1} \leq 2(a^4b^{n-3} + a^{n-3}b^4)^n \\ &\quad \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^4 + \left( \frac{a}{b} \right)^{n-4} \right\}^{n+1} \leq 2 \left\{ \left( \frac{a}{b} \right)^4 + \left( \frac{a}{b} \right)^{n-3} \right\}^n \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x$  と置き、 $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^{n-4} + x^4)^{n+1}}{(x^{n-3} + x^4)^n} \leq 2$$

を示します。 $n \geq 9$  のとき

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{(n+1)(x^{n-4} + x^4)^n \{(n-4)x^{n-5} + 4x^3\}(x^{n-3} + x^4)^n - (x^{n-4} + x^4)^{n+1} n(x^{n-3} + x^4)^{n-1} \{(n-3)x^{n-4} + 4x^3\}}{(x^{n-3} + x^4)^{2n}} \\ &= \frac{(x^{n-4} + x^4)^n [(n+1)\{(n-4)x^{n-5} + 4x^3\}(x^{n-3} + x^4) - n(x^{n-4} + x^4)\{(n-3)x^{n-4} + 4x^3\}]}{(x^{n-3} + x^4)^{2n-n+1}} \\ &= \frac{(x^{n-4} + x^4)^n \{-4x^{2n-8} - (n^2 - 7n - 4)x^n + (n^2 - 7n - 4)x^{n-1} + 4x^7\}}{(x^{n-3} + x^4)^{n+1}} \\ &= -\frac{(x^{n-4} + x^4)^n \{4x^{2n-8} + (n^2 - 7n - 4)x^n - (n^2 - 7n - 4)x^{n-1} - 4x^7\}}{(x^{n-3} + x^4)^{n+1}} \\ &= -\frac{(x^{n-4} + x^4)^n (x-1) \{4x^{2n-9} + \cdots + 4x^n + (n^2 - 7n)x^{n-1} + 4x^{n-2} + \cdots + x^7\}}{(x^{n-3} + x^4)^{n+1}} \end{aligned}$$

であり、 $x > 0$  の範囲内で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  の時のみです。

また  $n = 8$  の時も

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{(2x^4)^9}{(x^5 + x^4)^8} = \frac{2^9 x^4}{(x+1)^8} \\ A'(x) &= 2^9 \frac{4x^3(x+1)^8 - x^4 8(x+1)^7}{(x+1)^{16}} \\ &= 2^{11} x^3 \frac{(x+1) - 2x}{(x+1)^9} \\ &= 2^{11} x^3 \frac{1-x}{(x+1)^9} \end{aligned}$$

従っていずれの場合も増減表は

|         |   |          |              |            |
|---------|---|----------|--------------|------------|
| $x$     | 0 | $\cdots$ | 1            | $\cdots$   |
| $A'(x)$ |   | +        | 0            | -          |
| $A(x)$  |   |          | $\nearrow$ 2 | $\searrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A(x) \leq 2$  であることが分かります。従って  $n \geq 8$  で  $C_{4,n} \leq C_{4,n+1}$  が成り立ちます。□

#### 9.4.3 小さいところ

次に  $C_{4,4}, \dots, C_{4,7}$  の大小関係ですが、とりあえず

$$C_{4,8} \leq C_{4,6} \leq C_{4,4}$$

は分かっています。また以前の結果から

$$C_{4,5} = C_{1,5} = C_5 \leq M_4 = C_{4,4}$$

でもありますし、AM-GM 不等式によれば

$$C_{4,7} \geq \sqrt[7]{\sqrt{a^7 b^7}} = \sqrt{ab} = \sqrt[8]{a^4 b^4} = C_{4,8}$$

も分かります。分かっているのは

$$C_{4,7} \leq C_{4,6} \leq C_{4,5}$$

の部分だけです。これらを直接示すことも出来そうですが、 $n$  の大きい部分との兼ね合いの中で間接的に示される部分もあると思いますので保留しておきます。

#### 9.4.4 $n < 8$ と $n > 8$ との兼ね合い $C_{4,7}$

$C_{4,7} \leq C_{4,10}$  であるかどうかが焦点ですが、 $n = 3$  での結果  $C_{3,5} \geq C_{3,7}$  を前にやったように翻訳して

$$\begin{aligned} C_{3,5} &\geq C_{3,7} \\ C_{6,10} &\geq C_{6,14} \\ C_{4,10} &\geq \sqrt[14]{\frac{a^6 b^8 + a^8 b^6}{2}} \\ &= \sqrt[7]{\sqrt{\frac{(a^3 b^4)^2 + (a^4 b^3)^2}{2}}} \\ &\geq \sqrt[7]{\frac{a^3 b^4 + a^4 b^3}{2}} \\ &= C_{4,7} \end{aligned}$$

となっています。この結果と既に知っている  $C_{4,10} \leq C_{4,6}$  を合わせて

$$C_{4,7} \leq C_{4,10} \leq C_{4,6}$$

が分かりました。

#### 9.4.5 $C_{4,6}$

$C_{4,11} \leq C_{4,6}$  はだめでしょうか。

$$\begin{aligned} C_{4,11} \leq C_{4,6} &\Leftrightarrow \left(\frac{a^4 b^7 + a^7 b^4}{2}\right)^6 \leq \left(\frac{a^4 b^2 + a^2 b^4}{2}\right)^{11} \\ &2^5 (a^4 b^7 + a^7 b^4)^6 \leq (a^4 b^2 + a^2 b^4)^{11} \\ &2^5 a^{24} b^{24} (a^3 + b^3)^6 \leq a^{22} b^{22} (a^2 + b^2)^{11} \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x$  において

$$\begin{aligned} 2^5 x^2 (x^3 + 1)^6 &\leq (x^2 + 1)^{11} \\ \frac{x^2 (x^3 + 1)^6}{(x^2 + 1)^{11}} &\leq \frac{1}{2^5} = 0.03125 \end{aligned}$$

が  $x > 0$  で成立するかどうかです。左辺は有界なので可能性はあります。しかし  $x = 0.4$  で左辺は 0.0454 程度となり、成り立ちません。

左辺の  $x \rightarrow \infty$  での極限值は 0 ですから、当然逆向きの不等号も成り立ちません。つまり、 $C_{4,11} \geq C_{4,6}$  も成立しません。

#### 事実 9.4.3

$$C_{4,11} \not\leq C_{4,6}, \quad C_{4,11} \not\geq C_{4,6}$$

#### 9.4.6 $C_{4,5}$

$C_{4,6} \leq C_{4,12}$  は分かっていますので  $C_{4,12} \leq C_{4,5}$  が示せばいいのですがどうでしょうか。

$$\begin{aligned} C_{4,12} \leq C_{4,5} &\Leftrightarrow \left(\frac{a^4 b^8 + a^8 b^4}{2}\right)^5 \leq \left(\frac{a^4 b + ab^4}{2}\right)^{12} \\ &2^7 (a^4 b^8 + a^8 b^4)^5 \leq (a^4 b + ab^4)^{12} \end{aligned}$$

なので、 $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^4 + x)^{12}}{(x^8 + x^4)^5} = \frac{(x^3 + 1)^{12}}{x^8 (x^4 + 1)^5} \geq 2^7$$

が示せば良いことになります。

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{12(x^3+1)^{11}3x^2x^8(x^4+1)^5 - (x^3+1)^{12}\{8x^7(x^4+1)^5 + x^85(x^4+1)^44x^3\}}{x^{16}(x^4+1)^{10}} \\
 &= \frac{(x^3+1)^{11}[36x^3(x^4+1) - (x^3+1)\{8(x^4+1) + 20x^4\}]}{x^9(x^4+1)^6} \\
 &= \frac{4(x^3+1)^{11}\{9x^3(x^4+1) - (x^3+1)(7x^4+2)\}}{x^9(x^4+1)^6} \\
 &= \frac{4(x^3+1)^{11}(2x^7-7x^4+7x^3-2)}{x^9(x^4+1)^6} \\
 &= \frac{4(x^3+1)^{11}(x-1)(2x^6+2x^5+2x^4-5x^3+2x^2+2x+2)}{x^9(x^4+1)^6}
 \end{aligned}$$

ここで AM-GM 不等式によれば

$$\begin{aligned}
 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 2x + 2 &= x^3 \left( 2x^3 + 2x^2 + 2x - 5 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) \\
 &\geq x^3(12-5)
 \end{aligned}$$

ですから  $x > 0$  の範囲内で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のときのみであり、増減表は

|         |   |            |       |            |
|---------|---|------------|-------|------------|
| $x$     | 0 | ...        | 1     | ...        |
| $A'(x)$ |   | -          | 0     | +          |
| $A(x)$  |   | $\searrow$ | $2^7$ | $\nearrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A(x) \leq 2^7$  であることが分かります。従って  $C_{4,12} \leq C_{4,5}$  が示されました。現時点で

$$C_{4,7} \leq C_{4,10} \leq C_{4,6} \leq C_{4,12} \leq C_{4,5}$$

です。

また、 $C_{4,4}$  との関係の方に関しては、 $C_{4,16} \leq C_{4,4}$  は成り立っていますから、例えば  $C_{4,5} \leq C_{4,16}$  が成り立ってくれば良いのですが、どうもよろしくありません。

一般に  $C_{4,5} \leq C_{4,m}$  ( $m > 8$ ) が成り立つためには

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{a^4b + ab^4}{2} \right)^m &\leq \left( \frac{a^4b^{m-4} + a^{m-4}b^4}{2} \right)^5 \\
 (a^4b + ab^4)^m &\leq 2^{m-5}(a^4b^{m-4} + a^{m-4}b^4)^5
 \end{aligned}$$

から

$$A_m(x) = \frac{(x^4 + x)^m}{(x^{m-4} + x^4)^5}$$

が  $x > 0$  の範囲で上に有界である必要がありますが、次数を見ると

$$4m \leq 5(m-4)$$

すなわち  $m \geq 20$  でなければなりません。そこで  $C_{4,5} \leq C_{4,20}$  を示すことにします。これは

$$\begin{aligned}
 C_{4,5} \leq C_{4,20} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^4b + ab^4}{2} \right)^{20} \leq \left( \frac{a^4b^{16} + a^{16}b^4}{2} \right)^5 \\
 \left( \frac{a^4b + ab^4}{2} \right)^4 &\leq \frac{a^4b^{16} + a^{16}b^4}{2} \\
 (a^4b + ab^4)^4 &\leq 2^3(a^4b^{16} + a^{16}b^4)
 \end{aligned}$$

から  $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^4 + x)^4}{x^{16} + x^4} = \frac{(x^3 + 1)^4}{x^{12} + 1} \leq 8$$

が成り立つ事を示せば良く、

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= \frac{4(x^3+1)^3(x^{12}+1) - (x^3+1)^4 12x^{11}}{(x^{12}+1)^2} \\
 &= \frac{12x^2(x^3+1)^3(1-x^9)}{(x^{12}+1)^2}
 \end{aligned}$$

ですから  $x > 0$  の範囲内で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のときのみであり、増減表は

|         |   |            |   |            |
|---------|---|------------|---|------------|
| $x$     | 0 | ...        | 1 | ...        |
| $A'(x)$ |   | +          | 0 | -          |
| $A(x)$  |   | $\nearrow$ | 8 | $\searrow$ |

となり、 $x > 0$  のとき  $A(x) \leq 8$  であることが分かります。従って  $C_{4,5} \leq C_{4,20}$  が示されました。 $C_{4,5} \leq C_{4,19}$  は次数の関係から成り立ちません。

#### 事実 9.4.4

$$C_{4,5} \leq C_{4,20}, \quad C_{4,5} \not\leq C_{4,19}$$

また、 $C_{4,12} \leq C_{4,5}$  は分かっていますが、 $C_{4,13}$  はどうでしょうか？

$$\begin{aligned}
 C_{4,13} \leq C_{4,5} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^4b^9 + a^9b^4}{2} \right)^5 \leq \left( \frac{a^4b + ab^4}{2} \right)^{13} \\
 2^8(a^4b^9 + a^9b^4)^5 &\leq (a^4b + ab^4)^{13}
 \end{aligned}$$

なので、 $x > 0$  で

$$A(x) = \frac{(x^4 + x)^{13}}{(x^9 + x^4)^5} = \frac{(x^3 + 1)^{13}}{x^7(x^5 + 1)^5} \geq 2^8$$

が示せば良いことになりますが、これは正しくありません。

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{13(x^3 + 1)^{12} 3x^2 x^7 (x^5 + 1)^5 - (x^3 + 1)^{13} \{7x^6(x^5 + 1)^5 + x^7 5(x^5 + 1)^4 5x^4\}}{x^{14}(x^5 + 1)^{10}} \\ &= \frac{39x^3(x^5 + 1) - (x^3 + 1)(32x^5 + 7)}{x^8(x^5 + 1)^6} (x^3 + 1)^{12} \\ &= \frac{(x^3 + 1)^{12}}{x^8(x^5 + 1)^6} (7x^8 - 32x^5 + 32x^3 - 7) \end{aligned}$$

$$A'(1) = 0$$

であり、

$$A'(x) = B(x) (7x^8 - 32x^5 + 32x^3 - 7)$$

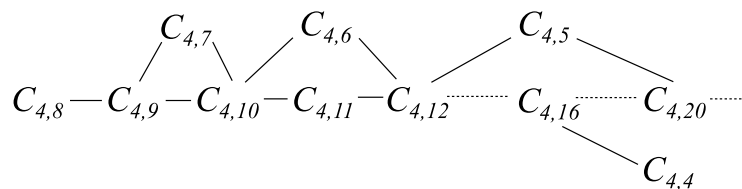
と置けば、

$$A''(1) = B(1)(56 - 32 \cdot 5 + 96) < 0$$

なので、 $A(x)$  は  $x = 1$  で極大値  $A(1) = 2^8$  です。従って不等式は成り立ちません。

#### 事実 9.4.5

$$C_{4,12} \leq C_{4,5}, \quad C_{4,13} \not\leq C_{4,5}$$



#### 9.4.7 $C_{4,4}$

$C_{4,16} \leq C_{4,4}$  は既に見ましたが、 $C_{4,4} \leq C_{4,m}$  となるような  $m \geq 17$  はあるのでしょうか。

$$C_{4,4} \leq C_{4,m} \Leftrightarrow \left(\frac{a^4 + b^4}{2}\right)^m \leq \left(\frac{a^4 b^{m-4} + a^{m-4} b^4}{2}\right)^4$$

$$(a^4 + b^4)^m \leq 2^{m-4} (a^4 b^{m-4} + a^{m-4} b^4)^4$$

なので、 $\frac{a}{b} = x$  とおけば

$$C_{4,4} \leq C_{4,m} \Leftrightarrow (x^4 + 1)^m \leq 2^{m-4} (x^4 + x^{m-4})^4$$

$$\frac{(x^4 + 1)^m}{(x^4 + x^{m-4})^4} \leq 2^{m-4}$$

となりますが、左辺の分母は  $4m - 16$  次式、分子は  $4m$  次式なので、これが有界であることはあり得ません。

一方、 $m = 16$  が  $C_{4,m} \leq C_{4,4}$  となる最大の  $m$  なのかどうかですが、

$$C_{4,4} \geq C_{4,m} \Leftrightarrow \left(\frac{a^4 + b^4}{2}\right)^m \geq \left(\frac{a^4 b^{m-4} + a^{m-4} b^4}{2}\right)^4$$

$$(x^4 + 1)^m \geq 2^{m-4} (x^4 + x^{m-4})^4$$

$$\frac{1}{2^{m-4}} \geq \frac{(x^4 + x^{m-4})^4}{(x^4 + 1)^m}$$

であって、右辺は有界です。upper bound が左辺になるか見ると、 $m = 16$  のときはぴったり一致します。

$m = 17$  のときは、右辺を  $A(x)$  と置けば

$$A(x) = \frac{(x^{13} + x^4)^4}{(x^4 + 1)^{17}} = \frac{x^{16}(x^9 + 1)^4}{(x^4 + 1)^{17}}$$

$$A'(x) = -\frac{4x^{15}(x^9 + 1)^3(4x^{13} - 13x^9 + 13x^4 - 4)}{(x^4 + 1)^{18}}$$

であって、 $x = 0.8$  付近で  $A'(x) = 0$  となり極大値であり、

$$A(0.8) = 0.000136... > \frac{1}{2^{13}} = 0.000122...$$

ですから、 $C_{4,4} \geq C_{4,17}$  は成り立っていません。

**事実 9.4.6**

$$C_{4,17} \not\leq C_{4,4}, \quad C_{4,16} \leq C_{4,4}$$

**9.5 小さいところの単調減少性**

今までは流れの中で結果的に示されて来ましたが、恐らく  $n = m, \dots, 2m$  までの  $C_{m,n}$  は単調減少です。これを一般的に示しておきましょう。

$$C_{m,n+1} \leq C_{m,n} \Leftrightarrow \left( \frac{a^m b^{n+1-m} + a^{n+1-m} b^m}{2} \right)^n \leq \left( \frac{a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m}{2} \right)^{n+1}$$

$$2(a^m b^{n+1-m} + a^{n+1-m} b^m)^n \leq (a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m)^{n+1}$$

ですが、ここで  $n+1 \leq 2m$  から  $n+1-m \leq m$  であり、また、 $n \leq 2m-1$  から  $n-m \leq m-1 < m$  なので、これは

$$2(ab)^{(n+1-m)n} (a^{2m-n-1} + b^{2m-n-1})^n \leq (ab)^{(n-m)(n+1)} (a^{2m-n} + b^{2m-n})^{n+1}$$

$$2(ab)^m (a^{2m-n-1} + b^{2m-n-1})^n \leq (a^{2m-n} + b^{2m-n})^{n+1}$$

と同値ですからこれを示せば良いことが分かります。

まず power mean inequality から

$$M_{2m-n-1} \leq M_{2m-n}$$

$$\left( \frac{a^{2m-n-1} + b^{2m-n-1}}{2} \right)^{2m-n} \leq \left( \frac{a^{2m-n} + b^{2m-n}}{2} \right)^{2m-n-1}$$

$$(a^{2m-n-1} + b^{2m-n-1})^{2m-n} \leq 2(a^{2m-n} + b^{2m-n})^{2m-n-1}$$

$$(a^{2m-n-1} + b^{2m-n-1})^n \leq 2^{\frac{n}{2m-n}} (a^{2m-n} + b^{2m-n})^{\frac{(2m-n-1)n}{2m-n}} \quad (9.1)$$

であり、また AM-GM 不等式から

$$\sqrt{(ab)^{2m-n}} \leq \frac{a^{2m-n} + b^{2m-n}}{2}$$

$$2(ab)^{\frac{2m-n}{2}} \leq a^{2m-n} + b^{2m-n}$$

$$2^{\frac{2m}{2m-n}} (ab)^m \leq (a^{2m-n} + b^{2m-n})^{\frac{2m}{2m-n}} \quad (9.2)$$

も分かりますから、(9.1)、(9.2) を合わせれば

$$2^{\frac{2m}{2m-n}} (ab)^m (a^{2m-n-1} + b^{2m-n-1})^n \leq 2^{\frac{n}{2m-n}} (a^{2m-n} + b^{2m-n})^{\frac{(2m-n-1)n}{2m-n} + \frac{2m}{2m-n}}$$

$$2(ab)^m (a^{2m-n-1} + b^{2m-n-1})^n \leq (a^{2m-n} + b^{2m-n})^{\frac{(2m-n)(n+1)}{2m-n}}$$

となり、確かに成立していることが分かります。 □

**事実 9.5.1**

$$C_{m,m} \geq C_{m,m+1} \geq \dots \geq C_{m,2m}$$

**9.6  $m = 6$   $m = 2, 3$  との関係に基づいて**

たとえば

$$C_{2,8}(a, b) = \sqrt[8]{\frac{a^2 b^6 + a^6 b^2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{(a^2)(b^2)^3 + (a^2)^3(b^2)}{2}}^{\frac{4}{8}} = \{C_{1,4}(a^2, b^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

が成り立っているように、 $m, n$  が共通の約数をもてば

$$C_{km, kn}(a, b) = \sqrt[kn]{\frac{a^{km} b^{k(n-m)} + a^{k(n-m)} b^{km}}{2}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{(a^k)^m (b^k)^{n-m} + (a^k)^{n-m} (b^k)^m}{2}}^{\frac{1}{k}}$$

$$= \{C_{m,n}(a^k, b^k)\}^{\frac{1}{k}}$$

が成り立っています。すると

$$C_{m,n} \leq C_{p,r} \Leftrightarrow C_{km, kn} \leq C_{kp, kr}$$

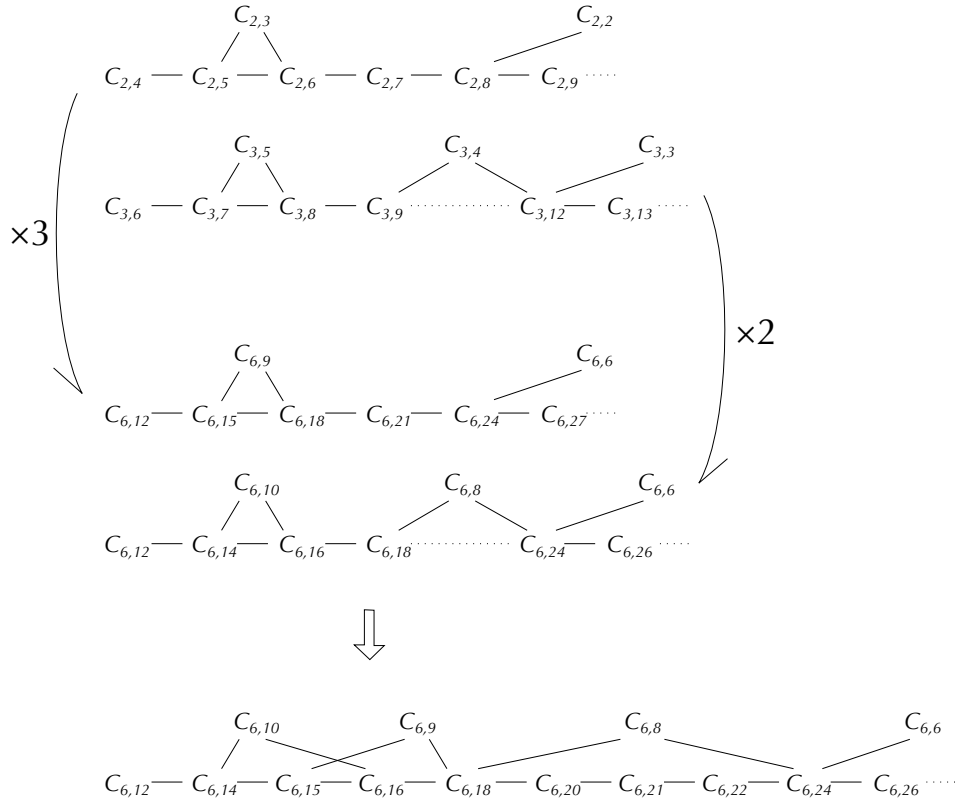
が分かるはずです。

これを使って  $m = 2$  の結果と  $m = 3$  の結果を  $m = 6$  の場合に関連させてみましょう。

今のところ分かっている一般的な不等式は以下の通りです：

**事実 9.6.1**

$$\begin{aligned}
C_{m,2m+1} &\leq C_{m,2m-1} \\
C_{m,2m+2} &\leq C_{m,2m-2} \\
C_{2m+1,4m+4} &\leq C_{m,2m+2} \\
C_{m,4m} &\leq C_{m,m} \\
C_{m,2m} &\leq C_{m,2m-1} \leq \cdots \leq C_{m,m+1} \leq C_{m,m} \\
C_{m,2m} &\leq C_{m,2m+1} \leq \cdots \\
C_{m,n} \leq C_{p,r} &\Leftrightarrow C_{km,kn} \leq C_{kp,kr}
\end{aligned}$$



このダイアグラムに現れないものの調査と、このダイアグラムの精度を調査する必要があります。

**9.6.1  $C_{6,11}, C_{6,13}$** 

$$\begin{aligned}
(C_{6,11})^{11} &= \frac{a^6 b^5 + a^5 b^6}{2} \\
&= (ab)^5 \frac{a+b}{2} \\
(C_{6,11})^{11 \cdot 13} &= (ab)^{65} \frac{(a+b)^{13}}{2^{13}} \\
&= (ab)^{65} \frac{(a+b)^2}{2^2} \frac{(a+b)^{11}}{2^{11}} \\
&\geq (ab)^{66} \frac{(a+b)^{11}}{2^{11}} \\
&= \left( \frac{a^6 b^7 + a^7 b^6}{2} \right)^{11} \\
C_{6,11} &\geq C_{6,13}
\end{aligned}$$

**9.6.2  $C_{6,11}, C_{6,14}$** 

Power mean 不等式 :

$$\begin{aligned}
2(a^2 + b^2) &\geq (a+b)^2 \\
2^7(a^2 + b^2)^7 &\geq (a+b)^{14}
\end{aligned}$$

と AM-GM 不等式

$$\frac{(a^2 + b^2)^4}{2^4} \geq (ab)^4$$

を合わせれば

$$\begin{aligned}
2^3(a^2 + b^2)^{11} &\geq (ab)^4(a+b)^{14} \\
2^3(ab)^{66}(a^2 + b^2)^{11} &\geq (ab)^{70}(a+b)^{14} \\
2^3(ab)^{66}(a^2 + b^2)^{11} &\geq (ab)^{5 \cdot 14}(a+b)^{14} \\
2^3(a^6 b^8 + a^8 b^6)^{11} &\geq (a^6 b^5 + a^5 b^6)^{14} \\
\left( \frac{a^6 b^8 + a^8 b^6}{2} \right)^{11} &\geq \left( \frac{a^6 b^5 + a^5 b^6}{2} \right)^{14} \\
C_{6,14} &\geq C_{6,11}
\end{aligned}$$

が分かります。従って

$$C_{6,12} \leq C_{6,13} \leq C_{6,11} \leq C_{6,14}$$

となっています。

### 9.6.3 $C_{6,9}$ と $C_{6,10}, C_{6,15}$

$C_{2,5} \leq C_{2,3}$  から  $C_{6,15} \leq C_{6,9}$  が分かっていますが、ダイアグラムで線がクロスしており、実は  $C_{6,16} \leq C_{6,9}$  が成り立っているか、あるいは  $C_{6,10} \leq C_{6,15}$  が成り立っているかする可能性があります。

$$\begin{aligned} C_{6,16} \leq C_{6,9} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^6 b^{10} + a^{10} b^6}{2} \right)^9 \leq \left( \frac{a^6 b^3 + a^3 b^6}{2} \right)^{16} \\ &2^7 (ab)^{54} (a^4 + b^4)^9 \leq (ab)^{48} (a^3 + b^3)^{16} \\ &2^7 (ab)^6 (a^4 + b^4)^9 \leq (a^3 + b^3)^{16} \end{aligned}$$

ですからここで  $\frac{a}{b} = x$  とおけば

$$C_{6,16} \leq C_{6,9} \Leftrightarrow 2^7 x^6 (x^4 + 1)^9 \leq (x^3 + 1)^{16} \quad (x > 0)$$

です。そこで

$$A(x) = \frac{x^6 (x^4 + 1)^9}{(x^3 + 1)^{16}}$$

と置いて、 $x > 0$  で  $A(x) \leq \frac{1}{2^7}$  であるかどうかを見てみましょう。

微分すると

$$\begin{aligned} A'(x) &= -\frac{6x^5 (x^4 + 1)^8 (x^7 - 7x^4 + 7x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^{17}} \\ &= -\frac{6x^5 (x^4 + 1)^8 (x - 1)^3 (x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 1)}{(x^3 + 1)^{17}} \end{aligned}$$

ですから、 $x > 0$  の範囲で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみであり、増減表は

|         |   |            |                 |            |
|---------|---|------------|-----------------|------------|
| $x$     | 0 | ...        | 1               | ...        |
| $A'(x)$ | 0 | +          | 0               | -          |
| $A(x)$  | 0 | $\nearrow$ | $\frac{1}{2^7}$ | $\searrow$ |

となりますから、確かに成り立っています。従って  $C_{6,16} \leq C_{6,9}$  が成り立っています。

次に  $C_{6,10} \leq C_{6,15}$  が成り立つかどうかです。これは power mean 不等式により簡単に分かります：

$$\begin{aligned} C_{6,15}^{150} &= \left( \frac{a^6 b^9 + a^9 b^6}{2} \right)^{10} \\ &= (ab)^{60} \left( \frac{a^3 + b^3}{2} \right)^{10} \\ &= (ab)^{60} M_3^{30} \\ &\geq (ab)^{60} M_2^{30} \\ &= (ab)^{60} \left( \frac{a^2 + b^2}{2} \right)^{15} \\ &= \left( \frac{a^6 b^4 + a^4 b^6}{2} \right)^{15} \\ &= C_{6,10}^{150} \end{aligned}$$

#### 事実 9.6.2

$$C_{6,10} \leq C_{6,15} \leq C_{6,16} \leq C_{6,9}$$

### 9.6.4 $C_{6,9}, C_{6,18}$

元になっている  $C_{2,3} \leq C_{2,6}$  が『きっちり』していたので、ここも『きっちり』して精度はあるように思われますが、念のため計算してみましょう。

$$\begin{aligned} C_{6,9} \leq C_{6,17} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^6 b^3 + a^3 b^6}{2} \right)^{17} \leq \left( \frac{a^6 b^{11} + a^{11} b^6}{2} \right)^9 \\ &(ab)^{51} (a^3 + b^3)^{17} \leq 2^8 (ab)^{54} (a^5 + b^5)^9 \\ &(a^3 + b^3)^{17} \leq 2^8 (ab)^3 (a^5 + b^5)^9 \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x$  と置いて

$$(x^3 + 1)^{17} \leq 2^8 x^3 (x^5 + 1)^9$$

が任意の  $x > 0$  で成り立つかどうかを見ますが、右辺は 48 次、左辺は 51 次ですから、やはり成り立ちません。

**事実 9.6.3**

$$C_{6,9} \not\leq C_{6,17}, \quad C_{6,9} \leq C_{6,18}$$

**9.6.5**  $C_{6,8}$  と  $C_{6,18}, C_{6,24}$ 

$C_{3,9} \leq C_{3,4}$  は『微妙』でしたから  $C_{6,18} \leq C_{6,8}$  の精度は分かりません。一方  $C_{3,4} \leq C_{3,12}$  は『きっちり』だったので  $C_{6,8} \leq C_{6,24}$  は大丈夫でしょう。

まず  $C_{6,19} \leq C_{6,8}$  がどうか見てみましょう。

$$\begin{aligned} C_{6,19} \leq C_{6,8} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^6 b^{13} + a^{13} b^6}{2} \right)^8 \leq \left( \frac{a^6 b^2 + a^2 b^6}{2} \right)^{19} \\ &2^{11} (ab)^{48} (a^7 + b^7)^8 \leq (ab)^{38} (a^4 + b^4)^{19} \\ &2^{11} (ab)^{10} (a^7 + b^7)^8 \leq (a^4 + b^4)^{19} \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x$  と置いて

$$\begin{aligned} 2^{11} x^{10} (x^7 + 1)^8 &\leq (x^4 + 1)^{19} \\ \frac{x^{10} (x^7 + 1)^8}{(x^4 + 1)^{19}} &\leq \frac{1}{2^{11}} \end{aligned}$$

が任意の  $x > 0$  で成り立つかどうかを見ますが、左辺は有界ではありますが以下に見るように  $x = 1$  で下に凸になっています。

$$A(x) = \frac{x^{10} (x^7 + 1)^8}{(x^4 + 1)^{19}}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{\{10x^9(x^7 + 1)^8 + x^{10}8(x^7 + 1)^7 7x^6\} (x^4 + 1)^{19} - x^{10} (x^7 + 1)^8 19(x^4 + 1)^{18} 4x^3}{(x^4 + 1)^{38}} \\ &= \frac{(66x^7 + 10)(x^4 + 1) - 76x^4(x^7 + 1)}{(x^4 + 1)^{20}} x^9 (x^7 + 1)^7 \\ &= -\frac{x^9 (x^7 + 1)^7}{(x^4 + 1)^{20}} (10x^{11} - 66x^7 + 66x^4 - 10) \end{aligned}$$

$$A'(1) = 0$$

ですから、

$$A'(x) = B(x) (10x^{11} - 66x^7 + 66x^4 - 10)$$

と置けば、

$$A''(1) = B(1)(10 \cdot 11 - 66 \cdot 7 + 66 \cdot 4) > 0$$

ですから、 $A(x)$  は  $x = 1$  で極小値であることが分かります。従って不等式は成り立ちません。

**事実 9.6.4**

$$C_{6,19} \not\leq C_{6,8}, \quad C_{6,18} \leq C_{6,8}$$

次に  $C_{6,8} \leq C_{6,23}$  が成り立つかどうかを見てみましょう。

$$\begin{aligned} C_{6,8} \leq C_{6,23} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^6 b^2 + a^2 b^6}{2} \right)^{23} \leq \left( \frac{a^6 b^{17} + a^{17} b^6}{2} \right)^8 \\ &(ab)^{46} (a^4 + b^4)^{23} \leq 2^{17} (ab)^{48} (a^{11} + b^{11})^8 \\ &(a^4 + b^4)^{23} \leq 2^{17} (ab)^2 (a^{11} + b^{11})^8 \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x$  と置いて

$$(x^4 + 1)^{23} \leq 2^{17} x^2 (x^{11} + 1)^8$$

を見るのですが、左辺は 92 次、右辺は 90 次なのでこれは成り立ちません。やはり 24 できっちりだったようです。

**事実 9.6.5**

$$C_{6,8} \not\leq C_{6,23}, \quad C_{6,8} \leq C_{6,24}$$

**9.6.6**  $C_{6,6}, C_{6,24}$  具体的な計算

$C_{6,m} \leq C_{6,6}$  となる  $m > 12$  の最大値を求めてみましょう。

$$\begin{aligned} C_{6,m} \leq C_{6,6} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^6 b^{m-6} + a^{m-6} b^6}{2} \right)^6 \leq \left( \frac{a^6 + b^6}{2} \right)^m \\ &2^{m-6} (ab)^{36} (a^{m-12} + b^{m-12})^6 \leq (a^6 + b^6)^m \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x$  と置いて

$$2^{m-6}x^{36}(x^{m-12}+1)^6 \leq (x^6+1)^m$$

$$\frac{x^{36}(x^{m-12}+1)^6}{(x^6+1)^m} \leq \frac{1}{2^{m-6}}$$

が任意の  $x > 0$  で成立するためには有界な左辺の最大値が問題となります。

$m = 25$  のときこれは

$$\frac{x^{36}(x^{13}+1)^6}{(x^6+1)^{25}} \leq \frac{1}{2^{19}}$$

であり、左辺を  $A(x)$  と置けば以下に示すように  $x = 1$  で下に凸で極小値となっており、不等式は成り立ちません。

$$A(x) = \frac{x^{36}(x^{13}+1)^6}{(x^6+1)^{25}}$$

$$A'(x) = \frac{\{36x^{35}(x^{13}+1)^6 + x^{36}6(x^{13}+1)^5 13x^{12}\}(x^6+1)^{25} - x^{36}(x^{13}+1)^6 25(x^6+1)^{24}6x^5}{(x^6+1)^{50}}$$

$$= -\frac{6x^{35}(x^{13}+1)^5(6x^{19}-19x^{13}+19x^6-6)}{(x^6+1)^{26}}$$

なので  $A'(1) = 0$  であって、ここで

$$A'(x) = (6x^{19}-19x^{13}+19x^6-6)B(x)$$

$$B(x) = -\frac{6x^{35}(x^{13}+1)^5}{(x^6+1)^{26}}$$

と置けば、

$$A''(x) = (114x^{18}-247x^{12}+114x^5)B(x) + (6x^{19}-19x^{13}+19x^6-6)B'(x)$$

$$A''(1) = -19 \left( -\frac{6 \cdot 2^5}{2^{26}} \right) > 0$$

となっていますから、 $A(x)$  は  $x = 1$  で極小値  $A(1) = \frac{1}{2^{19}}$  であることが分かります。

ちなみに  $m = 24$  の場合は

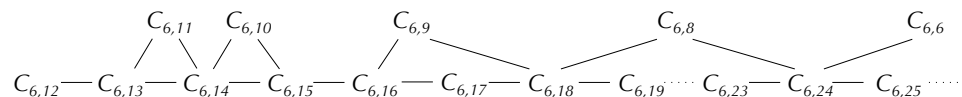
$$C_{6,6}^{24} - C_{6,24}^{24} = \left( \frac{a^6+b^6}{2} \right)^4 - \frac{a^6b^{18}+a^{18}b^6}{2}$$

$$= \frac{b^{24}}{2^4} \left\{ \left( \frac{a^6}{b^6} + 1 \right)^4 - 8 \left( \frac{a^6}{b^6} + \frac{a^{18}}{b^{18}} \right) \right\}$$

$$= \frac{b^{24}}{2^4} \left( \frac{a^6}{b^6} - 1 \right)^4$$

$$\geq 0$$

となってやはり『きっちり』になっています。



### 9.6.7 $C_{6,6}, C_{6,24}$ 一般的な計算

今後のために、計算を一般的にやってみましょう。 $m > 12$  に対して

$$C_{6,m} \leq C_{6,6} \Leftrightarrow 2^{m-6}(ab)^{36}(a^{m-12}+b^{m-12})^6 \leq (a^6+b^6)^m$$

であり、

$$\frac{x^{36}(x^{m-12}+1)^6}{(x^6+1)^m} \leq \frac{1}{2^{m-6}}$$

が任意の  $x > 0$  で成立する最大の  $m$  を求めることになりますが、左辺の有理関数は分子が  $6m-36$  次、分母が  $6m$  次であって有界なので、( $x > 0$  での) 最大値が右辺 ( $= A(1)$ ) になるかどうか問題です。

$$A_m(x) = \frac{x^{36}(x^{m-12}+1)^6}{(x^6+1)^m}$$

と置けば、

$$A'(x) = \frac{\{36x^{35}(x^{m-12}+1)^6 + x^{36}6(x^{m-12}+1)^5(m-12)x^{m-13}\}(x^6+1)^m - x^{36}(x^{m-12}+1)^6 m(x^6+1)^{m-1}6x^5}{(x^6+1)^{2m}}$$

$$= \frac{6x^{35}(x^{m-12}+1)^5 \{ \{6(x^{m-12}+1) + (m-12)x^{m-12}\}(x^6+1) - mx^6(x^{m-12}+1) \}}{(x^6+1)^{m+1}}$$

$$= \frac{6x^{35}(x^{m-12}+1)^5 \{-6x^{m-6} + (6-m)x^6 + (m-6)x^{m-12} + 6\}}{(x^6+1)^{m+1}}$$

となっていますから、ここで

$$A'(x) = \{-6x^{m-6} + (6-m)x^6 + (m-6)x^{m-12} + 6\} B(x)$$

と置けば、

$$A''(x) = \{-6(m-6)x^{m-7} + (6-m)6x^5 + (m-6)(m-12)x^{m-13}\} B(x) \\ + \{-6x^{m-6} + (6-m)x^6 + (m-6)x^{m-12} + 6\} B'(x)$$

$$A''(1) = \{-6(m-6) + (6-m)6 + (m-6)(m-12)\} B(1)$$

$$= (m^2 - 30m + 144) \left( \frac{6 \cdot 2^5}{2^{m+1}} \right) \\ = (m-6)(m-24) \frac{3}{2^{m-5}}$$

が分かりますから、少なくとも  $13 \leq m \leq 24$  の範囲では  $A(1)$  は極大値であり、 $25 \leq m$  のときは  $A(1)$  は最大値にはなりません。具体的な計算で出て来た結果を一般的な条件として（大まかに）再現出来ています。『大まか』と言ったのは、『極大値』が最大値とは限らないからで、この点を一般的に導き出すにはどうするかが残された課題です。

### 9.6.8 $C_{6,8}$ 一般的な計算

$m \geq 12$  とします。

$$C_{6,m} \leq C_{6,8} \Leftrightarrow \left( \frac{a^6 b^{m-6} + a^{m-6} b^6}{2} \right)^8 \leq \left( \frac{a^6 b^2 + a^2 b^6}{2} \right)^m \\ 2^{m-8} (ab)^{48} (a^{m-12} + b^{m-12})^8 \leq (ab)^{2m} (a^4 + b^4)^m \\ 2^{m-8} (ab)^{48-2m} (a^{m-12} + b^{m-12})^8 \leq (a^4 + b^4)^m$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば

$$2^{m-8} x^{48-2m} (x^{m-12} + 1)^8 \leq (x^4 + 1)^m \\ \frac{x^{48-2m} (x^{m-12} + 1)^8}{(x^4 + 1)^m} \leq \frac{1}{2^{m-8}}$$

です。従って  $m \leq 24$  の場合も  $m > 24$  の場合も、分子の次数が分母よりも低いための条件は  $m < 24$  となります。 $m = 24$  のときは分子と分母は同じ次数です。 $m \geq 25$  のときは分子の方が次数が高いため、左辺は有界ではあり得ません。

そこで  $m \leq 24$  と仮定して話を進めます。このとき左辺は有界な有理関数ですからこれを  $A_m(x)$  と置いて、 $A_m(x)$  の  $x > 0$  での最大値が問題となります。

$$A_m(x) \\ = \frac{x^{48-2m} (x^{m-12} + 1)^8}{(x^4 + 1)^m} \\ A'_m(x) \\ = \frac{\{(48-2m)x^{47-2m}(x^{m-12} + 1)^8 + x^{48-2m} 8(x^{m-12} + 1)^7(m-12)x^{m-13}\} (x^4 + 1)^m - x^{48-2m} (x^{m-12} + 1)^8 m (x^4 + 1)^{m-1} 4x^3}{(x^4 + 1)^{2m}} \\ = \frac{x^{47-2m} (x^{m-12} + 1)^7 \{(48-2m)(x^{m-12} + 1) + x^{m-12} 8(m-12)\} (x^4 + 1) - 4mx^4 (x^{m-12} + 1)}{(x^4 + 1)^{m+1}} \\ = \frac{x^{47-2m} (x^{m-12} + 1)^7 \{(6m-48)x^{m-12} + 48-2m\} (x^4 + 1) - 4mx^4 (x^{m-12} + 1)}{(x^4 + 1)^{m+1}} \\ = \frac{x^{47-2m} (x^{m-12} + 1)^7 \{(2m-48)x^{m-8} + (6m-48)x^{m-12} + (48-6m)x^4 + 48-2m\}}{(x^4 + 1)^{m+1}} \\ = \frac{2x^{47-2m} (x^{m-12} + 1)^7 \{(m-24)x^{m-8} + (3m-24)x^{m-12} + (24-3m)x^4 + 24-m\}}{(x^4 + 1)^{m+1}}$$

ここで

$$A'(x) = \{(m-24)x^{m-8} + (3m-24)x^{m-12} + (24-3m)x^4 + 24-m\} B(x)$$

と置けば、

$$A''(1) = \{(m-24)(m-8) + (3m-24)(m-12) + 4(24-3m)\} B(1) \\ = (4m^2 - 104m + 24^2) \left( \frac{2^8}{2^{m+1}} \right) \\ = 4(m^2 - 26m + 12^2) 2^{7-m} \\ = 4(m-18)(m-8) 2^{7-m}$$

ですから、 $m \geq 19$  では  $A''(1) > 0$  となり、 $A(1)$  は極小値ですから  $C_{6,m} \leq C_{6,8}$  は成り立ちません（この結果自体既に見ていますが、一般的な計算による追加確認ということです）。

$m = 18$  のときは既に見たように、不等式は成り立っています。

### 9.6.9 $C_{6,m} \leq C_{6,7}$

一般的な計算でやってみましょう。 $m \geq 13$  とします。

$$\begin{aligned} C_{6,m} \leq C_{6,7} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^6 b^{m-6} + a^{m-6} b^6}{2} \right)^7 \leq \left( \frac{a^6 b + ab^6}{2} \right)^m \\ &2^{m-7} (ab)^{42} (a^{m-12} + b^{m-12})^7 \leq (ab)^m (a^5 + b^5)^m \\ &2^{m-7} (ab)^{42-m} (a^{m-12} + b^{m-12})^7 \leq (a^5 + b^5)^m \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば

$$C_{6,m} \leq C_{6,7} \Leftrightarrow 2^{m-7} x^{42-m} (x^{m-12} + 1)^7 \leq (x^5 + 1)^m \quad (x > 0)$$

ですから、

$$D_m(x) = (x^5 + 1)^m - 2^{m-7} x^{42-m} (x^{m-12} + 1)^7$$

と置いて、 $x > 0$  での最小値を調べます。 $D_m(1) = 0$  に注意します。

$$\begin{aligned} D'_m(x) &= m(x^5 + 1)^{m-1} 5x^4 \\ &\quad - 2^{m-7} \{ (42-m)x^{41-m} (x^{m-12} + 1)^7 + x^{42-m} 7(x^{m-12} + 1)^6 (m-12)x^{m-13} \} \\ &= m(x^5 + 1)^{m-1} 5x^4 \\ &\quad - 2^{m-7} x^{41-m} (x^{m-12} + 1)^6 \{ (42-m)(x^{m-12} + 1) + 7(m-12)x^{m-12} \} \\ &= 5m(x^5 + 1)^{m-1} x^4 \\ &\quad - 2^{m-7} x^{41-m} (x^{m-12} + 1)^6 \{ (6m-42)x^{m-12} + 42-m \} \end{aligned}$$

ですから

$$D'_m(1) = 5m2^{m-1} - 2^{m-7} 2^6 5m = 0$$

となっており、

$$\begin{aligned} D''_m(x) &= 5m(m-1)(x^5 + 1)^{m-2} 5x^8 + 5m(x^5 + 1)^{m-1} 4x^3 \\ &\quad - 2^{m-7} (41-m)x^{40-m} (x^{m-12} + 1)^6 \{ (6m-42)x^{m-12} + 42-m \} \\ &\quad - 2^{m-7} x^{41-m} 6(x^{m-12} + 1)^5 (m-12)x^{m-13} \{ (6m-42)x^{m-12} + 42-m \} \\ &\quad - 2^{m-7} x^{41-m} (x^{m-12} + 1)^6 (6m-42)(m-12)x^{m-13} \\ D''_m(1) &= 25m(m-1)2^{m-2} + 20m2^{m-1} \\ &\quad - 2^{m-1} (41-m)5m - 2^{m-2} 6(m-12)5m - 2^{m-1} (6m-42)(m-12) \\ &= 2^{m-2} \{ 25m^2 + 15m - 10m(41-m) - 30m(m-12) - 2(6m-42)(m-12) \} \\ &= -2^{m-2} (7m^2 - 193m + 1008) \\ &= -2^{m-2} (m-7)(7m-144) \end{aligned}$$

ですから、 $m \leq 20$  の範囲では  $D''(1) > 0$  であって  $D_m(1) = 0$  は極小値であり、 $21 \leq m$  の範囲では  $D''_m(1) < 0$  であって  $D_m(1) = 0$  は極大値です。ここから分かることは、 $21 \leq m$  では  $C_{6,m} \leq C_{6,7}$  は成り立たないということです。

**事実 9.6.6**  $C_{6,21} \not\leq C_{6,7}$

極小値が最小値であることを示すのは難しそうですね。 $m = 20$  のケースを個別に精査するしかないでしょう。その場合、この形よりは有理関数の形の方が上手く行きそうです。

### 9.6.10 $C_{6,20} \leq C_{6,7}$

$$\begin{aligned} C_{6,20} \leq C_{6,7} &\Leftrightarrow 2^{13} x^{22} (x^8 + 1)^7 \leq (x^5 + 1)^{20} \quad (x > 0) \\ &\frac{x^{22} (x^8 + 1)^7}{(x^5 + 1)^{20}} \leq \frac{1}{2^{13}} \end{aligned}$$

ですから、

$$A(x) = \frac{x^{22} (x^8 + 1)^7}{(x^5 + 1)^{20}}$$

と置けば

$$A'(x) = -\frac{2x^{21} (x^8 + 1)^6 (11x^{13} - 39x^8 + 39x^5 - 11)}{(x^5 + 1)^{21}}$$

であり、

$$\begin{aligned} &11x^{13} - 39x^8 + 39x^5 - 11 \\ &= (x-1) (11x^{12} + 11x^{11} + 11x^{10} + 11x^9 + 11x^8 \\ &\quad - 28x^7 - 28x^6 - 28x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 11x + 11) \end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned}
& 11x^{12} + 11x^{11} + 11x^{10} + 11x^9 + 11x^8 \\
& - 28x^7 - 28x^6 - 28x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 11x + 11 \\
& = (11x^{10} - 22x^7 + 11x^4) + (11x^8 - 22x^5 + 11x^2) + (11x^{12} - 22x^6 + 11) \\
& + 11x^{11} + 11x^9 - 6x^7 - 6x^6 - 6x^5 + 11x^3 + 11x \\
& = 11x^4(x^3 - 1)^2 + 11x^2(x^3 - 1)^2 + 11(x^6 - 1)^2 \\
& + (3x^{11} - 6x^7 + 3x^3) + (3x^9 - 6x^5 + 3x) + 8x^{11} + 8x^9 - 6x^6 + 8x^3 + 8x \\
& = 11x^4(x^3 - 1)^2 + 11x^2(x^3 - 1)^2 + 11(x^6 - 1)^2 \\
& + 3x^3(x^4 - 1)^2 + 3x(x^4 - 1)^2 + (3x^{11} - 6x^6 + 3x) + 5x^{11} + 8x^9 + 8x^3 + 5x \\
& = 11x^4(x^3 - 1)^2 + 11x^2(x^3 - 1)^2 + 11(x^6 - 1)^2 \\
& + 3x^3(x^4 - 1)^2 + 3x(x^4 - 1)^2 + 3x(x^5 - 1)^2 + 5x^{11} + 8x^9 + 8x^3 + 5x
\end{aligned}$$

と変形すれば、 $x > 0$  の範囲では  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみであることが分かります。

また、

$$A'(x) = (11x^{13} - 39x^8 + 39x^5 - 11) B(x)$$

と置けば、

$$\begin{aligned}
A''(x) &= (11 \cdot 13x^{12} - 39 \cdot 8x^7 + 39 \cdot 5x^4)B(x) + (11x^{13} - 39x^8 + 39x^5 - 11) B'(x) \\
A''(1) &= (11 \cdot 13 - 39 \cdot 8 + 39 \cdot 5)B(1) \\
&= 26 \left( -\frac{2^7}{2^{21}} \right) \\
&< 0
\end{aligned}$$

なので、 $A(1)$  は極大値であり、増減を考えればこれは  $x > 0$  での最大値になっています。

**事実 9.6.7**  $C_{6,20} \leq C_{6,7}$

### 9.6.11 $C_{6,7} \leq C_{6,m}$

次に  $C_{6,7} \leq C_{6,m}$  となる  $m$  の最小値を考えます。一般的な計算でやってみましょう。とりあえず  $m \geq 13$  とします。

$$\begin{aligned}
C_{6,7} \leq C_{6,m} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^6b + ab^6}{2} \right)^m \leq \left( \frac{a^6b^{m-6} + a^{m-6}b^6}{2} \right)^7 \\
&\quad (ab)^m (a^5 + b^5)^m \leq 2^{m-7} (ab)^{42} (a^{m-12} + b^{m-12})^7 \\
&\quad (a^5 + b^5)^m \leq 2^{m-7} (ab)^{42-m} (a^{m-12} + b^{m-12})^7 \\
&\quad \frac{(a^5 + b^5)^m}{(ab)^{42-m} (a^{m-12} + b^{m-12})^7} \leq 2^{m-7}
\end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば

$$C_{6,7} \leq C_{6,m} \Leftrightarrow \frac{(x^5 + 1)^m}{x^{42-m} (x^{m-12} + 1)^7} \leq 2^{m-7} \quad (x > 0)$$

となります。ここで左辺の分子・分母の次数を見ると、 $42 \leq m$  でなければ左辺は有界にはなりません。ですから、 $m \geq 42$  の場合を考えと

であり、

$$A(x) = \frac{x^{m-42}(x^5 + 1)^m}{(x^{m-12} + 1)^7}$$

と置けば、

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{\{(m-42)x^{m-43}(x^5 + 1)^m + x^{m-42}m(x^5 + 1)^{m-1}5x^4\}(x^{m-12} + 1)^7 - x^{m-42}(x^5 + 1)^m 7(x^{m-12} + 1)^6(m-12)x^{m-13}}{(x^{m-12} + 1)^{14}} \\
&= \frac{(x^5 + 1)^{m-1}x^{m-43} \{ \{(m-42)(x^5 + 1) + 5mx^5\}(x^{m-12} + 1) - 7(m-12)(x^5 + 1)x^{m-12} \}}{(x^{m-12} + 1)^8} \\
&= \frac{(x^5 + 1)^{m-1}x^{m-43} \{ \{(6m-42)x^5 + m-42\}(x^{m-12} + 1) - 7(m-12)(x^5 + 1)x^{m-12} \}}{(x^{m-12} + 1)^8} \\
&= -\frac{(x^5 + 1)^{m-1}x^{m-43} \{ (m-42)x^{m-7} + (6m-42)x^{m-12} - (6m-42)x^5 - m + 42 \}}{(x^{m-12} + 1)^8}
\end{aligned}$$

であり、 $A'(1) = 0$  となっています。また、

$$A'(x) = \{(m-42)x^{m-7} + (6m-42)x^{m-12} - (6m-42)x^5 - m + 42\} B(x)$$

と置けば  $m \geq 42$  のとき

$$\begin{aligned}
 A''(1) &= \{(m-42)(m-7) + (6m-42)(m-12) - 5(6m-42)\} B(1) \\
 &= (7m^2 - 193m + 1008) \frac{-2^{m-1}}{2^8} \\
 &= (m-7)(7m-144) \frac{-2^{m-1}}{2^8} \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

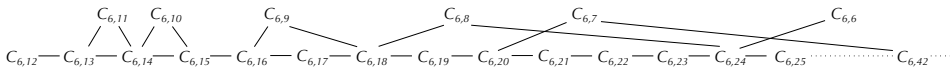
です。従って  $A(1)$  は極大値です。また、

$$\begin{aligned}
 &(m-42)x^{m-7} + (6m-42)x^{m-12} - (6m-42)x^5 - m + 42 \\
 &= (m-42)(x^{m-7} - 1) + (6m-42)x^5(x^{m-7} - 1) \\
 &= \{(6m-42)x^5 + m - 42\} (x-1)(x^{m-8} + \cdots + 1)
 \end{aligned}$$

と変形されるので、 $A'(x) = 0$  となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみであり、増減を考えれば先の極大値は  $x > 0$  での最大値です。

**事実 9.6.8**  $C_{6,7} \leq C_{6,42}, \quad C_{6,7} \not\leq C_{6,41}$

いきなり大きな値が出て来ましたね。 $C_{6,7}$  のクロス具合といい、難しくなって来ました。



## 9.7 $m = 5$

### 事実 9.7.1

$$\begin{aligned}
 C_{m,2m+1} &\leq C_{m,2m-1} \\
 C_{m,2m+2} &\leq C_{m,2m-2} \\
 C_{2m+1,4m+4} &\leq C_{m,2m+2} \\
 C_{m,4m} &\leq C_{m,m} \\
 C_{m,2m} &\leq C_{m,2m-1} \leq \cdots \leq C_{m,m+1} \leq C_{m,m} \\
 C_{m,2m} &\leq C_{m,2m+1} \leq \cdots \\
 C_{m,n} \leq C_{p,r} &\Leftrightarrow C_{km,kn} \leq C_{kp,kr}
 \end{aligned}$$

一般的な定理から分かっていることは以下の通り：

$$C_{5,5} \geq \cdots \geq C_{5,9} \geq C_{5,10} \leq C_{5,11} \leq \cdots$$

$$C_{5,11} \leq C_{5,9}, \quad C_{5,12} \leq C_{5,8}, \quad C_{5,12} \leq C_{2,6}, \quad C_{5,20} \leq C_{5,5}$$

### 9.7.1 $C_{5,n} \leq C_{5,r}$ 一般的な計算

$n > 10 > r \geq 5$  と仮定します。

$$\begin{aligned}
 C_{5,n} \leq C_{5,r} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^5 b^{n-5} + a^{n-5} b^5}{2} \right)^r \leq \left( \frac{a^5 b^{r-5} + a^{r-5} b^5}{2} \right)^n \\
 (ab)^{5r} \left( \frac{a^{n-10} + b^{n-10}}{2} \right)^r &\leq (ab)^{(r-5)n} \left( \frac{a^{10-r} + b^{10-r}}{2} \right)^n \\
 2^{n-r} (ab)^{5r} (a^{n-10} + b^{n-10})^r &\leq (ab)^{(r-5)n} (a^{10-r} + b^{10-r})^n
 \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば、

$$\begin{aligned}
 C_{5,n} \leq C_{5,r} &\Leftrightarrow 2^{n-r} x^{5r} (x^{n-10} + 1)^r \leq x^{(r-5)n} (x^{10-r} + 1)^n \\
 \frac{x^{5r} (x^{n-10} + 1)^r}{x^{(r-5)n} (x^{10-r} + 1)^n} &\leq 2^{r-n}
 \end{aligned}$$

ですから、少なくとも分母の次数が分子の次数より低い場合はこの不等式は成立しません。つまり

$$5r + (n - 10)r > (r - 5)n + (10 - r)n \\ 0 > 5r + 5n - rn$$

の場合は  $C_{5,n} \not\leq C_{5,r}$  です：

$$C_{5,31} \not\leq C_{5,6}, \quad C_{5,18} \not\leq C_{5,7}, \quad C_{5,14} \not\leq C_{5,8}, \quad C_{5,12} \not\leq C_{5,9}$$

$5r + 5n - rn \geq 0$  の場合は最大値の吟味が必要です。

$$A_{r,n}(x) = \frac{x^{5r+5n-rn}(x^{n-10} + 1)^r}{(x^{10-r} + 1)^n} \leq 2^{r-n} = A_{r,n}(1) \quad (x > 0)$$

が成り立つかどうかを調べます。

$$A'_{r,n}(x) = -\frac{x^{5r+5n-rn-1}(x^{n-10} + 1)^{r-1}}{(x^{10-r} + 1)^{n+1}} \\ \{ (5r + 5n - rn)x^{n-r} - 5(n-r)x^{n-10} + 5(n-r)x^{10-r} - (5r + 5n - rn) \} \\ = B(x) \{ (5r + 5n - rn)x^{n-r} - 5(n-r)x^{n-10} + 5(n-r)x^{10-r} - (5r + 5n - rn) \} \\ A'_{r,n}(1) = 0 \\ A''_{r,n}(1) = B(1)(n-r)(100-rn) \\ = (-2^{r-n-2})(n-r)(100-rn)$$

$rn = 100$  となる  $(r, n)$  の組み合わせは以下の通り：

$$(5, 20), \quad (6, 16.6), \quad (7, 14.3), \quad (8, 12.5), \quad (9, 11.1)$$

まず  $100 < rn$  では  $A''_{r,n}(1) > 0$  となり、 $A(1)$  は極小値ということになって、 $A(1)$  は最大値にはなり得ません。結果（先の結果を含んでいますね）：

$$C_{5,21} \not\leq C_{5,5}, \quad C_{5,17} \not\leq C_{5,6}, \quad C_{5,15} \not\leq C_{5,7}, \quad C_{5,13} \not\leq C_{5,8}, \quad C_{5,12} \not\leq C_{5,9}$$

従ってその隣はどうか、つまり次が成り立つかどうかですが：

$$C_{5,20} \stackrel{?}{\leq} C_{5,5}, \quad C_{5,16} \stackrel{?}{\leq} C_{5,6}, \quad C_{5,14} \stackrel{?}{\leq} C_{5,7}, \quad C_{5,12} \stackrel{?}{\leq} C_{5,8}, \quad C_{5,11} \stackrel{?}{\leq} C_{5,9}$$

このうちまだ分かっていないのは

$$C_{5,16} \stackrel{?}{\leq} C_{5,6}, \quad C_{5,14} \stackrel{?}{\leq} C_{5,7}$$

です。

$100 > rn$  の場合は  $A''_{r,n}(1) < 0$  ですから、 $A(1)$  は極大値になっています。あとはこれが最大値であることを示さねばなりません。これは

$$C_{5,19} \stackrel{?}{\leq} C_{5,5}, \quad C_{5,16} \stackrel{?}{\leq} C_{5,6}, \quad C_{5,14} \stackrel{?}{\leq} C_{5,7}, \quad C_{5,12} \stackrel{?}{\leq} C_{5,8}, \quad C_{5,11} \stackrel{?}{\leq} C_{5,9}$$

の場合であり、この中で確認されていないのは

$$C_{5,16} \stackrel{?}{\leq} C_{5,6}, \quad C_{5,14} \stackrel{?}{\leq} C_{5,7}$$

です。

$rn = 100$  となる場合は2階微分の判定では不明ですが、この場合は  $r = 5, n = 20$  しかなく、この場合は既に分かっています。

### 9.7.2 $C_{5,16} \leq C_{5,6}$

$$C_{5,16} \leq C_{5,6} \quad \Leftrightarrow \quad A_{6,16}(x) = \frac{x^{14}(x^6 + 1)^6}{(x^4 + 1)^{16}} \leq 2^{-10} \quad (x > 0)$$

$$A'_{6,16}(x) = (14x^{10} - 50x^6 + 50x^4 - 14) \left\{ -\frac{x^{13}(x^6 + 1)^5}{(x^4 + 1)^{17}} \right\}$$

ここで、

$$14x^{10} - 50x^6 + 50x^4 - 14 = 14(x^{10} - 1) - 50x^4(x^2 - 1) \\ = 14(x^2 - 1)(x^8 + x^6 + \cdots + 1) - 50x^4(x^2 - 1) \\ = (x^2 - 1)(14x^8 + 14x^6 - 36x^4 + 14x^2 + 14)$$

であり、

$$14x^8 + 14x^6 - 36x^4 + 14x^2 + 14 = (14x^8 + 14 - 18x^4) + (14x^6 + 14x^2 - 18x^4) \\ \geq 28x^4 - 18x^4 + 28x^4 - 18x^4 \\ = 20x^4 \\ > 0$$

によれば、 $x > 0$  において  $A'_{6,16}(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみであって、 $0 < x < 1$  で  $A'_{6,16}(x) > 0$ 、 $1 < x$  で  $A'_{6,16}(x) < 0$  ですから、 $A_{6,16}(x)$  は  $x = 1$  で最大値であることが分かります。従って  $C_{5,16} \leq C_{5,6}$  は成立します。等号は  $x = 1$  のときのみですから、これは  $a = b$  に対応しています。

**事実 9.7.2**  $C_{5,16} \leq C_{5,6}$

**9.7.3**  $C_{5,14} \leq C_{5,7}$

$$C_{5,14} \leq C_{5,7} \Leftrightarrow A_{7,14}(x) = \frac{x^7(x^4+1)^7}{(x^3+1)^{14}} \leq 2^{-7} \quad (x > 0)$$

ですが、

$$A(x) = \frac{x(x^4+1)}{(x^3+1)^2}$$

と置けば

$$A'(x) = (x^7 - 5x^4 - 5x^3 - 1) \left\{ -\frac{1}{(x^3+1)^3} \right\}$$

であって、

$$\begin{aligned} x^7 - 5x^4 + 5x^3 - 1 &= x^7 - 1 - 5x^3(x-1) \\ &= (x-1)(x^6 + \cdots + 1 - 5x^3) \\ &= (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 1 &= (x^6 + 1 - 2x^3) + (x^5 + x - 2x^3) + (x^4 + x^2) \\ &\geq 0 + 0 + x^4 + x^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

ですから、 $x > 0$  で  $A'(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみです。増減を考えれば  $A(x)$  は  $x = 1$  で最大値  $2^{-1}$  ですから、 $A_{7,14}(x)$  は  $x = 1$  で最大値  $2^{-7}$  です。

従って  $C_{5,14} \leq C_{5,7}$  は成立します。等号は  $x = 1$  のときのみですから、これは  $a = b$  に対応しています。

**事実 9.7.3**  $C_{5,14} \leq C_{5,7}$

**9.7.4**  $C_{5,19} \leq C_{5,5}$  (既出ですが、やってみたので載せて置きます)

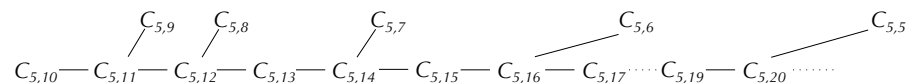
$$C_{5,19} \leq C_{5,5} \Leftrightarrow A_{5,19}(x) = \frac{x^{25}(x^9+1)^5}{(x^5+1)^{19}} \leq 2^{-14} \quad (x > 0)$$

$$A'_{5,19}(x) = (25x^{14} - 60x^9 + 60x^5 - 25) \left\{ -\frac{x^{24}(x^9+1)^5}{(x^5+1)^{19}} \right\}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &25x^{14} - 60x^9 + 60x^5 - 25 \\ &= 5(5x^{14} - 12x^9 + 12x^5 - 5) \\ &= 5 \{ 5(x^{14} - 1) - 12x^5(x^4 - 1) \} \\ &= 5(x-1) \{ 5(x^{13} + \cdots + 1) - 12x^5(x^3 + \cdots + 1) \} \\ &= 5(x-1)(5x^{13} + \cdots + 5x^9 - 7x^8 - \cdots - 7x^5 + 5x^4 + \cdots + 5) \\ &= 5(x-1) \{ 5x^{13} + 5 + (5x^{12} + 5x^4 - 7x^8) + (5x^{11} + 5x^3 - 7x^7) \\ &\quad + (5x^{10} + 5x^2 - 7x^6) + (5x^9 + 5x - 7x^5) \} \\ &\geq 5(x-1) \{ 5x^{13} + 5 + (10x^8 - 7x^8) + (10x^7 - 7x^7) + (10x^6 - 7x^6) + (10x^5 - 7x^5) \} \\ &= 5(x-1)(x^{13} + 5 + 3x^8 + 3x^7 + 3x^6 + 3x^5) \end{aligned}$$

によれば、 $x > 0$  において  $A'_{5,19}(x) = 0$  となるのは  $x = 1$  のみであって、 $0 < x < 1$  で  $A'_{5,19}(x) > 0$ 、 $1 < x$  で  $A'_{5,19}(x) < 0$  ですから、 $A_{5,19}(x)$  は  $x = 1$  で最大値であることが分かります。従って  $C_{5,19} \leq C_{5,5}$  は成立します。等号は  $x = 1$  のときのみですから、これは  $a = b$  に対応しています。



**9.7.5** 多項式の正値性

今の3例で同じような評価がありましたので、一般化出来ないか見てみましょう。

$$L(x) = (5r + 5n - rn)x^{n-r} - 5(n-r)x^{n-10} + 5(n-r)x^{10-r} - (5r + 5n - rn) \neq 0$$

が  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  で言えてくれると助かります ( $5r + 5n - rn \geq 0$ )。

$$\begin{aligned} L(x) &= (5r + 5n - rn)x^{n-r} - 5(n-r)x^{n-10} + 5(n-r)x^{10-r} - (5r + 5n - rn) \\ &= (5r + 5n - rn)(x^{n-r} - 1) - 5(n-r)(x^{n-10} - x^{10-r}) \end{aligned}$$

$n - 10 = 10 - r$  すなわち  $n + r = 20$  のときは

$$\begin{aligned} L(x) &= (5r + 5n - rn)x^{n-r} - (5r + 5n - rn) \\ &= (5r + 5n - rn)(x^{n-r} - 1) \\ &= (5r + 5n - rn)(x - 1)(x^{n-r-1} + \cdots + 1) \end{aligned}$$

ですから、 $L(x) = 0$  となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみです。

$n - 10 > 10 - r$  すなわち  $n + r > 20$  のときは

$$\begin{aligned} L(x) &= (5r + 5n - rn)(x^{n-r} - 1) - 5(n - r)x^{10-r}(x^{n+r-20} - 1) \\ &= (x - 1)\{(5r + 5n - rn)(x^{n-r-1} + \cdots + 1) \\ &\quad - 5(n - r)x^{10-r}(x^{n+r-21} + \cdots + 1)\} \\ &= (x - 1)\{(5r + 5n - rn)(x^{n-r-1} + \cdots + 1) \\ &\quad - 5(n - r)(x^{n-11} + \cdots + x^{10-r})\} \\ &= (x - 1)\underbrace{\{(5r + 5n - rn)(x^{n-r-1} + \cdots + x^{n-10})\}}_{10-r \text{ 個}} \\ &\quad - \underbrace{(n - 10)r(x^{n-11} + \cdots + x^{10-r})}_{n+r-20 \text{ 個}} \\ &\quad + \underbrace{(5r + 5n - rn)(x^{9-r} + \cdots + 1)}_{10-r \text{ 個}} \} \end{aligned}$$

ですからこれは難しいですね。 $n + r < 20$  のときも同様の難しさでしょうか。  
一旦中断しましょう。

### 9.7.6 $C_{5,r} \leq C_{5,n}$ 一般的な計算

$$\begin{aligned} C_{5,n} \geq C_{5,r} &\Leftrightarrow \left(\frac{a^5b^{n-5} + a^{n-5}b^5}{2}\right)^r \geq \left(\frac{a^5b^{r-5} + a^{r-5}b^5}{2}\right)^n \\ (ab)^{5r} \left(\frac{a^{n-10} + b^{n-10}}{2}\right)^r &\geq (ab)^{(r-5)n} \left(\frac{a^{10-r} + b^{10-r}}{2}\right)^n \\ 2^{n-r}(ab)^{5r} (a^{n-10} + b^{n-10})^r &\geq (ab)^{(r-5)n} (a^{10-r} + b^{10-r})^n \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば、

$$\begin{aligned} C_{5,n} \geq C_{5,r} &\Leftrightarrow 2^{n-r}x^{5r}(x^{n-10} + 1)^r \geq x^{(r-5)n}(x^{10-r} + 1)^n \\ 2^{n-r} &\geq \frac{x^{(r-5)n}(x^{10-r} + 1)^n}{x^{5r}(x^{n-10} + 1)^r} \end{aligned}$$

ですから、少なくとも分母の次数が分子の次数より低い場合は右辺の有理関数は（上に）有界ではないため、この不等式は成立しません。つまり

$$\begin{aligned} 5r + (n - 10)r &< (r - 5)n + (10 - r)n \\ nr - 5r - 5n &< 0 \end{aligned}$$

の場合は  $C_{5,n} \not\geq C_{5,r}$  です：

$$C_{5,5} \not\geq C_{5,n}, \quad C_{5,6} \not\geq C_{5,29}, \quad C_{5,7} \not\geq C_{5,17}, \quad C_{5,8} \not\geq C_{5,13}, \quad C_{5,9} \not\geq C_{5,11}$$

$rn - 5r - 5n \geq 0$  の場合は有界条件はクリアしています。ただし、最大値がそうなるかどうかはまだ分かりません。

この場合  $rn \geq 5(r + n)$  ですから、AM-GM 不等式から（ $r \neq n$  に注意します）

$$\begin{aligned} rn &\geq 5(r + n) > 10\sqrt{rn} \\ \sqrt{rn} &> 10 \\ rn &> 100 \end{aligned}$$

や

$$\begin{aligned} r + n &> 2\sqrt{rn} > 2\sqrt{5(r + n)} \\ \sqrt{r + n} &> 2\sqrt{5} \\ r + n &> 20 \end{aligned}$$

が成り立っています。

**問題 9.7.4**  $rn - 5n - 5r \geq 0$  のとき、有界な有理関数

$$A_{r,n}(x) = \frac{x^{rn-5n-5r}(x^{10-r} + 1)^n}{(x^{n-10} + 1)^r}$$

の  $x > 0$  での最大値は  $A_{r,n}(1) = 2^{n-r}$  と言えるか？

$$\begin{aligned}
A'_{r,n}(x) &= -\frac{(x^{10-r} + 1)^{n-1} x^{rn-5n-5r-1}}{(x^{n-10} + 1)^{r+1}} \\
&\quad \{(rn - 5n - 5r)x^{n-r} + 5(n-r)x^{n-10} - 5(n-r)x^{10-r} - (rn - 5n - 5r)\} \\
&= B(x) \{(rn - 5n - 5r)x^{n-r} + 5(n-r)x^{n-10} - 5(n-r)x^{10-r} - (rn - 5n - 5r)\}
\end{aligned}$$

ですが、 $rn > 100$  に注意すれば

$$\begin{aligned}
A'_{r,n}(1) &= 0 \\
A''_{r,n}(1) &= B(1) \{(rn - 5n - 5r)(n-r) + 5(n-r)(n-10) - 5(n-r)(10-r)\} \\
&= (-2^{n-r-2})(n-r)(rn-100) \\
&< 0
\end{aligned}$$

となっており、 $A_{r,n}(1)$  は極大値です。また、

$$\begin{aligned}
&(rn - 5n - 5r)x^{n-r} + 5(n-r)x^{n-10} - 5(n-r)x^{10-r} - (rn - 5n - 5r) \\
&= (rn - 5n - 5r)(x^{n-r} - 1) + 5(n-r)x^{10-r}(x^{n+r-20} - 1) \\
&= (x-1) \{(rn - 5n - 5r)(x^{n-r-1} + \dots + 1) + 5(n-r)(x^{n+r-21} + \dots + 1)\}
\end{aligned}$$

によれば、 $A'_{r,n}(x) = 0$  となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみです。

また、 $B(x) < 0$  に注意すれば、 $0 < x < 1$  では  $A'_{r,n}(x) > 0$  ですから単調増加、 $1 < x$  では  $A'_{r,n}(x) < 0$  ですから単調減少であることが分かり、確かに  $A_{r,n}(1)$  は最大値になっています。

**事実 9.7.5**  $rn - 5n - 5r \geq 0$  のとき、有界な有理関数

$$A_{r,n}(x) = \frac{x^{rn-5n-5r}(x^{10-r} + 1)^n}{(x^{n-10} + 1)^r}$$

の  $x > 0$  での最大値は  $A_{n,r}(1) = 2^{n-r}$  です。

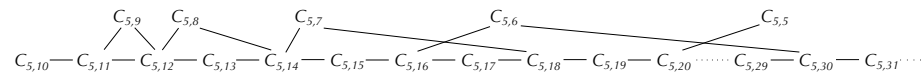
$rn \geq 5(r+n)$  となる  $(n, r)$  の組み合わせ、特に、最小の  $n$  を見ていくと、

| $r$                        | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  |
|----------------------------|---|----|----|----|----|
| $rn \geq 5(r+n)$ なる最小の $n$ | × | 30 | 18 | 14 | 12 |

ですから次が分かりました：

**事実 9.7.6**

$$C_{5,6} \leq C_{5,30}, \quad C_{5,7} \leq C_{5,18}, \quad C_{5,8} \leq C_{5,14}, \quad C_{5,9} \leq C_{5,12}.$$



## 9.8 一般の $m$

### 9.8.1 $C_{m,r} \leq C_{m,n}$ の一般的な計算

$m \leq r < 2m < n$  と仮定します。

$$\begin{aligned}
C_{m,r} \leq C_{m,n} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^m b^{r-m} + a^{r-m} b^m}{2} \right)^n \leq \left( \frac{a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m}{2} \right)^r \\
&\quad (a^m b^{r-m} + a^{r-m} b^m)^n \leq 2^{n-r} (a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m)^r \\
&\quad (ab)^{(r-m)n} (a^{2m-r} + b^{2m-r})^n \leq 2^{n-r} (ab)^{mr} (a^{n-2m} + b^{n-2m})^r
\end{aligned}$$

ですから、ここで  $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば、

$$\begin{aligned}
C_{m,r} \leq C_{m,n} &\Leftrightarrow (ab)^{(r-m)n} (x^{2m-r} + 1)^n \leq 2^{n-r} x^{mr} (x^{n-2m} + 1)^r \\
&\quad \frac{x^{rn-mn-mr} (x^{2m-r} + 1)^n}{(x^{n-2m} + 1)^r} \leq 2^{n-r} \quad (x > 0)
\end{aligned}$$

です。ここで左辺の分子・分母の次数を見ると、分子が  $rn - mn - mr + (2m - r)n$  次、分母が  $(n - 2m)r$  次ですから、不等式が成り立つためには左辺は  $x > 0$  で有界関数でなければならないため、

$$\begin{aligned}
rn - mn - mr + (2m - r)n &\leq (n - 2m)r \\
m(r + n) &\leq rn
\end{aligned}$$

でなければなりません。従って  $rn - m(r + n) \geq 0$  と仮定します。このとき、AM-GM 不等式から ( $r < n$  に注意して)

$$\begin{aligned} rn &\geq m(r + n) > m2\sqrt{rn} \\ \sqrt{rn} &> 2m \\ rn &> 4m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r + n &> 2\sqrt{rn} \geq 2\sqrt{m(r + n)} = 2\sqrt{m}\sqrt{r + n} \\ \sqrt{r + n} &> 2\sqrt{m} \\ r + n &> 4m \end{aligned}$$

が成り立っていることにも注意しておきます。

**事実 9.8.1** 不等式  $C_{m,r} \leq C_{m,n}$  は、

(i)  $rn - m(r + n) < 0$  のときは成り立ちません。

(ii)  $rn - m(r + n) \geq 0$  のときは成り立つ可能性があります。また、

$$rn > 4m^2, \quad r + n > 4m$$

も成り立っています。

そこで

$$A_{r,n}(x) = \frac{x^{rn-mn-mr}(x^{2m-r} + 1)^n}{(x^{n-2m} + 1)^r}$$

と置き、

$$m \leq r < 2m < n, \quad rn - m(r + n) \geq 0, \quad rn > 4m^2, \quad r + n > 4m$$

のときに  $A_{r,n}(x)$  の  $x > 0$  での最大値が  $A_{r,n}(1) = 2^{n-r}$  であることを示します。

$$\begin{aligned} A'_{r,n}(x) &= -\frac{x^{rn-mr-mn-1}(x^{2m-r} + 1)^{n-1}}{(x^{n-2m} + 1)^{r+1}} \\ &\quad \{(rn - mr - mn)x^{n-r} + m(n-r)x^{n-2m} - m(n-r)x^{2m-r} - (rn - mr - mn)\} \\ &= B(x) \{(rn - mr - mn)x^{n-r} + m(n-r)x^{n-2m} - m(n-r)x^{2m-r} - (rn - mr - mn)\} \end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned} &(rn - mr - mn)x^{n-r} + m(n-r)x^{n-2m} - m(n-r)x^{2m-r} - (rn - mr - mn) \\ &= (rn - mr - mn)(x^{n-r} - 1) + m(n-r)x^{2m-r}(x^{n+r-4m} - 1) \\ &= (x-1) \{(rn - mr - mn)(x^{n-r-1} + \cdots + 1) + m(n-r)x^{2m-r}(x^{n+r-4m-1} + \cdots + 1)\} \end{aligned}$$

によれば、 $A'_{r,n}(x) = 0$  となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみであり、増減表は

|      |   |            |           |            |
|------|---|------------|-----------|------------|
| $x$  | 0 | $\cdots$   | 1         | $\cdots$   |
| $A'$ |   | +          | 0         | -          |
| $A$  |   | $\nearrow$ | $2^{n-r}$ | $\searrow$ |

ですから、確かに  $A_{r,n}(x)$  の  $x > 0$  での最大値は  $A_{r,n}(1) = 2^{n-r}$  です。従って不等式  $C_{m,r} \leq C_{m,n}$  は成り立っています。

**事実 9.8.2**  $m \leq r < 2m < n$  とします。

(i)  $rn - m(r + n) < 0$  のとき  $C_{m,r} \not\leq C_{m,n}$

(ii)  $rn - m(r + n) \geq 0$  のとき  $C_{m,r} \leq C_{m,n}$

具体的に書けば以下のようにもなります；

**事実 9.8.3**  $m \leq r < 2m < n$  かつ  $rn - m(r + n) \geq 0$  であれば

$$C_{m,r} \not\leq C_{m, \lceil \frac{mr}{r-m} \rceil - 1}, \quad C_{m,r} \leq C_{m, \lceil \frac{mr}{r-m} \rceil}$$

$$C_{m, \lfloor \frac{mn}{n-m} \rfloor} \leq C_{m,n}, \quad C_{m, \lfloor \frac{mn}{n-m} \rfloor + 1} \not\leq C_{m,n}$$

です。ただし、 $\lceil x \rceil$  は  $x$  を超える最小の整数、 $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  を超えない最大の整数を表します。

**9.8.2**  $C_{m,n} \leq C_{m,m}$  となる  $n$  の最大値

$C_{m,4m} \leq C_{m,m}$  は成り立っていますから、 $n$  は  $2m$  以上です。では  $4m + 1$  はどうなのでしょうか。今まで見て来た中ではこれは成り立っていませんから、一般に言えるかも知れません。

$$C_{m,4m+1} \leq C_{m,m} \Leftrightarrow \left( \frac{a^m b^{3m+1} + a^{3m+1} b^m}{2} \right)^m \leq \left( \frac{a^m + b^m}{2} \right)^{4m+1}$$

$$2^{3m+1} (a^m b^{3m+1} + a^{3m+1} b^m)^m \leq (a^m + b^m)^{4m+1}$$

$$2^{3m+1} (ab)^{(m^2)} (a^{2m+1} + b^{2m+1})^m \leq (a^m + b^m)^{4m+1}$$

ですからここで  $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば、

$$C_{m,4m+1} \leq C_{m,m} \Leftrightarrow 2^{3m+1} x^{(m^2)} (x^{2m+1} + 1)^m \leq (x^m + 1)^{4m+1}$$

$$\frac{x^{(m^2)} (x^{2m+1} + 1)^m}{(x^m + 1)^{4m+1}} \leq 2^{-(3m+1)}$$

ですが、分子・分母の次数は、分子が  $m^2 + m(2m+1) = 3m^2 + m$  次、分母が  $m(4m+1) = 4m^2 + m$  次なので、有界条件はクリアしています。従って左辺を  $A(x)$  と置いて、 $A(1)$  が最大値でないことを示さなければなりません。しかし

$$A(x) = \frac{x^{(m^2)} (x^{2m+1} + 1)^m}{(x^m + 1)^{4m+1}}$$

$$A'(x) = -\frac{x^{m^2-1} (x^{2m+1} + 1)^{m-1}}{(x^m + 1)^{4m+2}} \{m^2 x^{3m+1} - m(3m+1)x^{2m+1} + m(3m+1)x^m - m^2\}$$

$$= B(x) \{m^2 x^{3m+1} - m(3m+1)x^{2m+1} + m(3m+1)x^m - m^2\}$$

$$A'(1) = 0$$

$$A''(1) = B(1) \{m^2(3m+1) - m(3m+1)(2m+1) + m(3m+1)m\}$$

$$= (-2^{-3m-3})m(3m+1)(m-2m-1+m)$$

$$= 2^{-3(m+1)}m(3m+1)$$

$$> 0$$

ですから、 $A(1)$  は極小値であり、最大値にはなり得ません。

**事実 9.8.4**  $C_{m,4m+1} \not\leq C_{m,m}$

## 9.9 $C_{m,n}$ と $M_n$ の関係

### 9.9.1 基本的な関係

$$C_{4,4} = \sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} = M_4$$

$$C_{4,5} = \sqrt[5]{\frac{a^4 b + ab^4}{2}} = \sqrt[5]{ab} \sqrt[5]{\frac{a^3 + b^3}{2}} = \sqrt[5]{ab} M_3^{\frac{3}{5}} = (ab)^{\frac{1}{5}} M_3^{\frac{3}{5}}$$

$$C_{4,6} = \sqrt[6]{\frac{a^4 b^2 + a^2 b^4}{2}} = \sqrt[6]{(ab)^2} \sqrt[6]{\frac{a^2 + b^2}{2}} = (ab)^{\frac{2}{6}} M_2^{\frac{2}{6}}$$

$$C_{4,7} = \sqrt[7]{\frac{a^4 b^3 + a^3 b^4}{2}} = \sqrt[7]{(ab)^3} \sqrt[7]{\frac{a + b}{2}} = (ab)^{\frac{3}{7}} M_1^{\frac{1}{7}}$$

$$C_{4,8} = \sqrt[8]{\frac{a^4 b^4 + a^4 b^4}{2}} = (ab)^{\frac{4}{8}}$$

$$C_{4,9} = \sqrt[9]{\frac{a^4 b^5 + a^5 b^4}{2}} = (ab)^{\frac{4}{9}} \sqrt[9]{\frac{a + b}{2}} = (ab)^{\frac{4}{9}} M_1^{\frac{1}{9}}$$

$$C_{4,10} = \sqrt[10]{\frac{a^4 b^6 + a^6 b^4}{2}} = (ab)^{\frac{4}{10}} \sqrt[10]{\frac{a^2 + b^2}{2}} = (ab)^{\frac{4}{10}} M_2^{\frac{2}{10}}$$

$$C_{4,16} = \sqrt[16]{\frac{a^4 b^{12} + a^{12} b^4}{2}} = (ab)^{\frac{4}{16}} \sqrt[16]{\frac{a^8 + b^8}{2}} = (ab)^{\frac{4}{16}} M_8^{\frac{8}{16}}$$

従って、一般には、 $j = 1, 2, \dots$  で

$$C_{m,2m-j} = (ab)^{\frac{m-j}{2m-j}} M_j^{\frac{j}{2m-j}}$$

$$C_{m,2m} = (ab)^{\frac{m}{2m}}$$

$$C_{m,2m+j} = (ab)^{\frac{m}{2m+j}} M_j^{\frac{j}{2m+j}}$$

となっているでしょう。

$$C_{m,2m-j}^{2m-j} = \frac{a^m b^{m-j} + a^{m-j} b^m}{2}$$

$$= (ab)^{m-j} \frac{a^j + b^j}{2}$$

$$= (ab)^{m-j} M_j^j$$

$$C_{m,2m-j} = (ab)^{\frac{m-j}{2m-j}} M_j^{\frac{j}{2m-j}}$$

$$C_{m,2m} = \sqrt[2m]{\frac{a^m b^m + a^m b^m}{2}} = (ab)^{\frac{m}{2m}}$$

$$\begin{aligned}
C_{m,2m+j} &= \frac{a^m b^{m+j} + a^{m+j} b^m}{2} \\
&= (ab)^m \frac{a^j + b^j}{2} \\
&= (ab)^m M_j^j \\
C_{m,2m+j} &= (ab)^{\frac{m}{2m+j}} M_j^{\frac{j}{2m+j}}
\end{aligned}$$

### 事実 9.9.1

$$\begin{aligned}
C_{m,2m-j} &= (ab)^{\frac{m-j}{2m-j}} M_j^{\frac{j}{2m-j}} \quad j = 1, 2, \dots, m \\
C_{m,2m} &= (ab)^{\frac{m}{2m}} \\
C_{m,2m+j} &= (ab)^{\frac{m}{2m+j}} M_j^{\frac{j}{2m+j}} \quad j = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

あるいは、

$$\begin{aligned}
C_{m,r} &= (ab)^{\frac{r-m}{r}} M_{2m-r}^{\frac{2m-r}{r}} \quad r = m, m+1, \dots, 2m-1 \\
C_{m,2m} &= (ab)^{\frac{m}{2m}} \\
C_{m,n} &= (ab)^{\frac{m}{n}} M_{n-2m}^{\frac{n-2m}{n}} \quad n = 2m+1, 2m+2, \dots
\end{aligned}$$

特に、 $M_1 \leq M_2$ ,  $ab \leq M_1^2 \leq M_2^2$  に注意すれば

$$\begin{aligned}
C_{m,2m-1} &= (ab)^{\frac{m-1}{2m-1}} M_1^{\frac{1}{2m-1}} \leq M_1^{\frac{2(m-1)}{2m-1}} M_1^{\frac{1}{2m-1}} = M_1 \\
C_{m,2m+1} &= (ab)^{\frac{m}{2m+1}} M_1^{\frac{1}{2m+1}} \leq M_1^{\frac{2m}{2m+1}} M_1^{\frac{1}{2m+1}} = M_1 \\
C_{m,2m-2} &= (ab)^{\frac{m-2}{2m-2}} M_1^{\frac{2}{2m-2}} \leq M_2^{\frac{2(m-2)}{2m-2}} M_2^{\frac{2}{2m-2}} = M_2 \\
C_{m,2m+2} &= (ab)^{\frac{m}{2m+2}} M_1^{\frac{2}{2m+2}} \leq M_2^{\frac{2m}{2m+2}} M_2^{\frac{2}{2m+2}} = M_2
\end{aligned}$$

であり、一般に、 $ab \leq M_j^2$  から

$$\begin{aligned}
C_{m,2m-j} &= (ab)^{\frac{m-j}{2m-j}} M_j^{\frac{j}{2m-j}} \leq M_j^{\frac{2(m-j)}{2m-j}} M_j^{\frac{j}{2m-j}} = M_j \\
C_{m,2m+j} &= (ab)^{\frac{m}{2m+j}} M_j^{\frac{j}{2m+j}} \leq M_j^{\frac{2m}{2m+j}} M_j^{\frac{j}{2m+j}} = M_j
\end{aligned}$$

が成り立っています。

### 9.9.2 $C_{m,n} \leq M_n$

Hölder の不等式によれば  $m = 1, \dots, n-1$  のとき

$$\begin{aligned}
a^m b^{n-m} + a_{n-m} b^m &\leq \left\{ (a^m)^{\frac{n}{m}} + (b^m)^{\frac{n}{m}} \right\}^{\frac{m}{n}} \left\{ (b^{n-m})^{\frac{n}{n-m}} + (a^{n-m})^{\frac{n}{n-m}} \right\}^{\frac{n-m}{n}} \\
&= a^n + b^n \\
\left( \frac{a^m b^{n-m} + a_{n-m} b^m}{2} \right)^n &\leq \left( \frac{a^n + b^n}{2} \right)^n \\
C_{m,n} &\leq M_n
\end{aligned}$$

です。また、 $m = n$  のときは自明ですから、任意の  $m = 1, \dots, n$  で  $C_{m,n} \leq M_n$  です。等号は、 $m < n$  の場合は  $a = b$  のときのみ成立します。

もちろん、今見た  $C_{m,n}$  と  $M_j$  の関係からも、

$$\begin{aligned}
C_{m,n} &\leq M_{n-2m} \leq M_n \quad (2m < n) \\
C_{m,n} &\leq M_{2m-n} \leq M_n \quad (n < 2m < 2n) \\
C_{\frac{n}{2},n} &= \sqrt{ab} \leq M_n
\end{aligned}$$

という具合に導くことが出来ます。

### 事実 9.9.2 $C_{m,n} \leq M_n \quad (m = 1, \dots, n)$

### 9.9.3 $M_j$ の単調性から得られる $C_{m,n}$ の不等式

$n \geq 2m$  のときは

$$\begin{aligned}
 C_{m,n}^m &= \frac{a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m}{2} \\
 &= (ab)^m \frac{a^{n-2m} + b^{n-2m}}{2} \\
 &= (ab)^m M_{n-2m}^{n-2m} \\
 &\geq (ab)^m M_{n-2m-1}^{n-2m} \\
 &= (ab)^m M_{n-2m-1}^{n-2m-1} M_{n-2m-1}^{n-2m-1} \\
 &\geq M_1 (ab)^m \frac{a^{n-2m-1} + b^{n-2m-1}}{2} \\
 &= \sqrt{ab} \frac{a^{n-m-1} b^m + a^m b^{n-m-1}}{2} \\
 &= \sqrt{ab} C_{m,n-1}^{n-1}
 \end{aligned}$$

### 9.9.4 $C_{m,2m-1} \leq C_{m,2m+2}$

$$\begin{aligned}
 C_{m,2m-1} &= (ab)^{\frac{m-1}{2m-1}} M_1^{\frac{1}{2m-1}}, \quad C_{m,2m+2} = (ab)^{\frac{m}{2m+2}} M_2^{\frac{2}{2m+2}} \\
 C_{m,2m-1}^{(2m+2)(2m-1)} &= (ab)^{(m-1)(2m+2)} M_1^{2m+2}, \quad C_{m,2m+2}^{(2m+2)(2m-1)} = (ab)^{m(2m-1)} M_2^{4m-2} \\
 ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} &= M_2^2 \text{ に注意すれば、}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{m,2m-1}^{(2m+2)(2m-1)} &= (ab)^{(m-1)(2m+2)} M_1^{2m+2} \\
 &= (ab)^{m(2m-1)} (ab)^{m-2} M_1^{2m+2} \\
 &\leq (ab)^{m(2m-1)} M_2^{2(m-2)} M_2^{2m+2} \\
 &\leq (ab)^{m(2m-1)} M_2^{4m-2} \\
 &= C_{m,2m+2}^{(2m+2)(2m-1)}
 \end{aligned}$$

となってこれは  $C_{m,2m-1} \leq C_{m,2m+2}$  を意味します。

**事実 9.9.3**  $C_{m,2m-1} \leq C_{m,2m+2}$

### 9.9.5 $C_{m,m+1} \leq C_{m,m(m+1)}$

$$\begin{aligned}
 C_{m,m(m+1)} &= (ab)^{\frac{m}{m(m+1)}} M_{m(m-1)}^{\frac{m(m-1)}{m(m+1)}} = (ab)^{\frac{1}{m+1}} M_{m(m-1)}^{\frac{m-1}{m+1}} \\
 C_{m,m+1} &= (ab)^{\frac{1}{m+1}} M_{m-1}^{\frac{m-1}{m+1}}
 \end{aligned}$$

なので、 $M_{m-1} \leq M_{m(m-1)}$  によれば

$$C_{m,m+1} \leq C_{m,m(m+1)}$$

であり、等号は  $a = b$  のときのみ成立します。

この  $m(m+1)$  は、 $C_{m,m+1} \leq C_{m,n}$  となる  $n$  の中で最小の値です。 $n > 2m$  のとき

$$\begin{aligned}
 C_{m,m+1} \leq C_{m,n} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^m b + ab^m}{2} \right)^n \leq \left( \frac{a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m}{2} \right)^{m+1} \\
 (a^m b + ab^m)^n &\leq 2^{n-m-1} (a^m b^{n-m} a^{n-m} b^m)^{m+1} \\
 (ab)^n (a^{m-1} + b^{m-1})^n &\leq 2^{n-m-1} (ab)^{m(m+1)} (a^{n-2m} + b^{n-2m})^{m+1}
 \end{aligned}$$

ですから、ここで  $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば、

$$\begin{aligned}
 C_{m,m+1} \leq C_{m,n} &\Leftrightarrow x^n (x^{m-1} + 1)^n \leq 2^{n-m-1} x^{m(m+1)} (x^{n-2m} + 1)^{m+1} \\
 \frac{x^n (x^{m-1} + 1)^n}{x^{m(m+1)} (x^{n-2m} + 1)^{m+1}} &\leq 2^{n-m-1} \quad (x > 0)
 \end{aligned}$$

であり、左辺の分母・分子の次数を見て

$$\begin{aligned}
 n + (m-1)n &\leq m(m+1) + (n-2m)(m+1) \\
 nm &\leq nm + n - m^2 - m \\
 m(m+1) &\leq n
 \end{aligned}$$

でなければ左辺は有界ではなく、不等式は成り立ちません。

**事実 9.9.4**  $C_{m,m+1} \leq C_{m,m(m+1)}, \quad C_{m,m+1} \not\leq C_{m,m(m+1)-1}$

### 9.10 $C_{m,r} \leq C_{m,n}$ の一般的な計算

$m \leq r < 2m < n$  のとき

$$C_{m,r} = (ab)^{\frac{r-m}{r}} M_{2m-r}^{\frac{2m-r}{r}}, \quad C_{m,n} = (ab)^{\frac{m}{n}} M_{n-2m}^{\frac{n-2m}{n}}$$

であり、 $rn - m(r+n) \geq 0$  のときは特に  $r+n \geq 4m$  であることに注意すれば

$$n - 2m - (2m - r) = r + n - 4m \geq 0$$

であり

$$\begin{aligned} C_{m,n} &= (ab)^{\frac{m}{n}} M_{n-2m}^{\frac{n-2m}{n}} \\ &\geq (ab)^{\frac{m}{n}} M_{2m-r}^{\frac{n-2m}{n}} \end{aligned}$$

更に、

$$\frac{n-2m}{n} - \frac{2m-r}{r} = \frac{r(n-2m) - n(2m-r)}{rn} = \frac{2}{rn}(rn - rm - nm) \geq 0$$

なので

$$\begin{aligned} C_{m,n} &\geq (ab)^{\frac{m}{n}} M_{2m-r}^{\frac{n-2m}{n}} \\ &\geq (ab)^{\frac{m}{n}} M_{2m-r}^{\frac{2m-r}{r}} \cdot M_{2m-r}^{\frac{2}{rn}(rn-mr-mn)} \end{aligned}$$

です。また、

$$\frac{m}{n} - \frac{r-m}{r} = \frac{rm - n(r-m)}{rn} = \frac{m(r+n) - rn}{rn} \leq 0$$

から、

$$\begin{aligned} C_{m,n} &\geq (ab)^{\frac{m}{n}} M_{2m-r}^{\frac{2m-r}{r}} \cdot M_{2m-r}^{\frac{2}{rn}(rn-mr-mn)} \\ &\geq (ab)^{\frac{r-m}{r}} M_{2m-r}^{\frac{2m-r}{r}} \cdot (ab)^{\frac{m(r+n)-rn}{rn}} M_{2m-r}^{\frac{2}{rn}(rn-mr-mn)} \\ &= C_{m,r} \cdot (ab)^{\frac{m(r+n)-rn}{rn}} M_{2m-r}^{\frac{2}{rn}(rn-mr-mn)} \\ &= C_{m,r} \cdot \{(ab)^{-1} M_{2m-r}^2\}^{\frac{rn-mr-mn}{rn}} \end{aligned}$$

となりますが、

$$M_{2m-r} \geq \sqrt{ab}$$

に注意すれば

$$(ab)^{-1} M_{2m-r}^2 \geq 1$$

ですから、結局、

$$C_{m,n} \geq C_{m,r}$$

が分かりました。

**事実 9.10.1**  $m \leq r < 2m < n$  かつ  $rn - m(r+n) \geq 0$  であれば

$$C_{m,r} \leq C_{m,n}$$

です。

これは事実 9.8.2 において既に見た結果（有界な有理関数の最大値問題）ですが、全く違う方法によって証明されたということです。

$r$  が小さい分には不等式は成立し、 $n$  が大きい分には不等式は成り立ちますから、上の不等式が成立する最小の  $n$  あるいは最大の  $r$  に興味があります。

$r$  を固定したとき、

$$rn - m(r+n) = 0$$

$$(r-m)n = mr$$

ですが、 $r = m$  のときは  $rn - m(r+n) < 0$  ですから除外され、

$$n = \frac{mr}{r-m}$$

のときが閾値となります。

$n$  を固定したときは

$$rn - m(r+n) = 0$$

$$r(n-m) = mn$$

$$r = \frac{mn}{n-m}$$

のときが閾値となります。先に見た  $rn - m(r+n) < 0$  の場合の結果と合わせれば次のようにまとめることができます：

**事実 9.10.2**  $m \leq r < 2m < n$  かつ  $rn - m(r + n) \geq 0$  であれば

$$C_{m,r} \not\leq C_{m, \lceil \frac{mr}{r-m} \rceil - 1}, \quad C_{m,r} \leq C_{m, \lceil \frac{mr}{r-m} \rceil}$$

$$C_{m, \lfloor \frac{mn}{n-m} \rfloor} \leq C_{m,n}, \quad C_{m, \lfloor \frac{mn}{n-m} \rfloor + 1} \not\leq C_{m,n}$$

です。ただし、 $\lceil x \rceil$  は  $x$  を超える最小の整数、 $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  を超えない最大の整数を表します。

### 9.10.1 今のところ分かっている一般的な結果

#### 事実 9.10.3

- $m \leq r \leq 2m$  での単調性:  $C_{m,2m} \leq C_{m,2m-1} \leq \cdots \leq C_{m,m+1} \leq C_{m,m}$
- $2m \leq n$  での単調性:  $C_{m,2m} \leq C_{m,2m+1} \leq \cdots$
- 小さいところと大きいところの混じり具合 ( $2m$  の近く):

$$C_{m,2m} \leq C_{m,2m+1} \leq C_{m,2m-1} \leq C_{m,2m+2} \leq C_{m,2m-2}$$

- 小さいところと大きいところの混じり具合 (一般):

$m \leq r < 2m < n$  かつ  $rn - m(r + n) \geq 0$  であれば

$$C_{m,r} \not\leq C_{m, \lceil \frac{mr}{r-m} \rceil - 1}, \quad C_{m,r} \leq C_{m, \lceil \frac{mr}{r-m} \rceil}$$

$$C_{m, \lfloor \frac{mn}{n-m} \rfloor} \leq C_{m,n}, \quad C_{m, \lfloor \frac{mn}{n-m} \rfloor + 1} \not\leq C_{m,n}$$

- $C_{m,m}$  の大きさ:  $C_{m,4m} \leq C_{m,m}, \quad C_{m,4m+1} \not\leq C_{m,m}$
- $C_{m,m+1}$  の大きさ:  $C_{m,m+1} \not\leq C_{m,m(m+1)-1}, \quad C_{m,m+1} \leq C_{m,m(m+1)}$
- そのほか:

$$C_{m,n} \leq C_{p,r} \Leftrightarrow C_{km,kn} \leq C_{kp,kr}$$

$$C_{2m+1,4m+4} \leq C_{m,2m+2}$$

### 9.11 $C_{m,n} \leq C_{m,r}$

$m \leq r < 2m < n$  とします。

$$C_{m,4m} \leq C_{m,m}$$

は分かっています。では  $C_{m,m+1}$  はどの程度以上でしょうか？

#### 9.11.1 特別な場合: $C_{m,n} \leq C_{m,m+1}$

$r = m + 1 = 2m - (m - 1)$  ですから、 $n = 2m + (m - 1) = 3m - 1$  でまず見てみましょう。

$$C_{m,m+1} = (ab)^{\frac{m-(m-1)}{2m-(m-1)}} M_{m-1}^{\frac{m-1}{2m-(m-1)}} = (ab)^{\frac{1}{m+1}} M_{m-1}^{\frac{m-1}{m+1}}$$

$$C_{m,3m-1} = (ab)^{\frac{m}{3m-1}} M_{m-1}^{\frac{m-1}{3m-1}}$$

従って

$$\begin{aligned} C_{m,m+1}^{(m+1)(3m-1)} &= (ab)^{3m-1} M_{m-1}^{(m-1)(3m-1)} \\ C_{m,3m-1}^{(m+1)(3m-1)} &= (ab)^{m(m+1)} M_{m-1}^{(m-1)(m+1)} \\ &= (ab)^{3m-1} (ab)^{m(m+1)-3m+1} M_{m-1}^{(m-1)(m+1)} \\ &= (ab)^{3m-1} (ab)^{m^2-2m+1} M_{m-1}^{(m-1)(m+1)} \end{aligned}$$

ですが、ここで

$$\sqrt{ab} \leq M_j \quad j = 1, 2, \dots$$

でしたから

$$\begin{aligned} &\leq (ab)^{3m-1} M_{m-1}^{2(m-1)^2} M_{m-1}^{(m-1)(m+1)} \\ &= (ab)^{3m-1} M_{m-1}^{3m^2-4m+1} \\ &= (ab)^{3m-1} M_{m-1}^{(m-1)(3m-1)} \\ &= C_{m,m+1}^{(m+1)(3m-1)} \end{aligned}$$

が分かり、従って  $C_{m,3m-1} \leq C_{m,m+1}$  が分かりました。

#### 事実 9.11.1 $C_{m,3m-1} \leq C_{m,m+1}$

ただし、これが最大とは限らないので、もう少し正確に見てみましょう。

### 9.11.2 特別な場合： $C_{m,n} \leq C_{m,m+1}$ となる $n$ の最大値

$$\begin{aligned} C_{m,n} \leq C_{m,m+1} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m}{2} \right)^{m+1} \leq \left( \frac{a^m b + a b^m}{2} \right)^n \\ &2^{n-m-1} (a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m)^{m+1} \leq (a^m b + a b^m)^n \\ &2^{n-m-1} (ab)^{m(m+1)} (a^{n-2m} + b^{n-2m})^{m+1} \leq (ab)^n (a^{m-1} + b^{m-1})^n \end{aligned}$$

ですから、ここで  $\frac{a}{b} = x > 0$  とおけば

$$\begin{aligned} C_{m,n} \leq C_{m,m+1} &\Leftrightarrow 2^{n-m-1} x^{m(m+1)} (x^{n-2m} + 1)^{m+1} \leq x^n (n^{m-1} + 1)^n \\ &\frac{x^{m(m+1)} (x^{n-2m} + 1)^{m+1}}{(x^{m-1} + 1)^n} \leq 2^{1+m-n} \end{aligned}$$

です。ここで左辺の有理式の分子・分母の次数を見ると、分子は

$$m(m+1) + (n-2m)(m+1) = -m^2 - m - mn$$

であり、分母は  $n(m-1)$  ですから、

$$n(m-1) + m^2 + m + mn > 0$$

であって有界条件は常にクリアしています。また、特に  $C_{m,m+1} \leq C_{m,m(m+1)}$  は分かっているのです、 $m+1 < n < m(m+1)$  として話を進めます。

$$A(x) = \frac{x^{m(m+1)} (x^{n-2m} + 1)^{m+1}}{(x^{m-1} + 1)^n}$$

と置けば、

$$\begin{aligned} A'(x) &= B(x) \{ (m^2 + m - n)x^{n-m-1} + (m^2 + m - mn)x^{n-2m} \\ &\quad - (m^2 + m - mn)x^{m-1} - (m^2 + m - n) \} \\ B(x) &= -\frac{x^{m^2+m-n-1} (x^{n-2m} + 1)^m}{(x^{m-1} + 1)^{n+1}} \end{aligned}$$

であって、ここで  $n-2m > m-1$ 、 $m^2 + m - mn < 0$  に注意します。

$A'(1) = 0$  ですが、

$$\begin{aligned} A''(1) &= B(1) \{ (m^2 + m - n)(n - m - 1) + (m^2 + m - mn)(n - 2m) \\ &\quad - (m^2 + m - mn)(m - 1) - (m^2 + m - n) \} \\ &= (-2^{m-n-1})(n - m - 1)(4m^2 - mn - n) \end{aligned}$$

によれば、 $4m^2 - mn - n < 0$  つまり  $\frac{4m^2}{m+1} < n$  であれば  $A(1)$  は極小値であって、最大値にはなり得ず、不等式は成り立たないことが分かります。ちなみにさっき求めた  $3m-1$  との比較は、

$$\frac{4m^2}{m+1} - (3m-1) = \frac{m^2 - 2m + 1}{m+1} = \frac{(m-1)^2}{m+1} \geq 0$$

となっていて、確かにより大きな値になっていますし、

$$m(m+1) - \frac{4m^2}{m+1} = \frac{m(m+1)^2 - 4m^2}{m+1} = \frac{m(m-1)^2}{m+1} \geq 0$$

ですので、閾値は  $\frac{4m^2}{m+1}$  です。

| $m$                | 2    | 3 | 4    | 5     | 6     |
|--------------------|------|---|------|-------|-------|
| $\frac{4m^2}{m+1}$ | 5.33 | 9 | 12.8 | 16.67 | 20.57 |

これらは既に得られている結果と一致しています。

$$C_{2,6} \not\leq C_{2,3}, \quad C_{3,10} \not\leq C_{3,4}, \quad C_{4,13} \not\leq C_{4,5}, \quad C_{5,17} \not\leq C_{5,6}, \quad C_{6,21} \not\leq C_{6,7}$$

不等式が成り立つ最大の  $n$  は、 $m = 2, 3, \dots, 6$  では具体的に求まっていて、上の値の1つ前の値になっていますが、これを、一般的な枠組みで示せるかどうかが問題です。

### 9.11.3 一般的な計算

### 9.12 $C_{m,n} \leq C_{r,n}$ の一般的な計算

$C_{k,n} = C_{n-k,n}$  ですから、 $m, r \leq \frac{n}{2}$  である場合だけを考えます。このとき特に  $m+r \leq n$  です。

$$\begin{aligned} C_{m,n} \leq C_{r,n} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^m b^{n-m} + a^{n-m} b^m}{2} \right)^n \leq \left( \frac{a^r b^{n-r} + a^{n-r} b^r}{2} \right)^n \\ &(ab)^m (a^{n-2m} + b^{n-2m}) \leq (ab)^r (a^{n-2r} + b^{n-2r}) \end{aligned}$$

ここで  $\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば、

$$\begin{aligned} C_{m,n} \leq C_{r,n} &\Leftrightarrow x^m (x^{n-2m} + 1) \leq x^r (x^{n-2r} + 1) \\ &\frac{x^{m-r} (x^{n-2m} + 1)}{x^{n-2r} + 1} \leq 1 \end{aligned}$$

ですから、左辺が有界であるための条件は

$$\begin{aligned} m - r + n - 2m &\leq n - 2r \\ r &\leq m \end{aligned}$$

です。

$r = m$  のとき不等号は自明ですから  $2r < 2m \leq n$  のときのみ考えます。

$$A_{m,r}(x) = \frac{x^{m-r}(x^{n-2m} + 1)}{x^{n-2r} + 1}$$

と置けば、

$$\begin{aligned} A'_{m,r}(x) &= \frac{\{(n-m-r)x^{n-m-r-1} + (m-r)x^{m-r-1}\}(x^{n-2r} + 1) - x^{m-r}(x^{n-2m} + 1)(n-2r)x^{n-2r-1}}{(x^{n-2r} + 1)^2} \\ &= \frac{(r-m)x^{2n-m-3r-1} + (m+r-n)x^{n+m-3r-1} + (n-m-r)x^{n-m-r-1} + (m-r)x^{m-r-1}}{(x^{n-2r} + 1)^2} \\ &= \frac{-(m-r)x^{m-r-1}\{x^{2(n-m-r)} - 1\} - (n-m-r)x^{n-m-r-1}\{x^{2(m-r)} - 1\}}{(x^{n-2r} + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{(x^{n-2r} + 1)^2}(x-1)\left\{(m-r)x^{m-r-1}\{x^{2(n-m-r)-1} + \dots + 1\} \right. \\ &\quad \left. + (n-m-r)x^{n-m-r-1}\{x^{2(m-r)-1} + \dots + 1\}\right\} \end{aligned}$$

ですから  $A'_{m,r}(x) = 0$  となるのは  $x > 0$  の範囲では  $x = 1$  のみであり、 $0 < x < 1$  で  $A'_{m,r}(x) > 0$ 、 $1 < x$  で  $A'_{m,r}(x) < 0$  ですから、 $A_{m,r}(1)$  は  $x > 0$  での最大値になっています。

この様子は2階微分を見ても分かるでしょう。実際、

$$\begin{aligned} A'(1) &= \frac{(r-m)x^{2n-m-3r-1} + (m+r-n)x^{n+m-3r-1} + (n-m-r)x^{n-m-r-1} + (m-r)x^{m-r-1}}{(x^{n-2r} + 1)^2} \\ &= B(x)\{(r-m)x^{2n-m-3r-1} + (m+r-n)x^{n+m-3r-1} \\ &\quad + (n-m-r)x^{n-m-r-1} + (m-r)x^{m-r-1}\} \end{aligned}$$

と置けば、

$$\begin{aligned} A''(1) &= B(1)\{(r-m)(2n-m-3r-1) + (m+r-n)(n+m-3r-1) \\ &\quad + (n-m-r)(n-m-r-1) + (m-r)(m-r-1)\} \\ &= \frac{1}{4}\{(r-m)(2n-2m-2r) + (m+r-n)(2m-2r)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(r-m)(n-m-r) + (m+r-n)(m-r)\} \\ &= -(m-r)(n-m-r) \\ &< 0 \end{aligned}$$

ですから、 $A_{m,r}(1)$  は極大値になっています。

以上から、 $2r < 2m \leq n$  のとき、 $C_{m,n} \leq C_{r,n}$  であり、等号は  $a = b$  のときのみ成り立ちます。

**事実 9.12.1**  $r < m \leq \frac{n}{2}$  のとき  $C_{m,n} \leq C_{r,n}$

これは、 $C_{m,n}$  と  $M_j$  の関係を使って示すことも出来ます。

$1 < m < \frac{n}{2}$  と仮定します ( $2m = n$  のときは自明)。事実 9.9.1 より

$$\begin{aligned} C_{m,n} &= (ab)^{\frac{m}{n}} M_{n-2m}^{\frac{n-2m}{n}} \\ &\leq (ab)^{\frac{m}{n}} M_{n-2m+2}^{\frac{n-2m}{n}} \\ &= (ab)^{\frac{m-1}{n}} (ab)^{\frac{1}{n}} M_{n-2m+2}^{\frac{n-2m}{n}} \end{aligned}$$

ここで任意の  $k$  に対して AM-GM 不等式から

$$ab \leq M_k^2$$

だったので

$$\begin{aligned} C_{m,n} &\leq (ab)^{\frac{m-1}{n}} M_{n-2m+2}^{\frac{2}{n}} M_{n-2m+2}^{\frac{n-2m}{n}} \\ &= (ab)^{\frac{m-1}{n}} M_{n-2m+2}^{\frac{n-2m+2}{n}} \\ &= C_{m-1,n} \end{aligned}$$

が得られます。

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{5,5} & \geq & C_{4,5} & \geq & C_{3,5} \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & C_{1,5} & \geq & C_{2,5} \\
 \\ 
 C_{6,6} & \geq & C_{5,6} & \geq & C_{4,6} \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & C_{1,6} & \geq & C_{2,6}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \geq \\
 \geq
 \end{array}
 C_{3,6}$$

### 9.13 $C_{v,sv} \leq C_{w,tw}$

$0 < v, w, 1 \leq s, t$  とします。

$$\begin{aligned}
 C_{v,sv} \leq C_{w,tw} &\Leftrightarrow \left( \frac{a^v b^{sv-v} + a^{sv-v} b^v}{2} \right)^{tw} \leq \left( \frac{a^w b^{tw-w} + a^{tw-w} b^w}{2} \right)^{sv} \\
 2^{sv-tw} (a^v b^{sv-v} + a^{sv-v} b^v)^{tw} &\leq (a^w b^{tw-w} + a^{tw-w} b^w)^{sv} \\
 2^{sv-tw} (ab)^{tw} (a^{(s-2)v} + b^{(s-2)v})^{tw} &\leq (ab)^{sv} (a^{(t-2)w} + b^{(t-2)w})^{sv}
 \end{aligned}$$

特に

$$C_{m,n} = C_{n-m,n}$$

なので、 $2 \leq s, t$  とします。また、

$$C_{m,2m}(a, b) = \sqrt{ab}, \quad C_{m,n}(a, b) \geq \sqrt{ab}$$

であることは分かっているので、 $2 < s, t$  の場合のみ考えます。

$\frac{a}{b} = x > 0$  と置けば、

$$\begin{aligned}
 C_{v,sv} \leq C_{w,tw} &\Leftrightarrow 2^{sv-tw} x^{tw} (x^{(s-2)v} + 1)^{tw} \leq x^{sv} (x^{(t-2)w} + 1)^{sv} \\
 \frac{x^{(t-s)vw} (x^{(s-2)v} + 1)^{tw}}{(x^{(t-2)w} + 1)^{sv}} &\leq 2^{tw-sv}
 \end{aligned}$$

です：

**事実 9.13.1**  $2 < s, t$  のとき、

$$A_{v,w}^{s,t}(x) = \frac{x^{(t-s)vw} (x^{(s-2)v} + 1)^{tw}}{(x^{(t-2)w} + 1)^{sv}}$$

と置けば

$$C_{v,sv} \leq C_{w,tw} \Leftrightarrow A_{v,w}^{s,t}(x) \leq 2^{tw-sv} \quad (x > 0)$$

です。

有界条件は

$$\begin{aligned}
 (t-s)vw + (s-2)tvw &\leq (t-2)svw \\
 -t &\leq -s \\
 t &\geq s
 \end{aligned}$$

です。以降これを仮定します。

**事実 9.13.2**  $0 < v, w, 2 < t < s$  のとき  $C_{v,sv} \not\leq C_{w,tw}$ .

導関数は

$$\begin{aligned}
 A_{v,w}^{s,t'}(x) &= -\frac{vw x^{(t-s)vw-1} (x^{(s-2)v} + 1)^{tw-1}}{(x^{(t-2)w} + 1)^{sv+1}} \\
 &\quad \left\{ (t-s)x^{(t-2)w+(s-2)v} + (st-s-t)x^{(t-2)w} \right. \\
 &\quad \left. - (st-s-t)x^{(s-2)v} - (t-s) \right\}
 \end{aligned}$$

となります。

ここで

$$st-s-t = (s-1)(t-1) - 1 > (2-1)(2-1) - 1 = 0$$

に注意すれば、もしも  $(t-2)w \geq (s-2)v$  であるならば

$$\begin{aligned}
 &(t-s)x^{(t-2)w+(s-2)v} + (st-s-t)x^{(t-2)w} - (st-s-t)x^{(s-2)v} - (t-s) \\
 &= (t-s) \left\{ x^{(t-2)w+(s-2)v} - 1 \right\} + (st-s-t) \left\{ x^{(t-2)w} - x^{(s-2)v} \right\}
 \end{aligned}$$

であって、

$$\begin{aligned} x > 1 &\Rightarrow x^{(t-2)w+(s-2)v} - 1 > 0, & x^{(t-2)w} - x^{(s-2)v} &\geq 0 \\ x < 1 &\Rightarrow x^{(t-2)w+(s-2)v} - 1 < 0, & x^{(t-2)w} - x^{(s-2)v} &\leq 0 \end{aligned}$$

ですから  $A_{v,w}^{s,t}{}'(x) = 0$  となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみであることが分かります。

いま  $t \geq s$  でしたから  $t-2 \geq s-2$  であり、もしも  $w \geq v$  であれば  $(t-2)w \geq (s-2)v$  は成り立ちます。ですから問題が残るのは  $w \leq v$  である場合でしょう。

また 2 次微分係数を調べると、

$$B(x) = -\frac{vwx^{(t-s)vw-1}(x^{(s-2)v} + 1)^{tw-1}}{(x^{(t-2)w} + 1)^{sv+1}}$$

と置くことにすれば

$$\begin{aligned} &A_{v,w}^{s,t}{}'(x) \\ &= B(x) \left\{ (t-s)x^{(t-2)w+(s-2)v} + (st-s-t)x^{(t-2)w} - (st-s-t)x^{(s-2)v} - (t-s) \right\} \\ &A_{v,w}^{s,t}{}''(1) \\ &= B(1) \{ (t-s)\{(t-2)w + (s-2)v\} + (st-s-t)(t-2)w - (st-s-t)(s-2)v \} \\ &= B(1) \{ (st-2s)(t-2)w - (st-2t)(s-2)v \} \\ &= B(1) \{ s(t-2)^2w - t(s-2)^2v \} \\ &= \left( -\frac{vw2^{tw-1}}{2^{2v+1}} \right) \left( \frac{s}{w} \{(t-2)w\}^2 - \frac{t}{v} \{(s-2)v\}^2 \right) \\ &= \left( -\frac{2^{tw-1}}{2^{2v+1}} \right) (sv \{(t-2)w\}^2 - tw \{(s-2)v\}^2) \end{aligned}$$

です。

**事実 9.13.3**  $0 < v, w, 2 < s \leq t$  であって、

$$(s-2)v \leq (t-2)w \quad \text{かつ} \quad tw \{(s-2)v\}^2 < sv \{(t-2)w\}^2$$

であれば

$$C_{v,sv} \leq C_{w,tw}$$

です。また

$$tw \{(s-2)v\}^2 > sv \{(t-2)w\}^2$$

であれば

$$C_{v,sv} \not\leq C_{w,tw}$$

です。

しかし  $s \leq t$  でありかつ  $(s-2)v < (t-2)w$  であれば

$$\begin{aligned} -2t &\leq -2s \\ st - 2t &\leq st - 2s \\ (s-2)t &\leq (t-2)s \\ (s-2)^2tv &< (t-2)^2sw \\ tw \{(s-2)v\}^2 &< sv \{(t-2)w\}^2 \end{aligned}$$

は成り立っていますから、

**事実 9.13.4**  $0 < v, w, 2 < s \leq t$  であって、

$$(s-2)v < (t-2)w$$

であれば

$$C_{v,sv} \leq C_{w,tw}$$

です。

$(s-2)v = (t-2)w$  の場合はどうなるでしょうか？

$$\begin{aligned} -2t &\leq -2s \\ st - 2t &\leq st - 2s \\ (s-2)t &\leq (t-2)s \\ (s-2)^2tv &\leq (t-2)^2sw \\ tw \{(s-2)v\}^2 &\leq sv \{(t-2)w\}^2 \end{aligned}$$

は成り立っていますが、これはすなわち  $tw \leq sv$  を意味し、等号が成り立つのは  $tw = sv$  のときのみであり、この場合  $(s-2)v = (t-2)w$  から  $v = w$  でなければなりません、 $(s-2)v \leq (t-2)w$  なので  $s = t$  のときのみです。すなわち自明な場合のみです。

従って自明でない場合は  $tw\{(s-2)v\}^2 < sv\{(t-2)w\}^2$  が成り立つので  $C_{v,sv} \leq C_{w,tw}$  であり、自明な場合もこれは成り立っています。

以上から、

**事実 9.13.5**  $0 < v, w, 2 < s \leq t$  であって、

$$(s-2)v \leq (t-2)w$$

であれば

$$C_{v,sv} \leq C_{w,tw}$$

です。

次に  $(s-2)v > (t-2)w$  の場合です。この場合でも  $tw\{(s-2)v\}^2 < sv\{(t-2)w\}^2$  であれば行けそうな気がします。

### 9.13.1 決着

思えば長いこと試行錯誤して来ましたが、上手い処理方法を見つけたので、一般的に解決することが出来ました。以下それを見ていきましょう。最初からこれをやっていれば、今までの紆余曲折は何だったのか、と云うことになりますが、まあ、その紆余曲折の中で処理方法に思い当たったわけですので、仕方なしと言うべきでしょうか。

**事実 9.13.6**  $0 < v, w, 2 < s \leq t$  であって、 $(t-2)w < (s-2)v$  であると仮定します。このとき、

$$tv(s-2)^2 < sw(t-2)^2 \quad (9.3)$$

ならば

$$F(x) = (t-s)x^{(s-2)v+(t-2)w} - (st-s-t)x^{(s-2)v} + (st-s-t)x^{(t-2)w} - (t-s) = 0$$

となる  $x > 0$  は  $x = 1$  のみです。

$s = t$  のときは  $(t-2)w < (s-2)v$  は  $w < v$  を、 $tv(s-2)^2 < sw(t-2)^2$  は  $v < w$  を意味しており、これらは両立しません。従って  $s < t$  の場合のみを考えることになり

ます。

$x > 0$  であれば

$$F(x) = -x^{(s-2)v+(t-2)w} F\left(\frac{1}{x}\right)$$

が成り立っていますので、 $0 < x < 1$  の範囲に  $F(x) = 0$  となる  $x$  がないことを示せば十分です。

$$(st-s-t) - (t-s) = (s-2)t > 0$$

であることに注意しておきます。

$$(s-2)v = (t-2)w \cdot k \quad \text{すなわち} \quad k = \frac{(s-2)v}{(t-2)w} > 1$$

とし、 $X = x^{(t-2)w}$  と置けば、

$$F(x) = (t-s)X^{k+1} - (st-s-t)X^k + (st-s-t)X - (t-s)$$

なのでこれを  $G(X)$  とします。すると問題は、 $0 < X < 1$  の範囲に  $G(X) = 0$  となる  $X$  がないことを示すことになります。

$$G'(X) = (t-s)(k+1)X^k - (st-s-t)kX^{k-1} + (st-s-t)$$

$$\begin{aligned} G''(X) &= (t-s)(k+1)kX^{k-1} - (st-s-t)k(k-1)X^{k-2} \\ &= \{(t-s)(k+1)kX - (st-s-t)k(k-1)\} X^{k-2} \end{aligned}$$

ですから、 $0 < X$  で  $G'''(X) = 0$  となるのは

$$X = \frac{(st-s-t)k(k-1)}{(t-s)(k+1)k} = \frac{(st-s-t)(k-1)}{(t-s)(k+1)}$$

のときのみであり、この値を  $\alpha$  とします。しかし

$$k = \frac{(s-2)v}{(t-2)w}, \quad k-1 = \frac{(s-2)v - (t-2)w}{(t-2)w}, \quad k+1 = \frac{(s-2)v + (t-2)w}{(t-2)w}$$

でしたから、

$$\alpha = \frac{(st-s-t)(k-1)}{(t-s)(k+1)} = \frac{(st-s-t)\{(s-2)v - (t-2)w\}}{(t-s)\{(s-2)v + (t-2)w\}}$$

であって、条件式 (9.3) によれば

$$\begin{aligned}
 & (st - s - t)\{(s - 2)v - (t - 2)w\} - (t - s)\{(s - 2)v + (t - 2)w\} \\
 &= (st - 2t)(s - 2)v - (st - 2s)(t - 2)w \\
 &= (s - 2)^2 tv - (t - 2)^2 sw \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

ですから  $0 < \alpha < 1$  であることが分かります。

また、同様に

$$\begin{aligned}
 G'(1) &= (t - s)(k + 1) - (st - s - t)k + (st - s - t) \\
 &= (t - s)(k + 1) - (st - s - t)(k - 1) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

も分かります。従って増減表は

|          |                  |            |              |            |     |
|----------|------------------|------------|--------------|------------|-----|
| $X$      | 0                | $\cdots$   | $\alpha$     | $\cdots$   | 1   |
| $G''(X)$ |                  | $-$        | 0            | $+$        | $+$ |
| $G'(X)$  | $st - s - t > 0$ | $\searrow$ | $G'(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+$ |

となっていますので  $G'(\alpha)$  が正なのか負なのかが問題となります。

$$\begin{aligned}
 G'(\alpha) &= (t - s)(k + 1)\alpha^k - (st - s - t)k\alpha^{k-1} + (st - s - t) \\
 &= \{(t - s)(k + 1)\alpha - (st - s - t)k\}\alpha^{k-1} + (st - s - t)
 \end{aligned}$$

ですが、ここで

$$\alpha = \frac{(st - s - t)(k - 1)}{(t - s)(k + 1)}$$

によれば

$$\begin{aligned}
 &= \{(st - s - t)(k - 1) - (st - s - t)k\}\alpha^{k-1} + (st - s - t) \\
 &= -(st - s - t)\alpha^{k-1} + (st - s - t) \\
 &= (st - s - t)(1 - \alpha^{k-1})
 \end{aligned}$$

ですが、 $k > 1$ ,  $0 < \alpha < 1$  ですから  $G'(\alpha) > 0$  が分かります。

すると  $G(X)$  の増減表は

|          |                  |            |                  |            |     |
|----------|------------------|------------|------------------|------------|-----|
| $X$      | 0                | $\cdots$   | $\alpha$         | $\cdots$   | 1   |
| $G(X)$   | $s - t < 0$      | $\nearrow$ | $\nearrow$       | $\nearrow$ | 0   |
| $G'(X)$  | $st - s - t > 0$ | $+$        | $G'(\alpha) > 0$ | $+$        | $+$ |
| $G''(X)$ |                  | $-$        | 0                | $+$        | $+$ |

となりますから、 $0 < X < 1$  の範囲内には  $G(X) = 0$  となるような  $X$  はありません。□

$(s - 2)^2 tv = (t - 2)^2 sw$  のときは、今の計算を詳しく見れば  $\alpha = 1$  であり、 $G'(1) = 0$  ですが、この場合も増減表は

|          |                  |            |   |
|----------|------------------|------------|---|
| $X$      | 0                | $\cdots$   | 1 |
| $G(X)$   | $s - t < 0$      | $\nearrow$ | 0 |
| $G'(X)$  | $st - s - t > 0$ | $+$        | 0 |
| $G''(X)$ | $-$              | $-$        | 0 |

となりますから、やはり  $0 < X < 1$  の範囲内には  $G(X) = 0$  となるような  $X$  はありません。

#### 事実 9.13.7 [ 一般的な結論 ]

(i)  $0 < v, w, 2 < t < s$  のとき  $C_{v,sv} \not\leq C_{w,tw}$ .

(ii)  $0 < v, w, 2 < s \leq t$  のとき

(iia)  $tw\{(s - 2)v\}^2 \leq sv\{(t - 2)w\}^2$  であれば  $C_{v,sv} \leq C_{w,tw}$

(iib)  $tw\{(s - 2)v\}^2 > sv\{(t - 2)w\}^2$  であれば  $C_{v,sv} \not\leq C_{w,tw}$

あとは等号成立条件をきちんと見なければならない。自明な場合とそうでない場合を分けた方が良い。自明でない場合は  $a = b$  のみだろう。

#### 9.13.2 $v = w$ の場合

$v = w = m, 2m < n_1 = sv, 2m < n_2 = tw, n_2 < n_1$  のとき、 $C_{m,n_1} \not\leq C_{m,n_2}$  です。

また、 $v = w = m, 2m < n_1 = sv, 2m < n_2 = tw, n_1 < n_2$  のとき、

$$sv(tw - 2w)^2 - tw(sv - 2v)^2 = n_1(n_2 - 2m)^2 - n_2(n_1 - 2m)^2 = (n_2 - n_1)(n_1 n_2 - 4m^2) > 0$$

が成り立っており  $C_{m,n_1} \leq C_{m,n_2}$  です。

**事実 9.13.8**

$0 < 2m < n_1 < n_2$  のとき  $C_{m,n_1} \leq C_{m,n_2}$ .

$0 < 2m < n_2 < n_1$  のとき  $C_{m,n_1} \not\leq C_{m,n_2}$ .

**9.13.3**  $v + w = tw$  の場合

$0 < m, p, 2m < n, 2p < r$  として  $C_{m,n} \leq C_{p,r}$  を調べます。条件  $s \leq t$  はすなわち  $\frac{n}{m} \leq \frac{r}{p}$  であってこれは  $np \leq mr$  と書くことが出来ます。

一般的な結果から、 $r(n-2m)^2 \leq n(r-2p)^2$  が成り立つことが  $C_{m,n} \leq C_{p,r}$  が成り立つ必要十分条件です。

ここで  $r = m + p$  である場合を考えると、

$$C_{p,r} = C_{p,m+p} = C_{m,m+p}$$

であり、

$$np \leq mr \Leftrightarrow (n-m)p \leq m^2$$

に注意すれば、 $m < m+p < 2m < n$ 、 $(n-m)p \leq m^2$ 、 $(m+p)(n-2m)^2 \leq n(m-p)^2$  であれば

$$\underbrace{C_{m,n}}_{\text{大きいところ}} \leq \underbrace{C_{m,m+p}}_{\text{小さいところ}}$$

が成り立ちます。ここで

$$\begin{aligned} (m+p)(n-2m)^2 &\leq n(m-p)^2 \\ (m+p)(n^2 - 4mn + 4m^2) - (m-p)^2 n &\leq 0 \\ (m+p)n^2 - \{5m^2 + 2mp + p^2\}n + (m+p)4m^2 &\leq 0 \\ n^2 - \frac{5m^2 + 2mp + p^2}{m+p}n + 4m^2 &\leq 0 \\ \left(n - \frac{5m^2 + 2mp + p^2}{2(m+p)}\right)^2 - \frac{(5m^2 + 2mp + p^2)^2}{4(m+p)^2} + 4m^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

であり、これは

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{5m^2 + 2mp + p^2}{2(m+p)}\right)^2 &\leq \frac{9m^4 - 12m^3p - 2m^2p^2 + 4mp^3 + p^4}{4(m+p)^2} \\ \left(n - \frac{5m^2 + 2mp + p^2}{2(m+p)}\right)^2 &\leq \frac{(m-p)^2(3m+p)^2}{4(m+p)^2} \\ \left|n - \frac{5m^2 + 2mp + p^2}{2(m+p)}\right| &\leq \frac{(m-p)(3m+p)}{2(m+p)} \end{aligned}$$

と変形され、

$$\begin{aligned} \frac{5m^2 + 2mp + p^2}{2(m+p)} - \frac{(m-p)(3m+p)}{2(m+p)} &\leq n \leq \frac{5m^2 + 2mp + p^2}{2(m+p)} + \frac{(m-p)(3m+p)}{2(m+p)} \\ m+p &\leq n \leq \frac{4m^2}{m+p} \end{aligned}$$

となります。従って

$m < m+p < 2m < n$ 、 $(n-m)p \leq m^2$ 、 $m+p \leq n \leq \frac{4m^2}{m+p}$  であれば

$$C_{m,n} \leq C_{m,m+p}$$

が成り立ち、 $(n-m)p \leq m^2$  であって、 $n < m+p$  または  $\frac{4m^2}{m+p} < n$  であれば

$$C_{m,n} \not\leq C_{m,m+p}$$

です。

しかし、よく見れば前者において  $m+p \leq n$  の部分は不要ですし、 $(n-m)p \leq m^2$  を  $n \leq \frac{m(m+p)}{p}$  と書き直せば

$$\frac{m(m+p)}{p} - \frac{4m^2}{m+p} = \frac{m\{(m+p)^2 - 4mp\}}{p(m+p)} = \frac{m(m-p)^2}{p(m+p)} > 0$$

から

$$\frac{m(m+p)}{p} \geq \frac{4m^2}{m+p}$$

であり、また  $\frac{m(m+p)}{p} < n$  の部分は  $t < s$  に対応していて、そもそも不等式は成り立っていないので、以下のように簡略化できます：

**事実 9.13.9**  $m < m + p < 2m < n$  であるとき、

(i)  $n \leq \frac{4m^2}{m+p}$  であれば

$$C_{m,n} \leq C_{m,m+p}$$

が成り立ち、

(ii)  $\frac{4m^2}{m+p} < n$  であれば

$$C_{m,n} \not\leq C_{m,m+p}$$

です。

例えば  $m = 5$  で計算してみると、 $\frac{100}{p+5} \geq n$  なら  $C_{5,n} \leq C_{5,5+p}$  です。さらに  $p = 1$  とすれば  $C_{5,16} \leq C_{5,6}$  を意味します。

#### 9.13.4 $v + w = sv$ の場合

$0 < m, p, 2m < n, 2p < r$  として  $C_{m,n} \leq C_{p,r}$  を調べます。条件  $s \leq t$  はすなわち  $\frac{n}{m} \leq \frac{r}{p}$  であってこれは  $np \leq mr$  と書くことが出来ます。

一般的な結果から、 $r(n - 2m)^2 \leq n(r - 2p)^2$  が成り立つことが  $C_{m,n} \leq C_{p,r}$  が成り立つ必要十分条件です。

ここで  $n = m + p$  である場合を考えると、

$$C_{m,n} = C_{m,m+p} = C_{p,m+p}$$

であり、

$$np \leq mr \Leftrightarrow p^2 \leq m(r - p)$$

に注意すれば、 $p < p + m < 2p < r$ 、 $p^2 \leq m(r - p)$ 、 $r(p - m)^2 \leq (m + p)(r - 2p)^2$  であれば

$$\underbrace{C_{p,m+p}}_{\text{小さいところ}} \leq \underbrace{C_{p,r}}_{\text{大きいところ}}$$

が成り立ちます。ここで

$$\begin{aligned} (m + p)(r - 2p)^2 &\geq r(p - m)^2 \\ (m + p)(r^2 - 4pr + 4p^2) - (p - m)^2 r &\geq 0 \\ (m + p)r^2 - \{5p^2 + 2mp + m^2\}r + (m + p)4p^2 &\geq 0 \\ r^2 - \frac{5p^2 + 2mp + m^2}{m + p}r + 4p^2 &\geq 0 \\ \left(r - \frac{5p^2 + 2mp + m^2}{2(m + p)}\right)^2 - \frac{(5p^2 + 2mp + m^2)^2}{4(m + p)^2} + 4p^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

であり、これは

$$\begin{aligned} \left(r - \frac{5p^2 + 2mp + m^2}{2(m + p)}\right)^2 &\geq \frac{9p^4 - 12p^3m - 2p^2m^2 + 4pm^3 + m^4}{4(m + p)^2} \\ \left(r - \frac{5p^2 + 2mp + m^2}{2(m + p)}\right)^2 &\geq \frac{(p - m)^2(3p + m)^2}{4(m + p)^2} \\ \left|r - \frac{5p^2 + 2mp + m^2}{2(m + p)}\right| &\geq \frac{(m - p)(3p + m)}{2(m + p)} \end{aligned}$$

と変形され、

$$r \leq \frac{5p^2 + 2mp + m^2}{2(m + p)} - \frac{(m - p)(3p + m)}{2(m + p)} = \frac{4p^2}{m + p}$$

または

$$r \geq \frac{5p^2 + 2mp + m^2}{2(m + p)} + \frac{(m - p)(3p + m)}{2(m + p)} = m + p$$

となります。従って

$p < p + m < 2p < r$ 、 $p^2 \leq m(r - p)$  のとき、 $r \leq \frac{4p^2}{m+p}$  または  $m + p \leq r$  であれば

$$C_{p,m+p} \leq C_{p,r}$$

が成り立ちます。また  $\frac{4p^2}{m+p} < r < m + p$  であれば、

$$C_{p,m+p} \not\leq C_{p,r}$$

しかし、

$$\frac{4p^2}{m+p} \leq m+p < r$$

$$p^2 \leq m(r-p) \Leftrightarrow \frac{p(p+m)}{m} \leq r$$

ですから、

$$\frac{p(p+m)}{m} - (p+m) = \frac{(p-m)(p+m)}{m} \geq 0$$

を合わせて考えれば以下のように簡略化できます：

**事実 9.13.10**  $p < p+m < 2p < r$  のとき、 $\frac{p(p+m)}{m} \leq r$  であれば

$$C_{p,m+p} \leq C_{p,r}$$

が成り立ちます。

例えば  $p=5$  のときに計算してみると  $\frac{5(5+m)}{m} \leq r$  のとき  $C_{5,5+m} \leq C_{5,r}$  が成り立ちます。

さらに  $m=1$  の場合は  $C_{5,6} \leq C_{5,30}$ 、 $m=2$  の場合は  $C_{5,7} \leq C_{5,18}$  が分かります。

## 9.14 $C_{m,n}$ ( $m$ 一定)：最終的な結論

別の形でまとめると次のようになります：

**事実 9.14.1** [ 大きいところと小さいところの兼ね合い ]

(i)  $m < N < 2m < n$  のとき、

(ia)  $n \leq \frac{4m^2}{N}$  なら  $C_{m,n} \leq C_{m,N}$

(ib)  $\frac{4m^2}{N} < n$  なら  $C_{m,n} \not\leq C_{m,N}$

(ii)  $m < n < 2m < N$  のとき、

$\frac{mn}{n-m} \leq N$  なら  $C_{m,n} \leq C_{m,N}$

## 9.15 $C_{m,n}$ ( $n$ 一定)：最終的な結論

$sv = tw = n$  の場合を考えます。

$$2 < t < s \Leftrightarrow \frac{n}{w} < \frac{n}{v} \Leftrightarrow v < w$$

ですから、 $0 < v < w < \frac{n}{2}$  であれば  $C_{v,n} \not\leq C_{w,n}$  です。

また、 $2 < s \leq t$  すなわち  $0 < w \leq v < \frac{n}{2}$  の場合は、

$$v \geq w$$

$$n - 2v \leq n - 2w$$

$$(n - 2v)^2 \leq (n - 2w)^2$$

$$n(n - 2v)^2 \leq n(n - 2w)^2$$

$$tw(sv - 2v)^2 \leq sv(tw - 2w)^2$$

が成り立っていますので  $C_{v,n} \leq C_{w,n}$  が成り立ちます。

大きいところは  $C_{v,n} = C_{n-v,n}$  に注意すれば同様に結果が得られますので、まとめると次のようになります：

**事実 9.15.1**

(i)  $0 < m < M < \frac{n}{2}$  なら  $C_{m,n} \not\leq C_{M,n}$

(ii)  $0 < M \leq m < \frac{n}{2}$  なら  $C_{m,n} \leq C_{M,n}$

(iii)  $\frac{n}{2} < M < m$  なら  $C_{m,n} \not\leq C_{M,n}$

(iv)  $\frac{n}{2} < m \leq M$  なら  $C_{m,n} \leq C_{M,n}$

つまり、整数の場合に簡単に書けば以下のようになっています：

**事実 9.15.2**

$$C_{1,n} \geq C_{2,n} \geq \cdots \geq C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n} = C_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, n} \leq C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n} \leq \cdots \leq C_{n,n}$$

$$\begin{array}{c}
C_{n,n} \geq C_{n-1,n} \geq \cdots \geq C_{[\frac{n}{2}],n} \\
|| \qquad \qquad \qquad || \\
C_{1,n} \geq \cdots \geq C_{[\frac{n}{2}],n}
\end{array}$$

## 9.16 最終的な結論

**事実 9.16.1 [ 一般的な最終結論 ]**

- (i)  $0 < m < \frac{n}{2}, 0 < M < \frac{N}{2}$ 、 $mN < nM$  のとき  $C_{m,n} \not\leq C_{M,N}$
- (ii)  $0 < m < \frac{n}{2}, 0 < M < \frac{N}{2}$ 、 $mN \geq nM$  のとき
  - (iia)  $N(n-2m)^2 \leq n(N-2M)^2$  であれば  $C_{m,n} \leq C_{M,N}$
  - (iib)  $N(n-2m)^2 > n(N-2M)^2$  であれば  $C_{m,n} \not\leq C_{M,N}$

極大条件である  $N(n-2m)^2 \leq n(N-2M)^2$  は、一般には

$$N(n-2m)^2 \leq n(N-2M)^2$$

$$N(n^2 - 4mn + 4m^2) - (N-2M)^2 n \leq 0$$

$$Nn^2 - \{4mN + (N-2M)^2\}n + 4m^2N \leq 0$$

$$n^2 - \frac{(N-2M)^2 + 4mN}{N}n + 4m^2 \leq 0$$

$$\left\{ n - \frac{(N-2M)^2 + 4mN}{2N} \right\}^2 \leq \frac{\{(N-2M)^2 + 4mN\}^2}{4N^2} - 4m^2$$

$$\left\{ n - \frac{(N-2M)^2 + 4mN}{2N} \right\}^2 \leq \frac{(N-2M)^2 \{(N-2M)^2 + 8mN\}}{4N^2}$$

ですが、特に  $n = N$  であれば（もちろん  $0 < m < \frac{n}{2}, 0 < M < \frac{N}{2}$  も仮定します）

$$n(n-2m)^2 \leq n(n-2M)^2$$

$$n-2m \leq n-2M$$

$$m \geq M$$

となりますし、 $m = M$  であれば（もちろん  $0 < m < \frac{n}{2}, 0 < M < \frac{N}{2}$  も仮定します）

$$\begin{aligned}
N(n-2m)^2 &\leq n(N-2m)^2 \\
\left\{ n - \frac{(N-2m)^2 + 4mN}{2N} \right\}^2 &\leq \frac{(N-2m)^2 \{(N-2m)^2 + 8mN\}}{4N^2} \\
\left\{ n - \frac{N^2 + 4m^2}{2N} \right\}^2 &\leq \frac{(N-2m)^2 (N+2m)^2}{4N^2} \\
&\leq \left( \frac{N^2 - 4m^2}{2N} \right)^2 \\
\frac{N^2 + 4m^2}{2N} - \frac{N^2 - 4m^2}{2N} &\leq n \leq \frac{N^2 + 4m^2}{2N} + \frac{N^2 - 4m^2}{2N} \\
\frac{4m^2}{N} &\leq n \leq N \\
2m &\leq \sqrt{nN} \leq N
\end{aligned}$$

となります。

一方で有界条件は、 $m < \frac{n}{2}, M < \frac{N}{2}$  のときは

$$\begin{aligned}
(ab)^{mN} (a^{n-2m} + b^{n-2m})^N &\leq 2^{N-n} (ab)^{Mn} (a^{N-2M} + b^{N-2M})^n \\
\frac{x^{mN-nM} (x^{n-2m} + 1)^N}{(x^{N-2M} + 1)^n} &\leq 2^{N-n}
\end{aligned}$$

の左辺の有界条件ですから、

$$mN - nM + (n-2m)N \leq (N-2M)n$$

$$-mN \leq -nM$$

$$nM \leq mN$$

です。

$m < \frac{n}{2}, \frac{N}{2} < M$  のときは

$$\begin{aligned}
(ab)^{mN} (a^{n-2m} + b^{n-2m})^N &\leq 2^{N-n} (ab)^{n(N-M)} (a^{2M-N} + b^{2M-N})^n \\
\frac{x^{mN-n(N-M)} (x^{n-2m} + 1)^N}{(x^{2M-N} + 1)^n} &\leq 2^{N-n}
\end{aligned}$$

の左辺の有界条件ですから、

$$mN - n(N - M) + (n - 2m)N \leq (2M - N)n$$

$$nN - mN \leq Mn$$

$$n(N - M) \leq mN$$

です。

また  $\frac{n}{2} < m, M < \frac{N}{2}$  のときは

$$(ab)^{(n-m)N} (a^{2m-n} + b^{2m-n})^N \leq 2^{N-n} (ab)^{Mn} (a^{N-2M} + b^{N-2M})^n$$

$$\frac{x^{(n-m)N-Mn} (x^{2m-n} + 1)^N}{(x^{N-2M} + 1)^n} \leq 2^{N-n}$$

の左辺の有界条件ですから、

$$(n - m)N - Mn + (2m - n)N \leq (N - 2M)n$$

$$mN \leq nN - nM$$

$$nM \leq (n - m)N$$

です。

最後に  $\frac{n}{2} < m, \frac{N}{2} < M$  のときは

$$(ab)^{(n-m)N} (a^{2m-n} + b^{2m-n})^N \leq 2^{N-n} (ab)^{(N-M)n} (a^{2M-N} + b^{2M-N})^n$$

$$\frac{x^{(n-m)N-(N-M)n} (x^{2m-n} + 1)^N}{(x^{2M-N} + 1)^n} \leq 2^{N-n}$$

の左辺の有界条件ですから、

$$(n - m)N - (N - M)n + (2m - n)N \leq (2M - N)n$$

$$mN \leq nM$$

$$-nM \leq -mN$$

$$nN - nM \leq nN - mN$$

$$n(N - M) \leq (n - m)N$$

です。

以上をまとめると

**事実 9.16.2 [ 有界条件 ]**

$$(i) \quad m < \frac{n}{2}, M < \frac{N}{2} \Rightarrow nM \leq mN$$

$$(ii) \quad m < \frac{n}{2}, \frac{N}{2} < M \Rightarrow n(N - M) \leq mN$$

$$(iii) \quad \frac{n}{2} < m, M < \frac{N}{2} \Rightarrow nM \leq (n - m)N$$

$$(iv) \quad \frac{n}{2} < m, \frac{N}{2} < M \Rightarrow n(N - M) \leq (n - m)N$$

ですが、これはまとめて書くと次のようになります：

**事実 9.16.3 [ 有界条件 ]**

$$n \cdot \min\{M, N - M\} \leq \min\{m, n - m\} \cdot N$$

あるいは、

**事実 9.16.4 [ 有界条件 ]**

$$\{m + (n - m)\} \cdot \min\{M, N - M\} \leq \min\{m, n - m\} \cdot \{M + (N - M)\}$$

の方が良いのでしょうか？ なぜなら極大条件に出てくる  $(n - 2m)^2, (N - 2M)^2$  は、 $m$  を  $n - m$  に置き換えても、あるいは  $M$  を  $N - M$  に置き換えても値は変わらないからです。

極大条件も、

$$N(n - 2m)^2 \leq n(N - 2M)^2$$

$$\{(N - M) + M\} \{(n - m) - m\}^2 \leq \{(n - m) + m\} \{(N - M) - M\}^2$$

とした方が良いでしょう。こうして見ると、パラメータを  $m, n$  で捉えるのではなく、 $m, n - m$  で捉えた方が良くようにも思えます。次節ではこの方向で捉え直してみよう。

### 第 III 部

## Generalized Muirhead Means

### 10 2変数再考 多変数化へ向けて

ひと段落ついて、3変数化なり先のことを考えて色々検索していたところ、今まで『2変数巡回型 power mean』と呼んでいたものは、一般には『generalized Muirhead mean』と呼ばれており、2変数の場合に同様の結果が知られていることが分かりました [Tri06]。とは言っても諸々の事情でまだ入手出来ておりませんが・・・

$$\Sigma_{a,b}(x,y) = \left( \frac{x^a y^b + x^b y^a}{2} \right)^{\frac{1}{a+b}} \quad (a+b \neq 0, x, y > 0)$$

明らかに  $\Sigma_{a,b} = \Sigma_{b,a}$  なので  $0 < a < b$  の場合のみ考えます。  $a = b$  であれば

$$\Sigma_{a,a}(x,y) = (x^a y^a)^{\frac{1}{2a}} = \sqrt{xy}$$

です。既に見た結果をこの書式で書けば以下の通りです：

**事実 10.0.1 [ 最終的な結論 GMM 記法 ]**  $0 < a < b, 0 < v < w$ .

(i)  $aw - bv < 0$  のとき  $\Sigma_{a,b} \not\leq \Sigma_{v,w}$ .

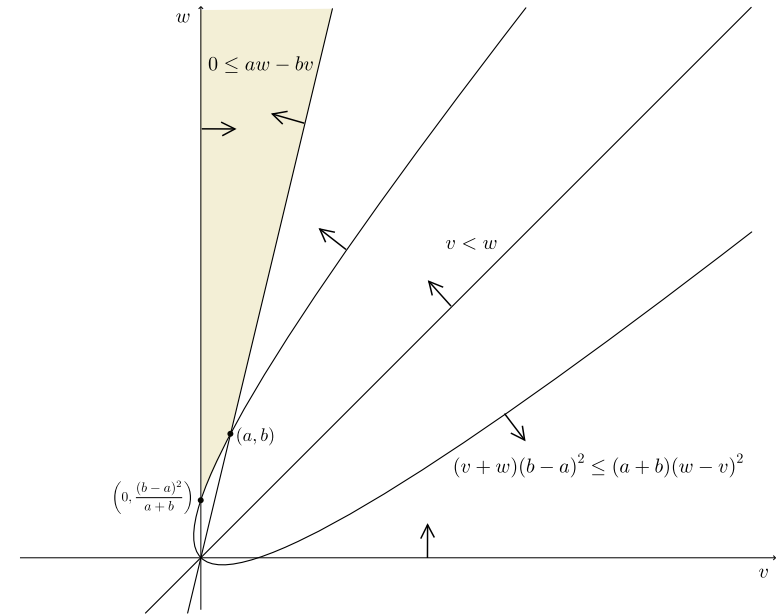
(ii)  $aw - bv \geq 0$  のとき

(iia)  $(v+w)(b-a)^2 \leq (a+b)(w-v)^2$  であれば  $\Sigma_{a,b} \leq \Sigma_{v,w}$ .

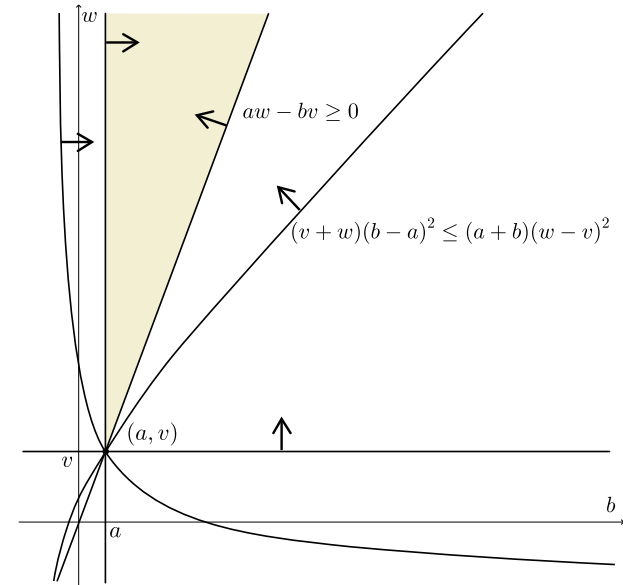
(iib)  $(v+w)(b-a)^2 > (a+b)(w-v)^2$  であれば  $\Sigma_{a,b} \not\leq \Sigma_{v,w}$ .

ただし、[Tri06] で定義された (と思われる) generalized Muirhead mean は 2 変数の場合のみを扱っており、2 変数では巡回式と対称式は一致しています。これを 3 変数化するとき、対称性を犠牲にして項数の少ない巡回式で行くのか、項数が多いが対称性の高い対称式で行くのか、あるいはその両方が考えられます。

$(a, b)$  を固定して図示すると以下の通りになります：



$(a, v)$  を固定して図示すると以下の通りになります：



### 10.0.1 $a + b = v + w$ の場合

有界条件は

$$\begin{aligned} bv &\leq aw \\ b \left( \frac{v+w}{2} - \frac{w-v}{2} \right) &\leq a \left( \frac{v+w}{2} + \frac{w-v}{2} \right) \\ (b-a)(v+w) &\leq (a+b)(w-v) \end{aligned}$$

と同値変形されるので、次数の等しい場合、つまり、 $a + b = v + w$  のときは、

$$aw - bv \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b - a \leq w - v$$

であり、更に

$$v \leq a < b \leq w$$

とも同値になります。この場合、(iib) のケースは存在せず、条件はシンプルになります。

**事実 10.0.2** [ 次数の等しい場合 GMM 記法 ]  $0 < a < b, 0 < v < w, a + b = v + w$ .

(i)  $v \leq a < b \leq w$  でないとき  $\Sigma_{a,b} \not\leq \Sigma_{v,w}$ .

(ii)  $v \leq a < b \leq w$  であるとき  $\Sigma_{a,b} \leq \Sigma_{v,w}$ .

## 10.1 1 変数化による計算再検討

$a = 0, v = 0$  の場合も考慮に入れて計算してみましょう。以下  $0 \leq a < b, 0 \leq v < w$  と仮定します。

$$\begin{aligned} \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b}} &= \frac{(xy)^{a(v+w)} (x^{b-a} + y^{b-a})^{v+w}}{(xy)^{v(a+b)} (x^{w-v} + y^{w-v})^{a+b}} \\ &= \left( \frac{x}{y} \right)^{aw-bv} \frac{\left\{ \left( \frac{x}{y} \right)^{b-a} + 1 \right\}^{v+w}}{\left\{ \left( \frac{x}{y} \right)^{w-v} + 1 \right\}^{a+b}} \end{aligned}$$

ですから、 $\frac{x}{y} = z$  と置いて、

$$F(z) = z^{aw-bv} \frac{(z^{b-a} + 1)^{v+w}}{(z^{w-v} + 1)^{a+b}}$$

について調べます。有界条件は

$$0 \leq (w-v)(a+b) - (b-a)(v+w) - (aw-bv) = aw-bv$$

です。これが満たされなければ、そもそも不等式は成り立ちません。

$0 \leq a < b, 0 \leq v < w$  とします。

**事実 10.1.1**  $aw - bv < 0$  のとき、 $\Sigma_{a,b} \not\leq \Sigma_{v,w}$ .

**問題 10.1.2**  $aw - bv \geq 0$  のとき

$$F(z) = z^{aw-bv} \frac{(z^{b-a} + 1)^{v+w}}{(z^{w-v} + 1)^{a+b}}, \quad z > 0$$

の最大値が  $2^{v+w-a-b}$  となるための条件を求めてください。

### 10.1.1 極限值

$$F(z) = \frac{1}{z^{aw-bv}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{z^{b-a}}\right)^{v+w}}{\left(1 + \frac{1}{z^{w-v}}\right)^{a+b}} \rightarrow \begin{cases} 0 & aw - bv > 0 \\ 1 & aw - bv = 0 \end{cases} \quad (z \rightarrow +\infty)$$

$$F(z) \rightarrow \begin{cases} 0 & aw - bv > 0 \\ 1 & aw - bv = 0 \end{cases} \quad (x \rightarrow +0)$$

### 10.1.2 1階微分

$$F(z) = z^{aw-bv} \frac{(z^{b-a} + 1)^{v+w}}{(z^{w-v} + 1)^{a+b}}$$

$$F'(z) = -\frac{z^{aw-bv-1}(z^{b-a} + 1)^{v+w-1}}{(z^{w-v} + 1)^{a+b+1}} \{ (aw-bv)z^{b-a+w-v} - (bw-av)z^{b-a} + (bw-av)z^{w-v} - (aw-bv) \}$$

特に  $aw-bv=0$  ならば、

$$F'(z) = -(bw-av) \frac{z^{-1}(z^{b-a} + 1)^{v+w-1}}{(z^{w-v} + 1)^{a+b+1}} (-z^{b-a} + z^{w-v})$$

であって、 $F'(z)=0$  となるのは  $z=1$  のときのみです。

$aw-bv \neq 0$  である場合はそのほかにも解がある可能性があります。例えば  $a=4, b=9, v=3, w=7$  の場合、

$$aw-bv=1, \quad bw-av=51$$

$$F'(z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^9 - 51z^5 + 51z^4 - 1 = 0$$

であり、計算機によるとこれは ( $z>0$  の範囲では)  $z=1$  以外に

$$z \approx 0.430751, \quad z \approx 2.32153$$

と云う解をもちます (互いに逆数になっています)。一般に

$$F'(z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad F'\left(\frac{1}{z}\right)=0$$

が成り立っています。従って、もしも  $z \neq 1$  なる  $z$  で  $F'(z)=0$  となるものが存在するのであれば、必ずそのような  $z$  で  $0 < z < 1$  であるものが存在するはずで

### 10.1.3 微分が消える点

1階微分  $F'(z)$  が 0 となるような点が  $z=1$  以外にあるのかどうか、 $aw-bv \neq 0$  である場合をメインに調べてみましょう。

$$H(z) = -\frac{z^{aw-bv-1}(z^{b-a} + 1)^{v+w-1}}{(z^{w-v} + 1)^{a+b+1}} < 0$$

$$G(z) = (aw-bv)z^{b-a+w-v} - (bw-av)z^{b-a} + (bw-av)z^{w-v} - (aw-bv)$$

と置けば、 $F'(z)=0 \Leftrightarrow G(z)=0$  ですから、まずは  $G(z)$  の様子を調べて  $0 < z < 1, G(z)=0$  となる  $z$  があるかどうか見てみましょう。もしもそのような  $z$  があった場合は、

$$F'(z) = H(z)G(z)$$

$$F''(z) = H'(z)G(z) + H(z)G'(z)$$

ですから、 $F'(z)=0$  であるような  $z$  に対しては

$$F''(z) = H(z)G'(z)$$

となっていることを利用してさらに深く調べることにしましょう。

$$aw-bv > 0, \quad b-a > w-v \quad \text{のとき}$$

$b-a=r(w-v)$  と置けば ( $r>1$ )、

$$\begin{aligned} G(z) &= (aw-bv)z^{b-a+w-v} - (bw-av)z^{b-a} + (bw-av)z^{w-v} - (aw-bv) \\ &= (aw-bv)z^{(r+1)(w-v)} - (bw-av)z^{r(w-v)} + (bw-av)z^{w-v} - (aw-bv) \end{aligned}$$

ですから、ここで  $z^{w-v}=Z$  として

$$I(Z) = (aw-bv)Z^{r+1} - (bw-av)Z^r + (bw-av)Z - (aw-bv)$$

と置けば、 $G(z)=0$  となるような  $0 < z < 1$  が存在することと、 $I(Z)=0$  であるような  $0 < Z < 1$  が存在することは同値です。

$$I'(Z) = (aw-bv)(r+1)Z^r - (bw-av)rZ^{r-1} + (bw-av)$$

$$\begin{aligned} I'(1) &= (aw-bv)(r+1) - (bw-av)r + (bw-av) \\ &= (aw-bv) \left( \frac{b-a}{w-v} + 1 \right) - (bw-av) \left( \frac{b-a}{w-v} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{w-v} \{ (w-v)^2(a+b) - (b-a)^2(v+w) \} \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} I''(Z) &= (aw-bv)r(r+1)Z^{r-1} - (bw-av)(r-1)rZ^{r-2} \\ &= Z^{r-2} \{ (aw-bv)r(r+1)Z - (bw-av)(r-1)r \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I''(1) &= (aw-bv)r(r+1) - (bw-av)(r-1)r \\ &= \frac{b-a}{(w-v)^2} \{ (w-v)^2(a+b) - (b-a)^2(v+w) \} \end{aligned}$$

です。

$I''(Z) = 0$  となるのは

$$Z_0 = \frac{(bw - av)(r - 1)r}{(aw - bv)r(r + 1)} = \frac{(bw - av)\left(\frac{b-a}{w-v} - 1\right)}{(aw - bv)\left(\frac{b-a}{w-v} + 1\right)} = \frac{(bw - av)(b - a - w + v)}{(aw - bv)(b - a + w - v)}$$

のみですが、

$$Z_0 \leq 1 \Leftrightarrow (bw - av)\{b - a - (w - v)\} \leq (aw - bv)(b - a + w - v)$$

$$(b - a)^2(v + w) \leq (w - v)^2(a + b)$$

であることと、

$$\begin{aligned} I'(Z_0) &= (aw - bv)(r + 1)Z_0^r - (bw - av)rZ_0^{r-1} + (bw - av) \\ &= \{(aw - bv)(r + 1)Z_0 - (bw - av)r\}Z_0^{r-1} + (bw - av) \\ &= \{(bw - av)(r - 1) - (bw - av)r\}Z_0^{r-1} + (bw - av) \\ &= (bw - av)(1 - Z_0^{r-1}) \end{aligned}$$

に注意すれば、 $I(Z)$  の増減表は  $((b - a)^2(v + w) \leq (w - v)^2(a + b)$  の場合は) 以下の通りです。

| $(b - a)^2(v + w) < (w - v)^2(a + b)$ |                  |            |               |            |              |
|---------------------------------------|------------------|------------|---------------|------------|--------------|
| $Z$                                   | 0                | ...        | $Z_0$         | ...        | 1            |
| $I(Z)$                                | $-(aw - bv) < 0$ | $\nearrow$ | $I(Z_0)$      | $\searrow$ | 0            |
| $I'(Z)$                               | $bw - av > 0$    | +          | $I'(Z_0) > 0$ | +          | $I'(1) > 0$  |
| $I''(Z)$                              |                  | -          | 0             | +          | $I''(1) > 0$ |

$$(b - a)^2(v + w) = (w - v)^2(a + b)$$

| $Z$      | 0                | ...        | 1 |
|----------|------------------|------------|---|
| $I(Z)$   | $-(aw - bv) < 0$ | $\nearrow$ | 0 |
| $I'(Z)$  | $bw - av > 0$    | +          | 0 |
| $I''(Z)$ |                  | -          | 0 |

ただし、 $(b - a)^2(v + w) > (w - v)^2(a + b)$  のときは、 $I'(1) < 0$  ですから、

$$G(z) = I(z^{w-v})$$

$$G'(z) = I'(z^{w-v})(w - v)z^{w-v-1}$$

であり、

$$F''(1) = H(1)G'(1) = H(1)I'(1)(w - v) > 0$$

となって、 $F(1)$  は極小値であることになってしまい、 $F(1)$  が  $F(z)$  の最大値ではありません。

以上から、 $(b - a)^2(v + w) \leq (w - v)^2(a + b)$  であれば、 $0 < z < 1$  の範囲に  $F'(z) = 0$  となるような点はなく、 $F(1)$  は唯一の極値かつ極大値、つまり最大値であることが分かります。

$$aw - bv > 0, b - a \leq w - v \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= (aw - bv)z^{b-a+w-v} - (aw - bv) + (bw - av)z^{w-v} - (bw - av)z^{b-a} \\ &= (aw - bv)(z^{b-a+w-v} - 1) + (bw - av)(z^{w-v} - z^{b-a}) \\ &= (aw - bv)(z^{b-a+w-v} - 1) + (bw - av)z^{b-a}(z^{w-v-b+a} - 1) \end{aligned}$$

と書けるので、 $0 < z < 1$  の範囲では  $z^{b-a+w-v} - 1 < 0$ ,  $z^{w-v-b+a} - 1 < 0$  に注意すればこの範囲内に  $G(z) = 0$  となるような  $z$  はありません。従って、 $F'(z) = 0$  となる  $z$  は  $z = 1$  のみです。

また、

$$\begin{aligned} F''(1) &= H(1)G'(1) \\ &= H(1)\{(aw - bv)(b - a + w - v) + (bw - av)(w - v - b + a)\} \\ &= H(1)\{(w - v)^2(a + b) - (b - a)^2(v + w)\} \end{aligned}$$

なので、 $(w - v)^2(a + b) - (b - a)^2(v + w) < 0$  のときは  $F(1)$  は極小値であり、不等式は成り立ちません。

$(w - v)^2(a + b) - (b - a)^2(v + w) > 0$  のときは、 $F(1)$  は唯一の極値であって、極大値ですから、これは最大値であることが分かります。

$$(w - v)^2(a + b) - (b - a)^2(v + w) = 0 \text{ のときは、} b - a \leq w - v \text{ と、}$$

$$(w - v)^2(a + b) = (b - a)^2(v + w)$$

$$(w - v)(bw - av + aw - bv) = (b - a)\{bw - av - (aw - bv)\}$$

を合わせて考えれば  $aw - bv = 0$  であることになります。

$aw - bv = 0$  のとき

$$G(z) = (bw - av)(z^{w-v} - z^{b-a})$$

ですから前に指摘したように  $G(z) = 0$  となる  $z$  は  $z = 1$  のみです。また、

$$F''(1) = H(1)G'(1) = H(1)(bw - av)(w - v - b + a)$$

ですから、 $H(1) < 0$  であったことに注意すれば、 $w - v < b - a$  であるときは  $F(1)$  は極小値であって、不等式は成立しません。

$w - v > b - a$  であれば  $F(1)$  は唯一の極値であって極大値ですから最大値であり、不等式は成立します。

$w - v = b - a$  のときは、

$$\begin{aligned} w - v &= b - a \\ aw - av &= (b - a)a \\ bv - av &= (b - a)a \\ (b - a)v &= (b - a)a \\ v &= a \end{aligned}$$

から  $a = v, b = w$  ですから、不等式は自明に成立します。ただし、不等式は任意の  $z$  で等号になってしまうので、等号成立条件には注意が必要です。

また、 $aw - bv = 0$  であれば

$$\begin{aligned} (w - v)^2(a + b) &\geq (b - a)^2(v + w) \\ (bw - av)(w - v) &\geq (bw - av)(b - a) \\ w - v &\geq b - a \end{aligned}$$

は同値変形ですから、結局、不等式が成り立つための条件は  $(w - v)^2(a + b) \geq (b - a)^2(v + w)$  です。

$0 \leq a < b, 0 \leq v < w$  とします。

**事実 10.1.3**  $aw - bv \geq 0$  のとき

$$F(z) = z^{aw-bv} \frac{(z^{b-a} + 1)^{v+w}}{(z^{w-v} + 1)^{a+b}}, \quad z > 0$$

の最大値が  $2^{v+w-a-b}$  となるための条件は以下の通り：

$$(b - a)^2(v + w) \leq (w - v)^2(a + b)$$

## 10.2 Hessian による判定へ向けて

ここからは、多変数化を目指して、2 変数での計算を見直してみようと思います。まずは Hessian を見てみましょう。取り敢えずは行列式のみ考えます。

$$F(x, y) = \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b}} \quad 0 < a < b, \quad 0 < v < w, \quad 0 < x, y$$

### 10.2.1 偏微分の計算

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1}} x \left\{ (bw - av)x^{b+v}y^{w+a} + (aw - bv)x^{a+v}y^{w+b} \right. \\ &\quad \left. - (aw - bv)x^{b+w}y^{v+a} - (bw - av)x^{a+w}y^{v+b} \right\} \\ F_y(x, y) &= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1}} y \left\{ (bw - av)x^{b+v}y^{a+w} + (aw - bv)x^{a+v}y^{b+w} \right. \\ &\quad \left. - (aw - bv)x^{b+w}y^{a+v} - (bw - av)x^{a+w}y^{b+v} \right\} \end{aligned}$$

以降頻出するので  $bw - av = K, aw - bv = D$  とします。

$$F_x(x, y) = \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} x} \left( Kx^{b+v} y^{w+a} + Dx^{a+v} y^{w+b} - Dx^{b+w} y^{v+a} - Kx^{a+w} y^{v+b} \right)$$

$$F_y(x, y) = -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} y} \left( Kx^{b+v} y^{a+w} + Dx^{a+v} y^{b+w} - Dx^{b+w} y^{a+v} - Kx^{a+w} y^{b+v} \right)$$

$$F_{xx}(x, y) = -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} x^2} (w+v-1) \left( by^a x^b + ay^b x^a \right) \left\{ -Kx^{b+v} y^{a+w} - Dx^{a+v} y^{b+w} + Dx^{b+w} y^{a+v} + Kx^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$+ \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} (a+b+1) (wy^v x^w + vy^w x^v) \left\{ -Kx^{b+v} y^{a+w} - Dx^{a+v} y^{b+w} + Dx^{b+w} y^{a+v} + Kx^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$+ \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} x^2} \left\{ -Kx^{b+v} y^{a+w} - Dx^{a+v} y^{b+w} + Dx^{b+w} y^{a+v} + Kx^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$- \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} x^2} \left\{ -vKx^{b+v} y^{a+w} - vDx^{a+v} y^{b+w} + wDx^{b+w} y^{a+v} + wKx^{a+w} y^{b+v} - bKx^{b+v} y^{a+w} - aDx^{a+v} y^{b+w} + bDx^{b+w} y^{a+v} + aKx^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} (w+v-1) \left( by^a x^b + ay^b x^a \right) (x^v y^w + x^w y^v) \left\{ -Kx^{b+v} y^{a+w} - Dx^{a+v} y^{b+w} + Dx^{b+w} y^{a+v} + Kx^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$+ \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} (a+b+1) \left( x^a y^b + x^b y^a \right) (wy^v x^w + vy^w x^v) \left\{ -Kx^{b+v} y^{a+w} - Dx^{a+v} y^{b+w} + Dx^{b+w} y^{a+v} + Kx^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$+ \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} x^2} \left\{ -K(1-b-v)x^{b+v} y^{a+w} - D(1-a-v)x^{a+v} y^{b+w} + D(1-b-w)x^{b+w} y^{a+v} + K(1-a-w)x^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$F_{xx}(x, y) = \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \left\{ (a+b+1) \left( x^a y^b + x^b y^a \right) (vx^v y^w + wx^w y^v) - (w+v-1) \left( ax^a y^b + bx^b y^a \right) (x^v y^w + x^w y^v) \right\}$$

$$\left\{ -Kx^{b+v} y^{a+w} - Dx^{a+v} y^{b+w} + Dx^{b+w} y^{a+v} + Kx^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$+ \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \left( x^a y^b + x^b y^a \right) (x^v y^w + x^w y^v) \left\{ -K(1-b-v)x^{b+v} y^{a+w} - D(1-a-v)x^{a+v} y^{b+w} + D(1-b-w)x^{b+w} y^{a+v} + K(1-a-w)x^{a+w} y^{b+v} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left\{ (a+b+1) \left( v x^{b+v} y^{a+w} + v x^{a+v} y^{b+w} + w x^{b+w} y^{a+v} + w x^{a+w} y^{b+v} \right) \right. \\
&\quad \left. - (w+v-1) \left( b x^{b+v} y^{a+w} + a x^{a+v} y^{b+w} + b x^{b+w} y^{a+v} + a x^{a+w} y^{b+v} \right) \right\} \\
&\quad \left\{ -K x^{b+v} y^{a+w} - D x^{a+v} y^{b+w} + D x^{b+w} y^{a+v} + K x^{a+w} y^{b+v} \right\} \\
&+ \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left( x^{b+v} y^{a+w} + x^{a+v} y^{b+w} + x^{b+w} y^{a+v} + x^{a+w} y^{b+v} \right) \\
&\quad \left\{ -K(1-b-v) x^{b+v} y^{a+w} - D(1-a-v) x^{a+v} y^{b+w} \right. \\
&\quad \left. + D(1-b-w) x^{b+w} y^{a+v} + K(1-a-w) x^{a+w} y^{b+v} \right\} \\
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left\{ (-K+b+v) x^{b+v} y^{a+w} + (-D+a+v) x^{a+v} y^{b+w} \right. \\
&\quad \left. + (D+b+w) x^{b+w} y^{a+v} + (K+a+w) x^{a+w} y^{b+v} \right\} \\
&\quad \left\{ -K x^{b+v} y^{a+w} - D x^{a+v} y^{b+w} + D x^{b+w} y^{a+v} + K x^{a+w} y^{b+v} \right\} \\
&+ \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left( x^{b+v} y^{a+w} + x^{a+v} y^{b+w} + x^{b+w} y^{a+v} + x^{a+w} y^{b+v} \right) \\
&\quad \left\{ -K(1-b-v) x^{b+v} y^{a+w} - D(1-a-v) x^{a+v} y^{b+w} \right. \\
&\quad \left. + D(1-b-w) x^{b+w} y^{a+v} + K(1-a-w) x^{a+w} y^{b+v} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left[ -K(-K+1) x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} - D(-D+1) x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D(D+1) x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} + K(K+1) x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(-K+b-a+1)D - (-D+a-b+1)K\} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(D+b-a+1)K + (K+a-b+1)D\} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad + \{(-D+v-w+1)K - (K+w-v+1)D\} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \\
&\quad + \{(-K+v-w+1)D - (D+w-v+1)K\} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. + 2\{(-K+b-a+v-w)K + (-D+a-b+v-w)D\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left[ K(K-1) x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} + D(D-1) x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D(D+1) x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} + K(K+1) x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b-1)D + (D+b-a-1)K\} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b+1)D + (D+b-a+1)K\} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v+1)D + (D+w-v-1)K\} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v-1)D + (D+w-v+1)K\} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$F_{yy}(x, y)$$

$$= F_{xx}(y, x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} y^2} \\
&\quad \left[ K(K-1) y^{2(b+v)} x^{2(a+w)} + D(D-1) y^{2(a+v)} x^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D(D+1) y^{2(b+w)} x^{2(a+v)} + K(K+1) y^{2(a+w)} x^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b-1)D + (D+b-a-1)K\} y^{a+b+2v} x^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b+1)D + (D+b-a+1)K\} y^{a+b+2w} x^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v+1)D + (D+w-v-1)K\} y^{2a+v+w} x^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v-1)D + (D+w-v+1)K\} y^{2b+v+w} x^{2a+v+w} \\
&\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} y^{a+b+v+w} x^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_{xy}(x, y) \\
&= F_{yx}(x, y) \\
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} xy} \\
&\quad \left\{ -(b+w)Dx^{a+v}y^{b+w} - (a+w)Kx^{b+v}y^{a+w} \right. \\
&\quad \left. + (b+v)Kx^{a+w}y^{b+v} + (a+v)Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&\quad - \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} xy} (w+v-1) (bx^a y^b + ax^b y^a) \\
&\quad \left\{ -Dx^{a+v}y^{b+w} - Kx^{b+v}y^{a+w} + Kx^{a+w}y^{b+v} + Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&\quad + \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} (a+b+1) (wx^v y^w + vx^w y^v) \\
&\quad \left\{ -Dx^{a+v}y^{b+w} - Kx^{b+v}y^{a+w} + Kx^{a+w}y^{b+v} + Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} (x^a y^b + x^b y^a) (x^v y^w + x^w y^v) \\
&\quad \left\{ -(b+w)Dx^{a+v}y^{b+w} - (a+w)Kx^{b+v}y^{a+w} \right. \\
&\quad \left. + (b+v)Kx^{a+w}y^{b+v} + (a+v)Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&\quad - \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} (w+v-1) (bx^a y^b + ax^b y^a) (x^v y^w + x^w y^v) \\
&\quad \left\{ -Dx^{a+v}y^{b+w} - Kx^{b+v}y^{a+w} + Kx^{a+w}y^{b+v} + Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&\quad + \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} (a+b+1) (x^a y^b + x^b y^a) (wx^v y^w + vx^w y^v) \\
&\quad \left\{ -Dx^{a+v}y^{b+w} - Kx^{b+v}y^{a+w} + Kx^{a+w}y^{b+v} + Dx^{b+w}y^{a+v} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \left( x^{a+v}y^{b+w} + x^{b+v}y^{a+w} + x^{a+w}y^{b+v} + x^{b+w}y^{a+v} \right) \\
&\quad \left\{ -(b+w)Dx^{a+v}y^{b+w} - (a+w)Kx^{b+v}y^{a+w} \right. \\
&\quad \left. + (b+v)Kx^{a+w}y^{b+v} + (a+v)Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&\quad + \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left\{ (a+b+1) (wx^{a+v}y^{b+w} + wx^{b+v}y^{a+w} + vx^{a+w}y^{b+v} + vx^{b+w}y^{a+v}) \right. \\
&\quad \left. - (w+v-1) (bx^{a+v}y^{b+w} + ax^{b+v}y^{a+w} + bx^{a+w}y^{b+v} + ax^{b+w}y^{a+v}) \right\} \\
&\quad \left\{ -Dx^{a+v}y^{b+w} - Kx^{b+v}y^{a+w} + Kx^{a+w}y^{b+v} + Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \left( x^{a+v}y^{b+w} + x^{b+v}y^{a+w} + x^{a+w}y^{b+v} + x^{b+w}y^{a+v} \right) \\
&\quad \left\{ -(b+w)Dx^{a+v}y^{b+w} - (a+w)Kx^{b+v}y^{a+w} \right. \\
&\quad \left. + (b+v)Kx^{a+w}y^{b+v} + (a+v)Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&\quad + \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left\{ (D+b+w)x^{a+v}y^{b+w} + (K+a+w)x^{b+v}y^{a+w} \right. \\
&\quad \left. + (-K+b+v)x^{a+w}y^{b+v} + (-D+a+v)x^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&\quad \left\{ -Dx^{a+v}y^{b+w} - Kx^{b+v}y^{a+w} + Kx^{a+w}y^{b+v} + Dx^{b+w}y^{a+v} \right\} \\
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left[ -D^2 x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} - K^2 x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} \right. \\
&\quad \left. - K^2 x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} - D^2 x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} \right. \\
&\quad \left. + \{ -(D+b-a)K - (K+a-b)D \} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \right. \\
&\quad \left. + \{ (-K+b-a)D + (-D+a-b)K \} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \right. \\
&\quad \left. + \{ (D+w-v)K - (-K+v-w)D \} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \right. \\
&\quad \left. + \{ (K+w-v)D - (-D+v-w)K \} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \right. \\
&\quad \left. + 2 \{ (D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K \} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left[ -D^2 x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} - K^2 x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} \right. \\
&\quad - K^2 x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} - D^2 x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} \\
&\quad - \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \\
&\quad - \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad + \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \\
&\quad + \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. + 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_{xy}(x, y) \\
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left[ K^2 x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} + D^2 x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D^2 x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} + K^2 x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \right] \\
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left[ \left( Kx^{b+v} y^{a+w} + Dx^{a+v} y^{b+w} - Dx^{b+w} y^{a+v} - Kx^{a+w} y^{b+v} \right)^2 \right. \\
&\quad + (b-a)(K-D)(xy)^{a+b} (x^v y^w + x^w y^v)^2 \\
&\quad \left. - (w-v)(K+D)(xy)^{v+w} (x^a y^b + x^b y^a)^2 \right] \\
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left[ \left( Kx^{b+v} y^{a+w} + Dx^{a+v} y^{b+w} - Dx^{b+w} y^{a+v} - Kx^{a+w} y^{b+v} \right)^2 \right. \\
&\quad + (b-a)^2 (v+w)(xy)^{a+b} (x^v y^w + x^w y^v)^2 \\
&\quad \left. - (w-v)^2 (a+b)(xy)^{v+w} (x^a y^b + x^b y^a)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_{xx}(x, y) \\
&= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left[ K(K-1)x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} + D(D-1)x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D(D+1)x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} + K(K+1)x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b-1)D + (D+b-a-1)K\} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b+1)D + (D+b-a+1)K\} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v+1)D + (D+w-v-1)K\} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v-1)D + (D+w-v+1)K\} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \right] \\
&= -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{x^2} \\
&\quad - \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left\{ Kx^{2(b+v)} y^{2(a+w)} + Dx^{2(a+v)} y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad - Dx^{2(b+w)} y^{2(a+v)} - Kx^{2(a+w)} y^{2(b+v)} \\
&\quad + (D+K)x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} - (D+K)x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad \left. + (D-K)x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} - (D-K)x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \right\}
\end{aligned}$$

また、ここで

$$\begin{aligned}
& Kx^{2(b+v)}y^{2(a+w)} + Dx^{2(a+v)}y^{2(b+w)} \\
& \quad - Dx^{2(b+w)}y^{2(a+v)} - Kx^{2(a+w)}y^{2(b+v)} \\
& \quad + (D+K)x^{a+b+2v}y^{a+b+2w} - (D+K)x^{a+b+2w}y^{a+b+2v} \\
& \quad + (D-K)x^{2a+v+w}y^{2b+v+w} - (D-K)x^{2b+v+w}y^{2a+v+w} \\
& = \left( x^{b+v}y^{a+w} + x^{a+v}y^{b+w} + x^{b+w}y^{a+v} + x^{a+w}y^{b+v} \right) \\
& \quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right) \\
& = \left( x^ay^b + x^by^a \right) (x^vy^w + x^wy^v) \\
& \quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right)
\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}
& = -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{x^2} \\
& \quad - \frac{(x^ay^b + x^by^a)^{w+v-2}}{(x^vy^w + x^wy^v)^{a+b+2}x^2} (x^ay^b + x^by^a)(x^vy^w + x^wy^v) \\
& \quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right) \\
& = -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{x^2} \\
& \quad - \frac{(x^ay^b + x^by^a)^{w+v-1}}{(x^vy^w + x^wy^v)^{a+b+1}x^2} \\
& \quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right)
\end{aligned}$$

$F_{yy}(x, y)$

$$\begin{aligned}
& = \frac{(x^ay^b + x^by^a)^{w+v-2}}{(x^vy^w + x^wy^v)^{a+b+2}y^2} \\
& \quad \left[ K(K+1)x^{2(b+v)}y^{2(a+w)} + D(D+1)x^{2(a+v)}y^{2(b+w)} \right. \\
& \quad + D(D-1)x^{2(b+w)}y^{2(a+v)} + K(K-1)x^{2(a+w)}y^{2(b+v)} \\
& \quad + \{(K+a-b+1)D + (D+b-a+1)K\}x^{a+b+2v}y^{a+b+2w} \\
& \quad + \{(K+a-b-1)D + (D+b-a-1)K\}x^{a+b+2w}y^{a+b+2v} \\
& \quad - \{(K+w-v-1)D + (D+w-v+1)K\}x^{2a+v+w}y^{2b+v+w} \\
& \quad - \{(K+w-v+1)D + (D+w-v-1)K\}x^{2b+v+w}y^{2a+v+w} \\
& \quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\}x^{a+b+v+w}y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{y^2} \\
& \quad + \frac{(x^ay^b + x^by^a)^{w+v-2}}{(x^vy^w + x^wy^v)^{a+b+2}y^2} \\
& \quad \left\{ Kx^{2(b+v)}y^{2(a+w)} + Dx^{2(a+v)}y^{2(b+w)} \right. \\
& \quad \quad - Dx^{2(b+w)}y^{2(a+v)} - Kx^{2(a+w)}y^{2(b+v)} \\
& \quad \quad + (D+K)x^{a+b+2v}y^{a+b+2w} - (D+K)x^{a+b+2w}y^{a+b+2v} \\
& \quad \quad \left. + (D-K)x^{2a+v+w}y^{2b+v+w} - (D-K)x^{2b+v+w}y^{2a+v+w} \right\} \\
& = -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{y^2} \\
& \quad + \frac{(x^ay^b + x^by^a)^{w+v-2}}{(x^vy^w + x^wy^v)^{a+b+2}y^2} (x^ay^b + x^by^a)(x^vy^w + x^wy^v) \\
& \quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right) \\
& = -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{y^2} \\
& \quad + \frac{(x^ay^b + x^by^a)^{w+v-1}}{(x^vy^w + x^wy^v)^{a+b+1}y^2} \\
& \quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right)
\end{aligned}$$

です。

$$\begin{aligned}
F_{xx}(x, y) &= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left[ K(K-1)x^{2(b+v)}y^{2(a+w)} + D(D-1)x^{2(a+v)}y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D(D+1)x^{2(b+w)}y^{2(a+v)} + K(K+1)x^{2(a+w)}y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b-1)D + (D+b-a-1)K\} x^{a+b+2v}y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b+1)D + (D+b-a+1)K\} x^{a+b+2w}y^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v+1)D + (D+w-v-1)K\} x^{2a+v+w}y^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v-1)D + (D+w-v+1)K\} x^{2b+v+w}y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w}y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{yy}(x, y) &= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} y^2} \\
&\quad \left[ K(K+1)x^{2(b+v)}y^{2(a+w)} + D(D+1)x^{2(a+v)}y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D(D-1)x^{2(b+w)}y^{2(a+v)} + K(K-1)x^{2(a+w)}y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b+1)D + (D+b-a+1)K\} x^{a+b+2v}y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b-1)D + (D+b-a-1)K\} x^{a+b+2w}y^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v-1)D + (D+w-v+1)K\} x^{2a+v+w}y^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v+1)D + (D+w-v-1)K\} x^{2b+v+w}y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w}y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{xy}(x, y) &= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left[ K^2 x^{2(b+v)}y^{2(a+w)} + D^2 x^{2(a+v)}y^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D^2 x^{2(b+w)}y^{2(a+v)} + K^2 x^{2(a+w)}y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2v}y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2w}y^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2a+v+w}y^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2b+v+w}y^{2a+v+w} \\
&\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w}y^{a+b+v+w} \right]
\end{aligned}$$

### 10.2.2 Hessian

$$F(x, y) = \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b}} \quad 0 < a < b, \quad 0 < v < w, \quad 0 < x, y$$

$$\begin{aligned}
F_{xy}(x, y) &= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\
&\quad \left[ \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right)^2 \right. \\
&\quad + (b-a)(K-D)(xy)^{a+b}(x^v y^w + x^w y^v)^2 \\
&\quad \left. - (w-v)(K+D)(xy)^{v+w}(x^a y^b + x^b y^a)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{xx}(x, y) &= -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{x^2} \\
&\quad - \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} x^2} \\
&\quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{yy}(x, y) &= -F_{xy}(x, y) \frac{xy}{y^2} \\
&\quad + \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-1}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+1} y^2} \\
&\quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= F_{xx}(x, y)F_{yy}(x, y) - F_{xy}(x, y)^2 \\
&= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{2(w+v-1)}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{2(a+b+1)} (xy)^2} \\
&\quad \left( Kx^{b+v}y^{a+w} + Dx^{a+v}y^{b+w} - Dx^{b+w}y^{a+v} - Kx^{a+w}y^{b+v} \right)^2
\end{aligned}$$

$H(x, y) = 0 \Leftrightarrow \text{grad}F(x, y) = \mathbf{0}$  が成り立っています。

このように、極値の候補点では必ず Hessian が消えてしまっているため、通常の Hessian による極値判定はできません。そこで、 $\text{grad}F(x, y) = \mathbf{0}$  となる点の近くでの関数の様子を調べてみましょう。

### 10.2.3 Hessian が消える点の現地調査 その1 $F(x+tm, y+tn)$

$\text{grad}F(x_0, y_0) = \mathcal{O}$  であると仮定し、 $x = x_t = x_0 + tm, y = y_t = y_0 + tn$  として (ただし、 $x_0 + tm > 0, y_0 + tn > 0$  であるような範囲の  $t$  のみ考えます)、 $F(t) = F(x_0 + tm, y_0 + tn)$  を考えます。

$$\begin{aligned} F'(t) &= F_x(x_0 + tm, y_0 + tn)m + F_y(x_0 + tm, y_0 + tn)n \\ &= \text{grad}F(x_0 + tm, y_0 + tn) \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \\ F'(0) &= \text{grad}F(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \mathcal{O} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2}} (x^a y^b + x^b y^a) (x^v y^w + x^w y^v) \\ &\quad (Kx^{b+v} y^{a+w} + Dx^{a+v} y^{b+w} - Dx^{b+w} y^{a+v} - Kx^{a+w} y^{b+v}) \end{aligned}$$

と置けば

$$\begin{aligned} F''(t) &= F_{xx}(x_t, y_t)m^2 + 2F_{xy}(x_t, y_t)mn + F_{yy}(x_t, y_t)n^2 \\ &= \left\{ -F_{xy}(x_t, y_t) \frac{x_t y_t}{x_t^2} - \frac{1}{x_t^2} G(x_t, y_t) \right\} m^2 \\ &\quad + 2F_{xy}(x_t, y_t)mn + \left\{ -F_{xy}(x_t, y_t) \frac{x_t y_t}{y_t^2} + \frac{1}{y_t^2} G(x_t, y_t) \right\} n^2 \\ &= F_{xy}(x_t, y_t) \left( -\frac{y_t}{x_t} m^2 + 2mn - \frac{x_t}{y_t} n^2 \right) + G(x_t, y_t) \left( -\frac{m^2}{x_t^2} + \frac{n^2}{y_t^2} \right) \\ &= -\frac{1}{x_t y_t} F_{xy}(x_t, y_t) (y_t m - x_t n)^2 + \frac{1}{x_t^2 y_t^2} G(x_t, y_t) (x_t^2 n^2 - y_t^2 m^2) \end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned} F_{xy}(x, y) &= -\frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{w+v-2}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b+2} xy} \\ &\quad \left[ K^2 x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} + D^2 x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} \right. \\ &\quad + D^2 x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} + K^2 x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} \\ &\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \\ &\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\ &\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \\ &\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\ &\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \right] \end{aligned}$$

でしたから、

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{(x_t^a y_t^b + x_t^b y_t^a)^{w+v-2}}{(x_t^v y_t^w + x_t^w y_t^v)^{a+b+2} x_t^2 y_t^2} (y_t m - x_t n)^2 \\ &\quad \left[ K^2 x_t^{2(b+v)} y_t^{2(a+w)} + D^2 x_t^{2(a+v)} y_t^{2(b+w)} \right. \\ &\quad + D^2 x_t^{2(b+w)} y_t^{2(a+v)} + K^2 x_t^{2(a+w)} y_t^{2(b+v)} \\ &\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x_t^{a+b+2v} y_t^{a+b+2w} \\ &\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x_t^{a+b+2w} y_t^{a+b+2v} \\ &\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x_t^{2a+v+w} y_t^{2b+v+w} \\ &\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x_t^{2b+v+w} y_t^{2a+v+w} \\ &\quad \left. - 2\{(D+b-a+w-v)D + (K+a-b+w-v)K\} x_t^{a+b+v+w} y_t^{a+b+v+w} \right] \\ &\quad + \frac{(x_t^a y_t^b + x_t^b y_t^a)^{w+v-2}}{(x_t^v y_t^w + x_t^w y_t^v)^{a+b+2} x_t^2 y_t^2} (x_t^2 n^2 - y_t^2 m^2) (x_t^a y_t^b + x_t^b y_t^a) (x_t^v y_t^w + x_t^w y_t^v) \\ &\quad \left( Kx_t^{b+v} y_t^{a+w} + Dx_t^{a+v} y_t^{b+w} - Dx_t^{b+w} y_t^{a+v} - Kx_t^{a+w} y_t^{b+v} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F''(0) &= \frac{(x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)^{w+v-2}}{(x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^{a+b+2} x_0^2 y_0^2} (nx_0 - my_0)^2 \\
&\quad \left[ K^2 x_0^{2(b+v)} y_0^{2(a+w)} + D^2 x_0^{2(a+v)} y_0^{2(b+w)} \right. \\
&\quad + D^2 x_0^{2(b+w)} y_0^{2(a+v)} + K^2 x_0^{2(a+w)} y_0^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x_0^{a+b+2v} y_0^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x_0^{a+b+2w} y_0^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x_0^{2a+v+w} y_0^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x_0^{2b+v+w} y_0^{2a+v+w} \\
&\quad - 2\{(D+b-a+w-v)D \\
&\quad \quad \left. + (K+a-b+w-v)K\} x_0^{a+b+v+w} y_0^{a+b+v+w} \right] \\
&\quad + 0
\end{aligned}$$

です。ここで、

$$\begin{aligned}
&K^2 x^{2(b+v)} y^{2(a+w)} + D^2 x^{2(a+v)} y^{2(b+w)} \\
&\quad + D^2 x^{2(b+w)} y^{2(a+v)} + K^2 x^{2(a+w)} y^{2(b+v)} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} \\
&\quad + \{(K+a-b)D + (D+b-a)K\} x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} \\
&\quad - \{(K+w-v)D + (D+w-v)K\} x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\
&\quad - 2\{(D+b-a+w-v)D \\
&\quad \quad + (K+a-b+w-v)K\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \\
&= \left( Kx^{b+v} y^{a+w} + Dx^{a+v} y^{b+w} - Dx^{b+w} y^{a+v} - Kx^{a+w} y^{b+v} \right)^2 \\
&\quad - (b-a)(D-K)x^{a+b+2v} y^{a+b+2w} - (b-a)(D-K)x^{a+b+2w} y^{a+b+2v} \\
&\quad - (w-v)(D+K)x^{2a+v+w} y^{2b+v+w} - (w-v)(D+K)x^{2b+v+w} y^{2a+v+w} \\
&\quad - 2\{(b-a)(D-K) + (w-v)(D+K)\} x^{a+b+v+w} y^{a+b+v+w} \\
&= \left( Kx^{b+v} y^{a+w} + Dx^{a+v} y^{b+w} - Dx^{b+w} y^{a+v} - Kx^{a+w} y^{b+v} \right)^2 \\
&\quad - (b-a)(D-K)x^{a+b} y^{a+b} (x^v y^w + x^w y^v)^2 \\
&\quad - (w-v)(D+K)x^{v+w} y^{v+w} (x^a y^b + a^b y^a)^2
\end{aligned}$$

であることと

$$Kx_0^{b+v} y_0^{a+w} + Dx_0^{a+v} y_0^{b+w} - Dx_0^{b+w} y_0^{a+v} - Kx_0^{a+w} y_0^{b+v} = 0$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
F''(0) &= -\frac{(x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)^{w+v-2}}{(x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^{a+b+2} x_0^2 y_0^2} (nx_0 - my_0)^2 \\
&\quad \left\{ (b-a)(D-K)x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^2 \right. \\
&\quad \left. + (w-v)(D+K)x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b + a^b y_0^a)^2 \right\} \\
&= \frac{(x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)^{w+v-2}}{(x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^{a+b+2} x_0^2 y_0^2} (nx_0 - my_0)^2 \\
&\quad \left\{ (b-a)^2 (v+w)x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^2 \right. \\
&\quad \left. - (w-v)^2 (a+b)x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b + a^b y_0^a)^2 \right\}
\end{aligned}$$

となっています。従って、

$$Kx_0^{b+v} y_0^{a+w} + Dx_0^{a+v} y_0^{b+w} - Dx_0^{b+w} y_0^{a+v} - Kx_0^{a+w} y_0^{b+v} = 0$$

の条件のもとで

$$\begin{aligned}
&(b-a)(K-D)x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^2 \\
&\quad - (w-v)(K+D)x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b + a^b y_0^a)^2
\end{aligned}$$

の符号が  $F''(0)$  の符号に一致しますから、 $b-a = \frac{K-D}{v+w}$ ,  $w-v = \frac{K+D}{a+b}$  に注意すれば

$$F''(0) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)^2}{x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^2} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{(b-a)(K-D)}{(w-v)(K+D)} = \frac{(a+b)(K-D)^2}{(v+w)(K+D)^2}$$

であり、また条件式は  $x_0 \neq y_0$  である限りは ( $x_0 = y_0$  のケースは簡単なので問題ありません)

$$\begin{aligned}
0 &= \{(K+D) + (K-D)\} x_0^{b+v} y_0^{a+w} + \{(K+D) - (K-D)\} x_0^{a+v} y_0^{b+w} \\
&\quad \{(K+D) - (K-D)\} x_0^{b+w} y_0^{a+v} - \{(K+D) + (K-D)\} x_0^{a+w} y_0^{b+v} \\
&= (K+D)(x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)(x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v) + (K-D)(x_0^b y_0^a - x_0^a y_0^b)(x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
(K+D)(x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)(x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v) &= (K-D)(x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)(x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v) \\
\frac{x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a}{x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v} &= \frac{(K-D)(x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)}{(K+D)(x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v)}
\end{aligned}$$

とも書くことが出来ますから、

$$F''(0) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)^2}{x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v)^2} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{a+b}{v+w}$$

でもあります。

あるいは条件式により

$$\begin{aligned}\frac{x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a}{x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v} &= \frac{(K-D)(x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)}{(K+D)(x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v)} \\ \frac{(x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)^2}{(x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^2} &= \frac{(K-D)(x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)}{(K+D)(x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v)} \cdot \frac{x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a}{x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v} \\ &= \frac{(K-D) \left\{ (x_0^a y_0^b)^2 - (x_0^b y_0^a)^2 \right\}}{(K+D) \left\{ (x_0^v y_0^w)^2 - (x_0^w y_0^v)^2 \right\}}\end{aligned}$$

が得られるので

$$\begin{aligned}F''(0) \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)^2}{x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^2} \leq \frac{(b-a)(K-D)}{(w-v)(K+D)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0^{v+w} y_0^{v+w} \left\{ (x_0^a y_0^b)^2 - (x_0^b y_0^a)^2 \right\}}{x_0^{a+b} y_0^{a+b} \left\{ (x_0^v y_0^w)^2 - (x_0^w y_0^v)^2 \right\}} \leq \frac{b-a}{w-v} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{(x_0^a y_0^b)^2 - (x_0^b y_0^a)^2}{x_0^{a+b} y_0^{a+b}}}{\frac{(x_0^v y_0^w)^2 - (x_0^w y_0^v)^2}{x_0^{v+w} y_0^{v+w}}} \leq \frac{b-a}{w-v} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0^{a-b} y_0^{b-a} - x_0^{b-a} y_0^{a-b}}{x_0^{v-w} y_0^{w-v} - x_0^{w-v} y_0^{v-w}} \leq \frac{b-a}{w-v}\end{aligned}$$

とした方が良いかも知れません。平均値の定理が関係して来ているね。

$k = \frac{b-a}{w-v}$  と置けば、曲線  $y = x^k$  上の2点  $(x, x^k), (\frac{1}{x}, \frac{1}{x^k})$  を結ぶ直線の傾きが、この2点の間にある点  $(1, 1)$  での接線の傾き  $k$  と比べて大きいかどうかを、 $x$  が何らかの条件を満たす仮定のもとで考えています。

あるいは更に変形して

$$F''(0) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{b-a} - \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{b-a}}{b-a} \leq \frac{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{w-v} - \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{w-v}}{w-v}$$

とするのもアリかも知れません。

あるいはそれならば条件式もいっそのこと

$$\begin{aligned}\frac{x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a}{x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v} &= \frac{(K-D)(x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)}{(K+D)(x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v)} \\ \frac{x_0^{b-a} + y_0^{b-a}}{x_0^{w-v} + y_0^{w-v}} &= \frac{(K-D)(x_0^{b-a} - y_0^{b-a})}{(K+D)(x_0^{w-v} - y_0^{w-v})}\end{aligned}$$

とするべきでしょうか。残った  $K, D$  はどうすべきでしょうか。

ひとまずまとめておきます：

問題 10.2.1  $x_0 \neq y_0$  であって

$$\frac{x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a}{x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v} = \frac{(K-D)(x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)}{(K+D)(x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v)}$$

あるいは

$$\frac{x_0^{b-a} + y_0^{b-a}}{x_0^{w-v} + y_0^{w-v}} = \frac{(K-D)(x_0^{b-a} - y_0^{b-a})}{(K+D)(x_0^{w-v} - y_0^{w-v})}$$

の条件を満たす点  $(x_0, y_0)$  において次の符号を調べる：

$$\begin{aligned}F''(0) \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b + x_0^b y_0^a)^2}{x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w + x_0^w y_0^v)^2} \leq \frac{(b-a)(K-D)}{(w-v)(K+D)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0^{v+w} y_0^{v+w} (x_0^a y_0^b - x_0^b y_0^a)^2}{x_0^{a+b} y_0^{a+b} (x_0^v y_0^w - x_0^w y_0^v)^2} \leq \frac{a+b}{v+w} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_0^{a-b} y_0^{b-a} - x_0^{b-a} y_0^{a-b}}{x_0^{v-w} y_0^{w-v} - x_0^{w-v} y_0^{v-w}} \leq \frac{b-a}{w-v}\end{aligned}$$

1 変数化すれば解決出来ることは分かっていますが、他の方法はないでしょうか。

### 10.2.4 Hessian が消える点の現地調査 その2 $F(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$t > 0$  であれば

$$\begin{aligned} F(tx, ty) &= \frac{\{(tx)^a(ty)^b + (tx)^b(ty)^a\}^{v+w}}{\{(tx)^v(ty)^w + (tx)^w(ty)^v\}^{a+b}} \\ &= \frac{(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w}}{(x^v y^w + x^w y^v)^{a+b}} \\ &= F(x, y) \end{aligned}$$

が成り立っています。

そこで円周方向の変化のみを見るために  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  に対して

$$F(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(\cos \theta, \sin \theta) = F(1, \tan \theta) = F(\tan \theta, 1)$$

を考えてみましょう。

$$\begin{aligned} L(\theta) &= F(\tan \theta, 1) \\ L'(\theta) &= F_x(\tan \theta, 1) \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{v+w-1}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+1} \tan \theta \cos^2 \theta} \\ &\quad (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L''(\theta) &= F_{xx}(\tan \theta, 1) \frac{1}{\cos^4 \theta} + F_x(\tan \theta, 1) \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^4 \theta} \{F_{xx}(\tan \theta, 1) + F_x(\tan \theta, 1) \cos \theta \sin \theta\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta K''(\theta) &= -F_{xy}(\tan \theta, 1) \frac{1}{\tan \theta} \\ &\quad - \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{w+v-1}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+1} \tan^2 \theta} \\ &\quad (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta) \\ &\quad + \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{v+w-1} \cos \theta \sin \theta}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+1} \tan \theta} \\ &\quad (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{w+v-2}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+2} \tan^2 \theta} \\ &\quad \left[ (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. + (b-a)^2(v+w) \tan^{a+b} \theta (\tan^v \theta + \tan^w \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. - (w-v)^2(a+b) \tan^{v+w} \theta (\tan^a \theta + \tan^b \theta)^2 \right] \\ &\quad - \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{w+v-1}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+1} \tan^2 \theta} \\ &\quad (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta) \\ &\quad + \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{v+w-1}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+1} \frac{1}{\cos^2 \theta}} \\ &\quad (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta) \\ &= \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{w+v-2}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+2} \tan^2 \theta} \\ &\quad \left[ (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. + (b-a)^2(v+w) \tan^{a+b} \theta (\tan^v \theta + \tan^w \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. - (w-v)^2(a+b) \tan^{v+w} \theta (\tan^a \theta + \tan^b \theta)^2 \right] \\ &\quad + \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{v+w-1}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+1}} \\ &\quad (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{w+v-2}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+2} \tan^2 \theta} \\
&\quad \left[ (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta)^2 \right. \\
&\quad \quad + (b-a)^2 (v+w) \tan^{a+b} \theta (\tan^v \theta + \tan^w \theta)^2 \\
&\quad \quad \quad \left. - (w-v)^2 (a+b) \tan^{v+w} \theta (\tan^a \theta + \tan^b \theta)^2 \right] \\
&\quad + \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{v+w-2}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+2}} (\tan^a \theta + \tan^b \theta) (\tan^v \theta + \tan^w \theta) \\
&\quad \quad (K \tan^{b+v} \theta + D \tan^{a+v} \theta - D \tan^{b+w} \theta - K \tan^{a+w} \theta)
\end{aligned}$$

従って  $L'(\theta) = 0$  のところでは

$$\begin{aligned}
L''(\theta) &= \frac{(\tan^a \theta + \tan^b \theta)^{w+v-2}}{(\tan^v \theta + \tan^w \theta)^{a+b+2} \tan^2 \theta \cos^4 \theta} \\
&\quad \{ (b-a)^2 (v+w) \tan^{a+b} \theta (\tan^v \theta + \tan^w \theta)^2 \\
&\quad \quad - (w-v)^2 (a+b) \tan^{v+w} \theta (\tan^a \theta + \tan^b \theta)^2 \}
\end{aligned}$$

つまり、結局同じところですね。視点が変わっていない。 $\theta$  を  $\theta_0 + \theta$  とかしないと意味がないか。

しかも、これでは結局2変数であることに強く依存していることになるか。多次元の極座標でやることは出来るだろうが、角度が増えるとどうなるか。

### 10.2.5 Hessian が消える点の現地調査 その3 $F(x, \frac{1}{x})$

円周上ではなく、曲線  $y = \frac{1}{x}$  上での様子を見ると、

$$F\left(x, \frac{1}{x}\right) = F(x^2, 1)$$

ですから、この形で見てみましょう（意味ないか・・・結局2変数だから出来ることだし）。

$$\begin{aligned}
J(x) &= F(x^2, 1) \\
J'(x) &= F_x(x^2, 1) 2x \\
&= \frac{(x^{2a} + x^{2b})^{v+w-1} 2x}{(x^{2v} + x^{2w})^{a+b+1} x^2} \left\{ Kx^{2(b+v)} + Dx^{2(a+v)} - Dx^{2(b+w)} - Kx^{2(a+w)} \right\} \\
J''(x) &= F_{xx}(x^2, 1) 4x^2 + 2F_x(x^2, 1) \\
&= \left\{ -F_{xy}(x^2, 1) \frac{1}{x^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(x^{2a} + x^{2b})^{w+v-1}}{(x^{2v} + x^{2w})^{a+b+1} x^4} \right. \\
&\quad \quad \left. \left( Kx^{2(b+v)} + Dx^{2(a+v)} - Dx^{2(b+w)} - Kx^{2(a+w)} \right) \right\} 4x^2 \\
&\quad + 2F_x(x^2, 1) \\
&= -4F_{xy}(x^2, 1) \\
&\quad - \frac{(x^{2a} + x^{2b})^{v+w-1} 2}{(x^{2v} + x^{2w})^{a+b+1} x^2} \left\{ Kx^{2(b+v)} + Dx^{2(a+v)} - Dx^{2(b+w)} - Kx^{2(a+w)} \right\} \\
&= 4 \frac{(x^{2a} + x^{2b})^{w+v-2}}{(x^{2v} + x^{2w})^{a+b+2} x^2} \\
&\quad \left[ \left\{ Kx^{2(b+v)} + Dx^{2(a+v)} - Dx^{2(b+w)} - Kx^{2(a+w)} \right\}^2 \right. \\
&\quad \quad + (b-a)^2 (v+w) x^{2(a+b)} (x^{2v} + x^{2w})^2 \\
&\quad \quad \quad \left. - (w-v)^2 (a+b) x^{2(v+w)} (x^{2a} + x^{2b})^2 \right] \\
&\quad - \frac{(x^{2a} + x^{2b})^{v+w-1} 2}{(x^{2v} + x^{2w})^{a+b+1} x^2} \left\{ Kx^{2(b+v)} + Dx^{2(a+v)} - Dx^{2(b+w)} - Kx^{2(a+w)} \right\}
\end{aligned}$$

## 11 3変数巡回平均不等式試論

何をすべきかよく分からなくなって来たので、試しに3変数をやってみましょう。巡回平均を

$$\Gamma_{a,b,c} = \left( \frac{x^a y^b z^c + x^c y^a z^b + x^b y^c z^a}{3} \right)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

で定めることにします ( $a+b+c > 0, x, y, z > 0$ )。対称平均は

$$\Sigma_{a,b,c} = \left( \frac{x^a y^b z^c + x^c y^a z^b + x^b y^c z^a + x^c y^b z^a + x^a y^c z^b + x^b y^a z^c}{6} \right)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

です ( $a+b+c > 0, x, y, z > 0$ )。

### 11.1 最初の具体例 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,5,0}$

これが適切な例なのかどうかは分かりませんが、とりあえず成立しそうな例を挙げる  
とこれがあります。

#### 11.1.1 2変数の微積分への帰着

まあ、例によって恥も外聞もなく2変数化してみましょう。

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,5,0} &\Leftrightarrow \frac{(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^6}{(xy^5 + yz^5 + zx^5)^4} \leq 9 \\ &\frac{(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^3}{(xy^5 + yz^5 + zx^5)^2} \leq 3 \\ &\frac{z^{12} \left( \frac{x}{z} \left( \frac{y}{z} \right)^2 + \frac{y}{z} \frac{x}{z} + \left( \frac{x}{z} \right)^2 \frac{y}{z} \right)^3}{z^{12} \left( \frac{x}{z} \left( \frac{y}{z} \right)^5 + \frac{y}{z} + \left( \frac{x}{z} \right)^5 \right)^2} \leq 3 \end{aligned}$$

ここで  $\frac{x}{z} = X, \frac{y}{z} = Y$  と置けば、問題は任意の  $X, Y > 0$  に対して

$$\frac{(XY^2 + YX + X^2Y)^3}{(XY^5 + Y + X^5)^2} \leq 3$$

が成り立つかどうかと云うことになります。そこで2変数関数

$$F(x, y) = \frac{(xy^2 + xy + x^2y)^3}{(xy^5 + y + x^5)^2}$$

が  $x, y > 0$  で最大値3をもつかどうかを調べることになります。計算機で見る限りは成立していそうではありません。

原点以外の座標軸上での値は

$$F(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0, \quad F(x, 0) = \frac{0}{x^{10}} = 0$$

であり、また、 $x, y > 0$  の範囲では

$$0 \leq \frac{(xy^2 + xy + x^2y)^3}{(xy^5 + y + x^5)^2} \leq \frac{(xy)^3(x+y+1)^3}{y^2} = x^3y(x+y+1)^3$$

ですから、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x,y>0} \frac{(xy^2 + xy + x^2y)^3}{(xy^5 + y + x^5)^2} = 0$$

です。

しかしなかなか上手くいきませんね。

#### 11.1.2 weighted AM-GM

この方向では難しいので、趣向を変えて AM-GM 不等式と Hölder の不等式の組み合わせで考えてみましょう。

まず、

$$(xy^5)^a (yz^5)^b (zx^5)^c = x^{a+5c} y^{b+5a} z^{c+5b}$$

であり、これが  $xy^2z$  (のべき乗) になるためには、

$$\begin{cases} a+5c = c+5b \\ b+5a = 2(a+5c) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a-5b+4c = 0 \\ 3a+b-10c = 0 \end{cases}$$

を解けばよく、 $a=23, b=11, c=8$  がその1例です：

$$(xy^5)^{23} (yz^5)^{11} (zx^5)^8 = x^{63} y^{126} z^{63}.$$

すると、(weighted) AM-GM 不等式から

$$\begin{aligned} &42(xy^5 + yz^5 + zx^5) \\ &= (23xy^5 + 11yz^5 + 8zx^5) + (23yz^5 + 11zx^5 + 8xy^5) + (23zx^5 + 11xy^5 + 8yz^5) \\ &\geq 42 \sqrt[42]{x^{63} y^{126} z^{63}} + 42 \sqrt[42]{y^{63} z^{126} x^{63}} + 42 \sqrt[42]{z^{63} x^{126} y^{63}} \\ &= 42(xy^2z)^{\frac{63}{42}} + 42(yz^2x)^{\frac{63}{42}} + 42(zx^2y)^{\frac{63}{42}} \end{aligned}$$

つまり、

$$xy^5 + yz^5 + zx^5 \geq (xy^2z)^{\frac{3}{2}} + (yz^2x)^{\frac{3}{2}} + (zx^2y)^{\frac{3}{2}}$$

が得られます。

一方、Hölder の不等式によれば

$$\begin{aligned} xy^2z + yz^2x + zx^2y &\leq \left\{ (xy^2z)^{\frac{3}{2}} + (yz^2x)^{\frac{3}{2}} + (zx^2y)^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}} (1^3 + 1^3 + 1^3)^{\frac{1}{3}} \\ (xy^2z + yz^2x + zx^2y)^{\frac{3}{2}} &\leq \left\{ (xy^2z)^{\frac{3}{2}} + (yz^2x)^{\frac{3}{2}} + (zx^2y)^{\frac{3}{2}} \right\} 3^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

でもありますから、これらを合わせれば

$$(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^{\frac{3}{2}} \leq 3^{\frac{1}{2}}(xy^5 + yz^5 + zx^5)$$

が得られ、これは  $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,5,0}$  を意味します。

**事実 11.1.1**  $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,5,0}$

## 11.2 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,3,0}$

これは次数の等しいケースですので、Hölder の不等式の部分は必要ありません。

$$\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,3,0} \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{xy^2z + yz^2x + zx^2y}{3}} \leq \sqrt[4]{\frac{xy^3 + yz^3 + zx^3}{3}}$$

$$xy^2z + yz^2x + zx^2y \leq xy^3 + yz^3 + zx^3$$

まず

$$(xy^3)^a (yz^3)^b (zx^3)^c = x^{a+3c} y^{b+3a} z^{c+3b}$$

であり、これが  $xy^2z$  に対応するために、

$$\begin{cases} a + 3c = c + 3b \\ 2(a + 3c) = b + 3a \end{cases} \quad \text{すなわち、} \quad \begin{cases} a - 3b + 2c = 0 \\ a + b - 6c = 0 \end{cases}$$

となるように  $a, b, c$  を定めると、 $a = 4c, b = 2c$  であれば良いことが分かりますから、 $a = 4, b = 2, c = 1$  として

$$(xy^3)^4 (yz^3)^2 (zx^3)^1 = x^7 y^{14} z^7$$

です。これを利用すれば、(weighted) AM-GM 不等式から

$$4xy^3 + 2yz^3 + zx^3 \geq 7\sqrt[7]{x^7 y^{14} z^7} = 7xy^2z$$

が分かりますから、巡回させて

$$\begin{aligned} 7xy^3 + 7yz^3 + 7zx^3 &= (4xy^3 + 2yz^3 + zx^3) + (4yz^3 + 2zx^3 + xy^3) + (4zx^3 + 2xy^3 + yz^3) \\ &\geq 7xy^2z + 7yz^2x + 7zx^2y \end{aligned}$$

が得られるわけです。

**事実 11.2.1**  $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,3,0}$

## 11.3 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,2,0}$ は成り立つのか？

### 11.3.1 2変数の微積分への帰着

右辺の次数が低いので厳しそうですが、

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,2,0} &\Leftrightarrow 3(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^3 \leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^4 \\ &\quad \frac{(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^3}{(xy^2 + yz^2 + zx^2)^4} \leq \frac{1}{3} \\ &\quad \frac{z^{12} \left( \frac{x}{z} \left( \frac{y}{z} \right)^2 + \frac{y}{z} \frac{x}{z} + \left( \frac{x}{z} \right)^2 \frac{y}{z} \right)^3}{z^{12} \left( \frac{x}{z} \left( \frac{y}{z} \right)^2 + \frac{y}{z} + \left( \frac{x}{z} \right)^2 \right)^4} \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と変形し、ここで  $\frac{x}{z} = X, \frac{y}{z} = Y$  と置けば、問題は任意の  $X, Y > 0$  に対して

$$\frac{(XY^2 + YX + X^2Y)^3}{(XY^2 + Y + X^2)^4} \leq \frac{1}{3}$$

が成り立つかどうか、つまり2変数関数

$$F(x, y) = \frac{(xy^2 + xy + x^2y)^3}{(xy^2 + y + x^2)^4}$$

が  $x, y > 0$  で最大値  $\frac{1}{3}$  をもつかどうか問題となります。計算機によると成り立っている様子ですが・・・

### 11.3.2 weighted AM-GM

しかしやはりこの方法では難しいので、同様に AM-GM 不等式でやってみましょう。

まず、

$$(xy^2)^a (yz^2)^b (zx^2)^c = x^{a+2c} y^{b+2a} z^{c+2b}$$

であり、これが  $xy^2z$  になるためには、

$$\begin{cases} a+2c=c+2b \\ b+2a=2(a+2c) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a-2b+c=0 \\ b-4c=0 \end{cases}$$

を解けばよく、 $a=7, b=4, c=1$  がその 1 例です：

$$(xy^2)^7 (yz^2)^4 (zx^2) = x^9 y^{18} z^9.$$

すると、(weighted) AM-GM 不等式から

$$\begin{aligned} & 12(xy^2 + yz^2 + zx^2) \\ &= (7xy^2 + 4yz^2 + zx^2) + (7yz^2 + 4zx^2 + xy^2) + (7zx^2 + 4xy^2 + yz^2) \\ &\geq 12 \sqrt[12]{x^9 y^{18} z^9} + 12 \sqrt[12]{y^9 z^{18} x^9} + 12 \sqrt[12]{z^9 x^{18} y^9} \\ &= 12(xy^2z)^{\frac{9}{12}} + 12(yz^2x)^{\frac{9}{12}} + 12(zx^2y)^{\frac{9}{12}} \end{aligned}$$

つまり、

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq (xy^2z)^{\frac{3}{4}} + (yz^2x)^{\frac{3}{4}} + (zx^2y)^{\frac{3}{4}}$$

が得られますが・・・上手く行きませんね。

『間に咬ませる式』として今  $(xy^2z)^{\frac{3}{4}} + (yz^2x)^{\frac{3}{4}} + (zx^2y)^{\frac{3}{4}}$  を考えたわけですが、べきの次数が  $\frac{3}{4} < 1$  となってしまいます。これは元々左辺が 4 次式で右辺が 3 次式だったことに起因しており、如何ともし難い部分です。この場合、Hölder の不等式へ繋げることが出来ません。

実際

$$3^{\frac{1}{4}}(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^{\frac{3}{4}} \leq (xy^2z)^{\frac{3}{4}} + (yz^2x)^{\frac{3}{4}} + (zx^2y)^{\frac{3}{4}}$$

は成り立ちません。 $(x, y, z) = (1, 2, 1)$  で

$$(\text{左辺}) \approx 6.26, \quad (\text{右辺}) \approx 6.19$$

です。AM-GM 不等式で小さくし過ぎているようです。

まあ、そりゃそうですよね。どうしましょうか。AM-GM 不等式の間を埋めるイメージなら Maclaurin の不等式が思い浮かびますが、対称式の話ですからね・・・

### 11.3.3 部分的に weighted AM-GM を使う

全部一気に行くのではなく、部分的にやってみましょう。

$$\begin{aligned} & \Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,2,0} \\ \Leftrightarrow & 3(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^3 \leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^4 \\ & 3(xyz)^3(x+y+z)^3 \leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^2(xy^2 + yz^2 + zx^2)^2 \end{aligned}$$

と変形すると、AM-GM 不等式から

$$\begin{aligned} & 3xyz \leq xy^2 + yz^2 + zx^2 \\ & 9(xyz)^2 \leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^2 \end{aligned}$$

が分かるので（小さくし過ぎという話もありますが・・・）、あとは

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}xyz(x+y+z)^3 \leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^2 \\ & xyz(x+y+z)^3 \leq 3(xy^2 + yz^2 + zx^2)^2 \end{aligned}$$

が示せば良いことになります。

これはまた

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{x+y+z}{3} \leq \left( \sqrt[3]{\frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{3}} \right)^2 \\ & \Gamma_{1,1,1} \Gamma_{1,0,0} \leq \Gamma_{1,2,0}^2 \end{aligned}$$

とも書けて、Newton の不等式を彷彿とさせます。

あるいはまた、

$$\begin{aligned} & xyz(x+y+z)^3 \leq 3(xy^2 + yz^2 + zx^2)^2 \\ & (x^2yz + xy^2z + xyz^2)^3 \leq 3(x^2y^3z + xy^2z^3 + x^3yz^2)^2 \\ & \Gamma_{2,1,1} \leq \Gamma_{2,3,1} \end{aligned}$$

としても良いでしょう。計算機によれば、これらは成り立っていそうな感じです。

**予想 11.3.1**

$$\Gamma_{1,1,1}\Gamma_{1,0,0} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{1,2,0}^2, \quad \Gamma_{2,1,1} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{2,3,1}$$

明らかに (AM-GM 不等式から)

$$\Gamma_{1,1,1} \leq \Gamma_{1,2,0}$$

ですが、このことから

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,1,1}\Gamma_{1,2,0} &\leq \Gamma_{1,2,0}^2 \\ \sqrt{\Gamma_{1,1,1}}\sqrt{\Gamma_{1,2,0}} &\leq \Gamma_{1,2,0} \end{aligned}$$

が分かりますが、実は

$$\Gamma_{2,3,1} = \sqrt[6]{\frac{x^2y^3z + y^2z^3x + z^2x^3y}{3}} = \sqrt[6]{xyz} \sqrt[6]{\frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{3}} = \sqrt{\Gamma_{1,1,1}}\sqrt{\Gamma_{1,2,0}}$$

ですから、

$$\Gamma_{2,3,1} \leq \Gamma_{1,2,0}$$

は成り立っています。従って

$$(\Gamma_{2,1,1} =) \Gamma_{1,2,1} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{2,3,1}$$

が示されれば

$$(\Gamma_{2,1,1} =) \Gamma_{1,2,1} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{1,2,0}$$

も分かるというわけです。主張の強さで言えば後者の方が弱いので証明し易そうにも思えますが、案外そうでもないのかも知れません。

**事実 11.3.2**

$$\Gamma_{1,1,1}\Gamma_{1,2,0} = \Gamma_{2,3,1}^2, \quad \Gamma_{2,3,1} \leq \Gamma_{1,2,0}$$

**11.3.4 また別の部分的な適用**

あるいは、2個は多いと考えて1個だけ AM-GM を適用してみてもいいでしょう。

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2,1} &\leq \Gamma_{1,2,0} \\ \Leftrightarrow 3(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^3 &\leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^4 \\ 3(xyz)^3(x+y+z)^3 &\leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^3(xy^2 + yz^2 + zx^2) \end{aligned}$$

と変形すると、AM-GM 不等式から

$$3xyz \leq xy^2 + yz^2 + zx^2$$

なので、結局

$$(xyz)^2(x+y+z)^3 \leq (xy^2 + yz^2 + zx^2)^3 \quad \text{つまり} \quad \Gamma_{1,1,1}^2\Gamma_{1,0,0} \leq \Gamma_{1,2,0}^3$$

が示されれば良いことが分かり、計算機によるとこれも成立していると思われます。

一旦ここで止めておきます。課題ですね。

**11.4**  $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,1,0}, \quad \Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,0,0}$ 

より次数を下げると、実は簡単です：

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2,1} &\leq \Gamma_{1,1,0} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{xy^2z + yz^2x + zx^2y}{3}} &\leq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \\ 3(xy^2z + yz^2x + zx^2y) &\leq (xy + yz + zx)^2 \\ xy^2z + yz^2x + zx^2y &\leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \\ 2xy^2z + 2yz^2x + 2zx^2y &\leq x^2y^2 + y^2z^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + z^2x^2 + x^2y^2 \\ 0 &\leq (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,2,1} &\leq \Gamma_{1,0,0} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{\frac{xy^2z + yz^2x + zx^2y}{3}} &\leq \frac{x+y+z}{3} \\ 3^3(xy^2z + yz^2x + zx^2y) &\leq (x+y+z)^4 \\ 3^3xyz &\leq (x+y+z)^3 \\ xyz &\leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\end{aligned}$$

であり、これは AM-GM 不等式そのものです。

**事実 11.4.1**

$$\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,1,0}, \quad \Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,0,0}$$

## 11.5 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,n,0} (n \geq 3)$

既に  $n = 3, 5$  の場合は見ましたが、右辺の次数が高い場合ですから Hölder の不等式の部分は上手くいくはずで、一般の場合も  $n = 5$  の場合と同様に示せるのではないのでしょうか。

$n > 3$  と仮定して、まず、

$$(xy^n)^a (yz^n)^b (zx^n)^c = x^{a+nc} y^{b+na} z^{c+nb}$$

であり、これが  $xy^2z$  になるためには、

$$\begin{cases} a + nc = c + nb \\ b + na = 2(a + nc) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a - nb + (n-1)c = 0 \\ (n-2)a + b - 2nc = 0 \end{cases}$$

を解けばよく、 $a = 2n^2 - n + 1, b = n^2 - n + 2, c = n^2 - 2n + 1$  がその 1 例です：

$$(xy^n)^{2n^2-n+1} (yz^n)^{n^2-n+2} (zx^n)^{n^2-2n+1} = x^{n^3+1} y^{2(n^3+1)} z^{n^3+1}.$$

すると、(weighted) AM-GM 不等式から

$$\begin{aligned}4(n^2 - n + 1)(xy^n + yz^n + zx^n) &= \{(2n^2 - n + 1)xy^n + (n^2 - n + 2)yz^n + (n^2 - 2n + 1)zx^n\} \\ &\quad + \{(2n^2 - n + 1)yz^n + (n^2 - n + 2)zx^n + (n^2 - 2n + 1)xy^n\} \\ &\quad + \{(2n^2 - n + 1)zx^n + (n^2 - n + 2)xy^n + (n^2 - 2n + 1)yz^n\} \\ &\geq 4(n^2 - n + 1) \sqrt[4(n^2-n+1)]{x^{n^3+1} y^{2(n^3+1)} z^{n^3+1}} \\ &\quad + 4(n^2 - n + 1) \sqrt[4(n^2-n+1)]{y^{n^3+1} z^{2(n^3+1)} x^{n^3+1}} \\ &\quad + 4(n^2 - n + 1) \sqrt[4(n^2-n+1)]{z^{n^3+1} x^{2(n^3+1)} y^{n^3+1}} \\ &= 4(n^2 - n + 1) \left\{ (xy^2z)^{\frac{n^3+1}{4(n^2-n+1)}} + (yz^2x)^{\frac{n^3+1}{4(n^2-n+1)}} + (zx^2y)^{\frac{n^3+1}{4(n^2-n+1)}} \right\}\end{aligned}$$

つまり、

$$xy^n + yz^n + zx^n \geq (xy^2z)^{\frac{n+1}{4}} + (yz^2x)^{\frac{n+1}{4}} + (zx^2y)^{\frac{n+1}{4}}$$

が得られます。

一方、Hölder の不等式によれば

$$\begin{aligned}xy^2z + yz^2x + zx^2y &\leq \left\{ (xy^2z)^{\frac{n+1}{4}} + (yz^2x)^{\frac{n+1}{4}} + (zx^2y)^{\frac{n+1}{4}} \right\}^{\frac{4}{n+1}} \\ &\quad \left( 1^{\frac{n+1}{n-3}} + 1^{\frac{n+1}{n-3}} + 1^{\frac{n+1}{n-3}} \right)^{\frac{n-3}{n+1}} \\ (xy^2z + yz^2x + zx^2y)^{\frac{n+1}{4}} &\leq \left\{ (xy^2z)^{\frac{n+1}{4}} + (yz^2x)^{\frac{n+1}{4}} + (zx^2y)^{\frac{n+1}{4}} \right\} 3^{\frac{n-3}{4}}\end{aligned}$$

でもありますから、これらを合わせれば

$$\begin{aligned}(xy^2z + yz^2x + zx^2y)^{\frac{n+1}{4}} &\leq 3^{\frac{n-3}{4}} (xy^n + yz^n + zx^n) \\ \left( \frac{xy^2z + yz^2x + zx^2y}{3} \right)^{\frac{n+1}{4}} &\leq \frac{xy^n + yz^n + zx^n}{3}\end{aligned}$$

が得られ、これは  $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,n,0}$  を意味します。

**事実 11.5.1**  $n \geq 3$  のとき

$$\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{1,n,0}$$

## 11.6 $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,0}$ が成立するための1つの十分条件

同じノリで一般化してみましょう。 $a + b + c \leq u + v$  である場合はうまくいきそうですが・・・

### 11.6.1 十分条件

まず、

$$(x^u y^v)^l (y^u z^v)^m (z^u x^v)^n = x^{lu+nv} y^{lv+mu} z^{mv+nu}$$

であって、これが  $x^a y^b z^c$  のべきとなるためには、

$$lu + nv : lv + mu : mv + nu = a : b : c$$

であれば良く、

$$\begin{cases} a(lv + mu) = b(lu + nv) \\ b(mv + nu) = c(lv + mu) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} (av - bu)l + aum - bvn = 0 \\ cvl + (cu - bv)m - bun = 0 \end{cases}$$

を解けば良いことになります。これは  $u, v > 0$  であれば

$$\begin{cases} (av - bu)ul + au^2m - buvn = 0 \\ cv^2l + (cu - bv)vm - buvn = 0 \end{cases}$$

と同値であり、 $bu^2 + cv^2 - auv \neq 0$  であれば

$$\begin{aligned} (bu^2 + cv^2 - auv)l &= (au^2 + bv^2 - cuv)m \\ l &= \frac{au^2 + bv^2 - cuv}{bu^2 + cv^2 - auv}m \end{aligned}$$

が分かりますから、 $m = bu^2 + cv^2 - auv$  の場合を考えれば  $l = au^2 + bv^2 - cuv$  であり、

$$\begin{aligned} bun &= cvl + (cu - bv)m \\ &= cv(au^2 + bv^2 - cuv) + (cu - bv)(bu^2 + cv^2 - auv) \\ &= acu^2v + bcv^3 - c^2uv^2 + bcu^3 + c^2uv^2 - acu^2v - b^2u^2v - bcv^3 + abuv^2 \\ &= bcu^3 - b^2u^2v + abuv^2 \\ n &= cu^2 + av^2 - buv \end{aligned}$$

つまり、

$$(l, m, n) = (au^2 + bv^2 - cuv, bu^2 + cv^2 - auv, cu^2 + av^2 - buv)$$

が得られます。実際、

$$\begin{aligned} &(x^u y^v)^{au^2+bv^2-cuv} (y^u z^v)^{bu^2+cv^2-auv} (z^u x^v)^{cu^2+av^2-buv} \\ &= x^{u(au^2+bv^2-cuv)+v(cu^2+av^2-buv)} \\ &\quad y^{v(au^2+bv^2-cuv)+u(bu^2+cv^2-auv)} \\ &\quad z^{v(bu^2+cv^2-auv)+u(cu^2+av^2-buv)} \\ &= x^{a(u^3+v^3)} y^{b(u^3+v^3)} z^{c(u^3+v^3)} \end{aligned}$$

が成り立っています ( $uv = 0$  あるいは  $bu^2 + cv^2 - auv = 0$  でも構いません)。

すると、この  $(l, m, n) = (au^2 + bv^2 - cuv, bu^2 + cv^2 - auv, cu^2 + av^2 - buv)$  がすべて非負であれば、

$$l + m + n = (a + b + c)(u^2 + v^2 - uv) > 0$$

に注意して (weighted) AM-GM 不等式から

$$\begin{aligned} (l + m + n)(x^u y^v + y^u z^v + z^u x^v) &= (lx^u y^v + my^u z^v + nz^u x^v) \\ &\quad + (nx^u y^v + ly^u z^v + mz^u x^v) \\ &\quad + (mx^u y^v + ny^u z^v + lz^u x^v) \\ &\geq (l + m + n)^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(x^a y^b z^c)^{u^3+v^3}} \\ &\quad + (l + m + n)^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(y^a z^b x^c)^{u^3+v^3}} \\ &\quad + (l + m + n)^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(z^a x^b y^c)^{u^3+v^3}} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} x^u y^v + y^u z^v + z^u x^v &\geq (x^a y^b z^c)^{\frac{u^3+v^3}{l+m+n}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{u^3+v^3}{l+m+n}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{u^3+v^3}{l+m+n}} \\ &= (x^a y^b z^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} \end{aligned}$$

が得られます。

$a + b + c = u + v$  であれば、この時点で  $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,0}$  が成り立っています。

一方、 $a + b + c < u + v$  のときは Hölder の不等式によれば、

$$\begin{aligned} &x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c \\ &\leq \left\{ (x^a y^b z^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} \right\}^{\frac{a+b+c}{u+v}} 3^{1-\frac{a+b+c}{u+v}} \\ &(x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} \\ &\leq \left\{ (x^a y^b z^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} \right\} 3^{\frac{u+v}{a+b+c}-1} \end{aligned}$$

が成り立ちますから、これらを合わせれば

$$\begin{aligned} (x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c)^{\frac{u+v}{a+b+c}} &\leq (x^u y^v + y^u z^v + z^u x^v) 3^{\frac{u+v}{a+b+c}-1} \\ \left( \frac{x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c}{3} \right)^{\frac{u+v}{a+b+c}} &\leq \frac{x^u y^v + y^u z^v + z^u x^v}{3} \\ \left( \frac{x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c}{3} \right)^{\frac{1}{a+b+c}} &\leq \left( \frac{x^u y^v + y^u z^v + z^u x^v}{3} \right)^{\frac{1}{u+v}} \end{aligned}$$

が成り立ちます。

以上まとめると次の通りです：

**事実 11.6.1**  $a+b+c \leq u+v$  であって

$$au^2 + bv^2 - cuv \geq 0, \quad bu^2 + cv^2 - auv \geq 0, \quad cu^2 + av^2 - buv \geq 0$$

であれば

$$\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,0}$$

です。

### 11.6.2 付加条件について

しかし、付加条件

$$au^2 + bv^2 - cuv \geq 0, \quad bu^2 + cv^2 - auv \geq 0, \quad cu^2 + av^2 - buv \geq 0$$

の必要性はどの程度なのでしょう。例えば  $(a,b,c) = (1,1,3)$ ,  $(u,v) = (3,3)$  の場合、

$$au^2 + bv^2 = 18, \quad cuv = 27, \quad au^2 + bv^2 - cuv < 0$$

ですが、計算機によると、どうやら  $\Gamma_{1,1,3} \leq \Gamma_{3,3,0}$  は成り立っているようです。

ただし、先の証明における最初の AM-GM 不等式：

$$x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3 \geq (xyz^3)^{\frac{6}{5}} + (yzx^3)^{\frac{6}{5}} + (zxy^3)^{\frac{6}{5}}$$

は成り立っていません。例えば  $(x,y,z) = (1,3,1)$  では

$$(\text{左辺}) = 3^3 + 3^3 + 1 = 55, \quad (\text{右辺}) = 3^{\frac{6}{5}} + 3^{\frac{6}{5}} + 3^{\frac{18}{5}} \approx 60$$

です。従ってここを経由することは出来ません。

しかし、付加条件は全く要らないと云うわけでもありません。なぜなら、例えば  $\Gamma_{1,1,4} \leq \Gamma_{3,3,0}$  は成り立っていないからです。

$$\Gamma_{1,1,4} \leq \Gamma_{3,3,0} \Leftrightarrow xyz^4 + yzx^4 + zxy^4 \leq x^3 y^3 + y^3 z^3 + z^3 x^3$$

ですが、 $(x,y,z) = (1,3,1)$  のとき

$$(\text{左辺}) = 3 + 3 + 3^4 = 87, \quad (\text{右辺}) = 3^3 + 3^3 + 1 = 55$$

です。従って、 $a+b+c \leq u+v$  であったとしても成立しないケースがあるわけですから、何らかの付加条件は必要です。

**事実 11.6.2**

$$\Gamma_{1,1,4} \not\leq \Gamma_{3,3,0}$$

### 11.7 $\Gamma_{1,1,2n} \not\leq \Gamma_{n+1,n+1,0} (n \geq 2)$

直前に見た例を一般化してみましょう。

$$\Gamma_{1,1,2n} \leq \Gamma_{n+1,n+1,0} \Leftrightarrow xyz^{2n} + yzx^{2n} + zxy^{2n} \leq x^{n+1} y^{n+1} + y^{n+1} z^{n+1} + z^{n+1} x^{n+1}$$

ですが、 $(x,y,z) = (1,3,1)$  のとき

$$(\text{左辺}) = 3 + 3 + 3^{2n} = 3^{2n} + 6, \quad (\text{右辺}) = 3^{n+1} + 3^{n+1} + 1 = 6 \cdot 3^n + 1$$

ですから、 $n \geq 2$  のとき

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = 3^{2n} - 6 \cdot 3^n + 5 = (3^n - 1)(3^n - 5) > 0$$

となって不等式は成り立ちません。

**事実 11.7.1**  $n \geq 2$  のとき

$$\Gamma_{1,1,2n} \not\leq \Gamma_{n+1,n+1,0}$$

ちなみに、 $n = 1$  のときは  $\Gamma_{1,1,2} \leq \Gamma_{2,2,0}$  であり、これは付加条件を（ぎりぎり）満たしているため、成立しています。

$$au^2 + bv^2 - cuv = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 = 0$$

$$bu^2 + cv^2 - auv = 2^2 + 2 \cdot 2^2 - 2^2 = 8$$

$$cu^2 + av^2 - buv = 2 \cdot 2^2 + 2^2 - 2^2 = 8$$

もっとも、このケースは

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,1,2} \leq \Gamma_{2,2,0} &\Leftrightarrow xyz^2 + yzx^2 + zxy^2 \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \\ 2xyz^2 + 2yzx^2 + 2zxy^2 &\leq z^2x^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + z^2x^2 \\ 0 &\leq (yz - zx)^2 + (xy - yz)^2 + (zx - xy)^2 \end{aligned}$$

から直ちに証明されます。

$$\mathbf{11.8} \quad \Gamma_{1,1,3} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{3,3,0}$$

計算機によるとこれは成立していそうですが、どうなのでしょう？

$$\Gamma_{1,1,3} \leq \Gamma_{3,3,0} \quad \Leftrightarrow \quad (xyz^3 + yzx^3 + zxy^3)^6 \leq 3(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)^5$$

$$\mathbf{11.9} \quad \Gamma_{1,m,0} \not\leq \Gamma_{1,n,0}$$

$m < n$  のとき  $\Gamma_{1,m,0} \leq \Gamma_{1,n,0}$  は、例えば  $(x, y, z) = (0, 4, 1)$  では、

$$\Gamma_{1,k,0}(0, 4, 1) = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

ですから、 $m < n$  であれば

$$\Gamma_{1,m,0}(0, 4, 1) > \Gamma_{1,n,0}(0, 4, 1), \quad \Gamma_{1,m,0}(0, 2, 1) < \Gamma_{1,n,0}(0, 2, 1)$$

となってしまいます。

指数に 0 を含むとこの類の問題が生じやすいので、特殊なケースの部類でしょうか。指数がポジティブな場合のみ見るべきでしょうか？

**事実 11.9.1**  $\Gamma_{1,m,0}$  に大小関係はない。

## 12 $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に AM-GM が適用できる条件 その 1

懸案の一つに  $\Gamma_{2,1,1} \leq \Gamma_{1,2,0}$  があります ( $\Gamma_{2,1,1} = \Gamma_{1,2,1}$  に注意)。これは  $\Gamma_{2,1,1} \leq \Gamma_{2,3,1}$  が示せれば十分でしたが、右辺は左辺より次数が高くなっているので、Hölder の不等式の部分は問題ありません。では (weighted) AM-GM はどうかというと、

$$(x^2y^3z)^l (y^2z^3x)^m (z^2x^3y)^n = x^{2l+m+3n} y^{3l+2m+n} z^{l+3m+2n}$$

であり、これが  $x^2yz$  のべきになると仮定すると

$$2l + m + 3n : 3l + 2m + n : l + 3m + 2n = 2 : 1 : 1$$

です。これは連立方程式：

$$\begin{cases} 3l + 2m + n = l + 3m + 2n \\ 2l + m + 3n = 2(3l + 2m + n) \end{cases}, \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 2l - m - n = 0 \\ 4l + 3m - n = 0 \end{cases}$$

を解くこととなりますが、解は  $(l, m, n) = (4, -2, 10)$  (など) となり、係数が負になってしまいます。負の weight の AM-GM は一般には成り立ちませんので、上手くいきません。要するに

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

と云うことです。

そこで、直接無理なら何かを咬ませて出来ないか、つまり、

$$\Gamma_{2,1,1} \leq \boxed{\text{何か 4~6 次の巡回平均}} \leq \Gamma_{2,3,1}$$

となるようなもので、(weighted) AM-GM が上手くいくようなものを見つけられればいいのですが、推移律が成り立ちそうなので無理っぽいですね。

しかし、今後のためもありますので、一般に  $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$  において (weighted) AM-GM が上手くいくための条件を探してみましょう。  $a, b, c, u, v, w \geq 0$ 、 $a + b + c >$

$0, u + v + w > 0$  とします。

$$(x^u y^v z^w)^l (y^u z^v x^w)^m (z^u x^v y^w)^n = x^{ul+wm+vn} y^{vl+um+wn} z^{wl+vm+un}$$

ですから、これが  $x^a y^b z^c$  のべきになるためには、

$$ul + wm + vn : vl + um + wn : wl + vm + un = a : b : c$$

でなければなりません。

## 12.1 $b \neq 0$ の場合

ここで、 $a = b = c = 0$  ではあり得ませんので、 $a, b, c$  のうちいずれかは  $0$  ではありません。そこで例えば  $b \neq 0$  であれば、これは連立方程式：

$$\begin{cases} a(vl + um + wn) = b(ul + wm + vn) \\ b(wl + vm + un) = c(vl + um + wn) \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} (av - bu)l + (au - bw)m + (aw - bv)n = 0 \\ (bw - cv)l + (bv - cu)m + (bu - cw)n = 0 \end{cases}$$

を解けば良いことになります ( $b = 0$  の場合は別に考えます)。

ここで

$$\begin{pmatrix} av - bu \\ au - bw \\ aw - bv \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} bw - cv \\ bv - cu \\ bu - cw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \\ (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \\ (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \end{pmatrix}$$

ですから、

$$\begin{pmatrix} (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \\ (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \\ (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

であって、成分が全て非負もしくは全て非正であれば良いことになります。

しかしここで

$$\begin{aligned} & \{(au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu)\} \\ & + \{(aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw)\} \\ & + \{(av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv)\} \\ & = \{abu^2 - b^2uw + bcw^2 - abvw + b^2v^2 - bcuv\} \\ & + \{abw^2 - b^2vw + bcv^2 - abuv + b^2u^2 - bcuw\} \\ & + \{abv^2 - b^2uv + bcu^2 - abuw + b^2w^2 - bcvw\} \\ & = ab(u^2 - vw + w^2 - uv + v^2 - uw) \\ & + bc(w^2 - uv + v^2 - uw + u^2 - vw) \\ & + b^2(-uw + v^2 - vw + u^2 - uv + w^2) \\ & = b(a + b + c)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) \\ & = \frac{b}{2}(a + b + c)\{(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2\} \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

ですから、すべて非正ということはありません。

また実際、

$$\begin{cases} l = (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \geq 0 \\ m = (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \geq 0 \\ n = (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \geq 0 \end{cases}$$

と仮定すれば、

$$(x^u y^v z^w)^l (y^u z^v x^w)^m (z^u x^v y^w)^n = x^{ul+wm+vn} y^{vl+um+wn} z^{wl+vm+un}$$

であって、

$$\begin{aligned}
& ul + wm + vn \\
&= u \{ (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \} \\
&\quad + w \{ (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \} \\
&\quad + v \{ (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \} \\
&= u \{ abu^2 - acuw - b^2uw + bcw^2 - abvw + acuw + b^2v^2 - bcuv \} \\
&\quad + w \{ abw^2 - acvw - b^2vw + bcv^2 - abuv + acvw + b^2u^2 - bcuw \} \\
&\quad + v \{ abv^2 - acuv - b^2uv + bcu^2 - abuw + acuv + b^2w^2 - bcvw \} \\
&= \{ abu^3 - b^2u^2w + bcuw^2 - abuvw + b^2uv^2 - bcu^2v \} \\
&\quad + \{ abw^3 - b^2vw^2 + bcv^2w - abuvw + b^2u^2w - bcuw^2 \} \\
&\quad + \{ abv^3 - b^2uv^2 + bcu^2v - abuvw + b^2vw^2 - bcv^2w \} \\
&= \{ abu^3 - abuvw \} + \{ abw^3 - abuvw \} + \{ abv^3 - abuvw \} \\
&= ab(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& vl + um + wn \\
&= v \{ (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \} \\
&\quad + u \{ (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \} \\
&\quad + w \{ (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \} \\
&= v \{ abu^2 - acuw - b^2uw + bcw^2 - abvw + acuw + b^2v^2 - bcuv \} \\
&\quad + u \{ abw^2 - acvw - b^2vw + bcv^2 - abuv + acvw + b^2u^2 - bcuw \} \\
&\quad + w \{ abv^2 - acuv - b^2uv + bcu^2 - abuw + acuv + b^2w^2 - bcvw \} \\
&= \{ -b^2uvw + b^2v^3 \} + \{ -b^2uvw + b^2u^3 \} + \{ -b^2uvw + b^2w^3 \} \\
&= b^2(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& wl + vm + un \\
&= w \{ (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \} \\
&\quad + v \{ (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \} \\
&\quad + u \{ (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \} \\
&= w \{ abu^2 - acuw - b^2uw + bcw^2 - abvw + acuw + b^2v^2 - bcuv \} \\
&\quad + v \{ abw^2 - acvw - b^2vw + bcv^2 - abuv + acvw + b^2u^2 - bcuw \} \\
&\quad + u \{ abv^2 - acuv - b^2uv + bcu^2 - abuw + acuv + b^2w^2 - bcvw \} \\
&= \{ bcw^3 - bcuvw \} + \{ bcv^3 - bcuvw \} + \{ bcu^3 - bcuvw \} \\
&= bc(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)
\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned}
(x^u y^v z^w)^l (y^u z^v x^w)^m (z^u x^v y^w)^n &= (x^a y^b z^c)^{b(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)} \\
&= (x^a y^b z^c)^{b(u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu)}
\end{aligned}$$

となっています。全く同様に

$$\begin{aligned}
(x^u y^v z^w)^n (y^u z^v x^w)^l (z^u x^v y^w)^m &= (y^u z^v x^w)^l (z^u x^v y^w)^m (x^u y^v z^w)^n \\
&= (y^a z^b x^c)^{b(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)} \\
(x^u y^v z^w)^m (y^u z^v x^w)^n (z^u x^v y^w)^l &= (z^u x^v y^w)^l (x^u y^v z^w)^m (y^u z^v x^w)^n \\
&= (z^a x^b y^c)^{b(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw)}
\end{aligned}$$

ともなりますから、 $l + m + n \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
& l + m + n \\
&= \{ (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \} \\
&\quad + \{ (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \} \\
&\quad + \{ (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \} \\
&= \frac{b}{2} (a + b + c) \{ (u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 \} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

でさえあれば、つまり ( $b \neq 0$  でしたから)  $u = v = w$  でさえなければ、

$$\begin{aligned}
& (l+m+n)(x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w) \\
&= (lx^u y^v z^w + my^u z^v x^w + nz^u x^v y^w) \\
&\quad + (nx^u y^v z^w + ly^u z^v x^w + mz^u x^v y^w) \\
&\quad + (mx^u y^v z^w + ny^u z^v x^w + lz^u x^v y^w) \\
&\geq (l+m+n)^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(x^u y^v z^w)^l (y^u z^v x^w)^m (z^u x^v y^w)^n} \\
&\quad (l+m+n)^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(x^u y^v z^w)^n (y^u z^v x^w)^l (z^u x^v y^w)^m} \\
&\quad (l+m+n)^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(x^u y^v z^w)^m (y^u z^v x^w)^n (z^u x^v y^w)^l} \\
& (x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w) \\
&\geq^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(x^u y^v z^w)^l (y^u z^v x^w)^m (z^u x^v y^w)^n} \\
&\quad^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(x^u y^v z^w)^n (y^u z^v x^w)^l (z^u x^v y^w)^m} \\
&\quad^{l+m+n} \sqrt[l+m+n]{(x^u y^v z^w)^m (y^u z^v x^w)^n (z^u x^v y^w)^l} \\
&= (x^a y^b z^c)^{\frac{b(u^3+v^3+w^3-3uvw)}{l+m+n}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{b(u^3+v^3+w^3-3uvw)}{l+m+n}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{b(u^3+v^3+w^3-3uvw)}{l+m+n}} \\
&= (x^a y^b z^c)^{\frac{u+v+w}{a+b+c}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{u+v+w}{a+b+c}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{u+v+w}{a+b+c}}
\end{aligned}$$

となることが分かるわけです。

**事実 12.1.1**  $b \neq 0$  とします。  $u = v = w$  でなく、また

$$\begin{cases}
(au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \geq 0 \\
(aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \geq 0 \\
(av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) \geq 0
\end{cases}$$

であれば、

$$x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w \geq (x^a y^b z^c)^{\frac{u+v+w}{a+b+c}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{u+v+w}{a+b+c}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{u+v+w}{a+b+c}}$$

既に見た  $w = 0$  のときの結果も含まれていることに注意します。

## 12.2 例外の計算

また、

$$\begin{pmatrix}
(au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) \\
(aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) \\
(av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv)
\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となるならば、当然

$$\begin{aligned}
& \{(au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu)\} \\
& \quad + \{(aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw)\} \\
& \quad + \{(av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv)\} \\
&= \frac{b}{2}(a+b+c) \{(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

であって、そのような場合は  $u = v = w$  のときに限られます。この場合、

$$(x^u y^u z^u)^l (y^u z^u x^u)^m (z^u x^u y^u)^n = x^{u(l+m+n)} y^{u(l+m+n)} z^{u(l+m+n)}$$

ですから、これが  $x^a y^b z^c$  のべきになるためには、

$$a = b = c$$

でなければなりません。しかしこれは  $\Gamma_{a,a,a} = \Gamma_{u,u,u} = \sqrt[3]{xyz}$  ですから、自明なケースです。

**事実 12.2.1**  $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,u,u}$  において weighted AM-GM が上手く行くための (十分) 条件は、

$$a = b = c$$

ですが、そもそも  $\Gamma_{a,b,c} = \Gamma_{u,u,u}$  ですから意味がありません。

## 12.3 $b = 0$ の場合

$a, b, c$  のうち少なくとも 1 つは 0 ではありませんから、

$$\Gamma_{a,b,c} = \Gamma_{c,a,b} = \Gamma_{b,c,a}$$

のいずれかは2番目の指数がノンゼロになっていますから、この形に変形してから  $b \neq 0$  の場合の事実を適用すれば問題ありません。

## 12.4 $\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に weighted AM-GM を適用できる十分条件

先に得た結果から ( $u = v = w$  ではないとします)、

$$\begin{cases} (u-2w)(2u-w) - (w-2v)(2v-u) \geq 0 \\ (w-2v)(2w-v) - (v-2u)(2u-w) \geq 0 \\ (v-2u)(2v-u) - (u-2w)(2w-v) \geq 0 \end{cases}$$

が得られますが、

$$\begin{aligned} & (u-2w)(2u-w) - (w-2v)(2v-u) \\ &= 2u^2 - uw - 4uw + 2w^2 - 2vw + uw + 4v^2 - 2uv \\ &= 2u^2 + 4v^2 + 2w^2 - 2uv - 2vw - 4wu \\ &= 2(u-w)^2 - 2v(u+w-2v) \end{aligned}$$

などと書けますから、

$$\begin{cases} (u-w)^2 \geq v(u+w-2v) \\ (w-v)^2 \geq u(w+v-2u) \\ (v-u)^2 \geq w(v+u-2w) \end{cases}$$

と書き直すことが出来ます。

**事実 12.4.1**  $u = v = w$  でなく

$$\begin{cases} (u-w)^2 \geq v(u+w-2v) \\ (w-v)^2 \geq u(w+v-2u) \\ (v-u)^2 \geq w(v+u-2w) \end{cases}$$

であれば、 $\Gamma_{1,2,1} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{u,v,w}$  に weighted AM-GM を適用して

$$x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w \geq (xy^2z)^{\frac{u+v+w}{4}} + (yz^2x)^{\frac{u+v+w}{4}} + (zx^2y)^{\frac{u+v+w}{4}}$$

## 12.5 $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{2,3,1}$ に weighted AM-GM を適用できる十分条件

$b \neq 0$  と仮定します。先に得た結果から

$$\begin{cases} (2a-b)(2b-c) - (a-3b)(3b-2c) \geq 0 \\ (a-3b)(b-3c) - (3a-2b)(2b-c) \geq 0 \\ (3a-2b)(3b-2c) - (2a-b)(b-3c) \geq 0 \end{cases}$$

が得られますが、

$$\begin{aligned} & (2a-b)(2b-c) - (a-3b)(3b-2c) \\ &= 4ab - 2ca - 2b^2 + bc - 3ab + 2ca + 9b^2 - 6bc \\ &= 7b^2 + ab - 5bc \\ &= b(a + 7b - 5c) \\ & (a-3b)(b-3c) - (3a-2b)(2b-c) \\ &= b(-5a + b + 7c) \\ & (3a-2b)(3b-2c) - (2a-b)(b-3c) \\ &= b(7a - 5b + c) \end{aligned}$$

によれば

$$\begin{cases} a + 7b - 5c \geq 0 \\ -5a + b + 7c \geq 0 \\ 7a - 5b + c \geq 0 \end{cases}$$

と書き直すことが出来ます。

**事実 12.5.1**  $b \neq 0$  であって

$$\begin{cases} a + 7b - 5c \geq 0 \\ -5a + b + 7c \geq 0 \\ 7a - 5b + c \geq 0 \end{cases}$$

であれば、 $\Gamma_{a,b,c} \stackrel{?}{\leq} \Gamma_{2,3,1}$  に weighted AM-GM を適用して

$$x^2 y^3 z + y^2 z^3 x + z^2 x^3 y \geq (x^a y^b z^c)^{\frac{6}{a+b+c}} + (y^a z^b x^c)^{\frac{6}{a+b+c}} + (z^a x^b y^c)^{\frac{6}{a+b+c}}$$

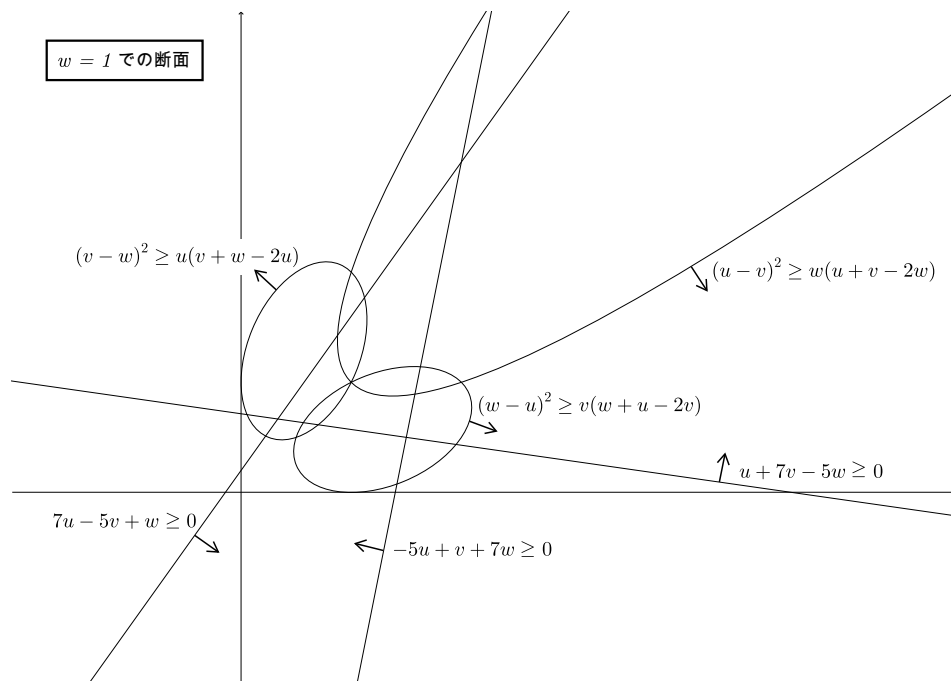
## 12.6 両方同時に適用できる例はないこと

$$\Gamma_{1,2,1} \leq \Gamma_{u,v,w} \leq \Gamma_{2,3,1}$$

の2箇所をどちらも weighted AM-GM で処理することが出来るための条件は、以上から  $u = v = w$  でなく、 $v \neq 0$  であって

$$\begin{cases} (u-w)^2 \geq v(u+w-2v) \\ (w-v)^2 \geq u(w+v-2u) \\ (v-u)^2 \geq w(v+u-2w) \\ u+7v-5w \geq 0 \\ -5u+v+7w \geq 0 \\ 7u-5v+w \geq 0 \end{cases}$$

を満たすことになりますが、残念ながらそのような  $u, v, w$  は存在しません (3つの円錐と3つの平面です)。



2つを組み合わせて直接行けることになってしまうのでしょう。

## 13 $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に AM-GM が適用できる条件 その2

ある変数に注目してそこをノンゼロと仮定して計算する方法で見ましたが、元々対称に計算するとどうなるでしょうか。

### 13.1 対称な計算

負の指数を含む場合でも上手く行くケースがあることは重々承知していますが、とりあえず全ての指数は非負である、 $a, b, c, u, v, w \geq 0$ ,  $a+b+c > 0$ ,  $u+v+w > 0$  と仮定します。

$$ul + wm + vn : vl + um + wn : wl + vm + un = a : b : c$$

であるための必要十分条件は、

$$\begin{cases} b(wl + vn + un) = c(vl + um + wn) \\ c(ul + wm + vn) = a(wl + vm + un) \\ a(vl + um + wn) = b(ul + wm + vn) \end{cases}$$

であり、これを整理すると

$$\begin{cases} (bw - cv)l + (bv - cu)m + (bu - cw)n = 0 \\ (cu - aw)l + (cw - av)m + (cv - au)n = 0 \\ (av - bu)l + (au - bw)m + (aw - bv)n = 0 \end{cases}$$

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} bw - cv & bv - cu & bu - cw \\ cu - aw & cw - av & cv - au \\ av - bu & au - bw & aw - bv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

です (係数行列を  $M$  としておきましょう)。これがノンゼロな非負解をもつ条件を求めようということです。Gordan の定理ってのがあったな：

**定理 13.1.1 [ Gordan's theorem ]** 次のいずれか一方のみが成り立ちます：

- i)  ${}^t M \mathbf{y} > 0$  となる  $\mathbf{y}$  がある。
- ii)  $M \mathbf{x} = 0$  となる  $\mathbf{x} \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$  がある。

まあ、いいか。

$$\begin{aligned}
|M| &= \begin{vmatrix} bw - cv & bv - cu & bu - cw \\ cu - aw & cw - av & cv - au \\ av - bu & au - bw & aw - bv \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} bw & bv & bu \\ cu & cw & cv \\ av & au & aw \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} bw & bv & cw \\ cu & cw & au \\ av & au & bv \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} bw & cu & bu \\ cu & av & cv \\ av & bw & aw \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bw & cu & cw \\ cu & av & au \\ av & bw & bv \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} cv & bv & bu \\ aw & cw & cv \\ bu & au & aw \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cv & bv & cw \\ aw & cw & au \\ bu & au & bv \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cv & cu & bu \\ aw & av & cv \\ bu & bw & aw \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} cv & cu & cw \\ aw & av & au \\ bu & bw & bv \end{vmatrix} \\
&= -abc(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw) \\
&\quad + (a^2buv^2 + c^2awu^2 + b^2cw^2v - b^2cuv^2 - a^2bvu^2 - c^2avw^2) \\
&\quad + (c^2auv^2 + b^2cwu^2 + a^2bv w^2 - c^2au^2w - b^2cvw^2 - a^2buw^2) \\
&\quad - (ca^2u^2v + bc^2w^2u + ab^2v^2w - bc^2u^2v - ab^2w^2u - ca^2v^2w) \\
&\quad + (b^2cuv^2 + a^2bvu^2 + c^2avw^2 - a^2bv w^2 - c^2auv^2 - b^2cwu^2) \\
&\quad - (ab^2u^2v + ca^2w^2u + bc^2v^2w - ab^2v^2w + ca^2u^2v - bc^2w^2u) \\
&\quad - (bc^2u^2v + ab^2w^2u + ca^2v^2w - ca^2w^2u - bc^2v^2w - ab^2u^2v) \\
&\quad + abc(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となっています。これはあるいは、

$$\begin{aligned}
|M| &= \begin{vmatrix} bw - cv & bv - cu & bu - cw \\ cu - aw & cw - av & cv - au \\ av - bu & au - bw & aw - bv \end{vmatrix} \\
&= \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \right| \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\} \cdot \left( \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} \right) \times \left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

とも計算されるでしょう。

$$(a \times b) \times (c \times d) = \{a \cdot (c \times d)\} b - \{b \cdot (c \times d)\} a$$

から

$$\begin{aligned}
(a \times v) \times (a \times w) &= \{a \cdot (a \times w)\} v - \{v \cdot (a \times w)\} a \\
&= -\{v \cdot (a \times w)\} a
\end{aligned}$$

$$(a \times u) \cdot \{(a \times v) \times (a \times w)\} = -\{v \cdot (a \times w)\} (a \times u) \cdot a = 0$$

と云うことですね。

## 13.2 rank $M$ による分類

### 13.2.1 rank $M = 0$ の場合

また、

$$\begin{aligned}
&(av - bu)^2 + (au - bw)^2 + (aw - bv)^2 \\
&= a^2(u^2 + v^2 + w^2) + b^2(u^2 + v^2 + w^2) - 2ab(uv + vw + wu) \\
&= a^2(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) + b^2(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) \\
&\quad + (a^2 + b^2)(uv + vw + wu) - 2ab(uv + vw + wu) \\
&= (a^2 + b^2) \frac{1}{2} \{(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2\} + (a - b)^2(uv + vw + wu)
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
&(bw - cv)^2 + (bv - cu)^2 + (bu - cw)^2 \\
&= (b^2 + c^2) \frac{1}{2} \{(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2\} + (b - c)^2(uv + vw + wu) \\
&(cu - aw)^2 + (cw - av)^2 + (cv - au)^2 \\
&= (c^2 + a^2) \frac{1}{2} \{(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2\} + (c - a)^2(uv + vw + wu)
\end{aligned}$$

となっていますから、rank $M = 0$ 、すなわち  $M = O$  であるための必要十分条件は

$$\text{rank} M = 0 \Leftrightarrow M = O \Leftrightarrow a = b = c, u = v = w$$

です。これは結局、 $\sqrt[3]{xyz} = \Gamma_{a,a,a} \leq \Gamma_{u,u,u} = \sqrt[3]{xyz}$  を『示したい』と云うことであって、無意味です。

### 13.2.2 $\text{rank}M = 1$ の場合

$\text{rank}M = 1$  の場合、全ての 2 次小行列式は 0 ですから、例えば

$$\begin{vmatrix} au - bw & aw - bv \\ bv - cu & bu - cw \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} aw - bv & av - bu \\ bu - cw & bw - cv \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} av - bu & au - bw \\ bw - cv & bv - cu \end{vmatrix} = 0$$

すなわち、

$$\begin{cases} (au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu) = 0 \\ (aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw) = 0 \\ (av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv) = 0 \end{cases}$$

であって、既に見たように

$$\begin{aligned} 0 &= \{(au - bw)(bu - cw) - (aw - bv)(bv - cu)\} \\ &\quad + \{(aw - bv)(bw - cv) - (av - bu)(bu - cw)\} \\ &\quad + \{(av - bu)(bv - cu) - (au - bw)(bw - cv)\} \\ &= \frac{b}{2}(a + b + c) \{(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2\} \end{aligned}$$

でした。

また、全く同様に

$$\begin{vmatrix} bv - cu & bu - cw \\ cw - av & cv - aw \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} bu - cw & bw - cv \\ cv - au & cu - aw \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} bw - cv & bv - cu \\ cu - aw & cw - av \end{vmatrix} = 0$$

からは

$$\frac{c}{2}(a + b + c) \{(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2\} = 0$$

が、

$$\begin{vmatrix} cw - av & cv - au \\ au - bw & aw - bv \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} cv - au & cu - aw \\ aw - bv & av - bu \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} cu - aw & cw - av \\ av - bu & au - bw \end{vmatrix} = 0$$

からは

$$\frac{a}{2}(a + b + c) \{(u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2\} = 0$$

が得られますから、 $a, b, c$  のいずれかは 0 でないので  $\text{rank}M = 1$  である場合は  $u = v = w$  のとき（ただし  $a = b = c$  ではない）に限られます。

$u = v = w \neq 0$  である場合は、そもそも  $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,u,u} = \sqrt[3]{xyz}$  を考えていることになり、この場合必要十分条件の連立方程式は

$$\begin{cases} (b - c)l + (b - c)m + (b - c)n = 0 \\ (c - a)l + (c - a)m + (c - a)n = 0 \\ (a - b)l + (a - b)m + (a - b)n = 0 \end{cases}$$

ですから、例えば  $b \neq c$  だと第 1 式は

$$l + m + n = 0$$

となり、これを満たす非負の解  $(l, m, n)$  は存在しません。 $a \neq b, c \neq a$  の場合も同様ですから、解が存在する可能性があるのは  $a = b = c$  の場合のみですが、これは  $\text{rank}M = 0$  のケースです。

### 13.2.3 $\text{rank}M = 2$ の場合

$u = v = w$  のときは  $\text{rank}M \leq 1$  ですから、 $u = v = w$  ではないと仮定します。

$a, b, c \neq 0$  の場合、

$$\begin{pmatrix} bw - cv \\ bv - cu \\ bu - cw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cu - aw \\ cw - av \\ cv - au \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} av - bu \\ au - bw \\ aw - bv \end{pmatrix}$$

のうちの 2 本も平行ではありません（前節の計算参照）。さてどうしたものか。ランクで分類してもしようがないか。

## 13.3 $a, b, c$ による分類

### 13.3.1 $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ の場合

連立方程式は

$$\begin{cases} (bw - cv)l + (bv - cu)m + (bu - cw)n = 0 \\ ul + wm + vn = 0 \end{cases}$$

であり、第 2 式が非負の  $l, m, n$  で成立するためには  $u, v, w$  のうちいずれかは 0 でなければなりません。

$u = 0, v \neq 0, w \neq 0$  の場合は、

$$\begin{cases} (bw - cv)l + bvm - cwn = 0 \\ wm + vn = 0 \end{cases}$$

であり、第2式から  $m = n = 0, l \neq 0$  ですから第1式に返して

$$bw - cv = 0 \quad \text{従って} \quad b : c = v : w$$

が得られます（解は  $(l, m, n) = (1, 0, 0)$ ）。これ以外の場合は非負解はありません。

$v = 0, w \neq 0, u \neq 0$  の場合は、

$$\begin{cases} bwl - cum + (bu - cw)n = 0 \\ ul + wm = 0 \end{cases}$$

ですから同様に  $b : c = w : u$  であれば非負解  $(l, m, n) = (0, 0, 1)$  がありますが、それ以外の場合は非負解はありません。

$w = 0, u \neq 0, v \neq 0$  の場合は、

$$\begin{cases} -cvl + (bv - cu)m + bun = 0 \\ ul + vn = 0 \end{cases}$$

ですから同様に  $b : c = u : v$  であることが非負解をもつ条件であり、非負解は  $(l, m, n) = (0, 1, 0)$  です。

これらは全て

$$\Gamma_{0,b,c} \leq \Gamma_{0,b,c} = \Gamma_{c,0,b} = \Gamma_{b,c,0}$$

のケース（等号が成り立ちます）であり、自明です。

$u = v = 0, w \neq 0$  の場合は、

$$\begin{cases} bl - cn = 0 \\ m = 0 \end{cases}$$

であり、非負解  $(l, m, n) = (c, 0, b)$  があります。

$v = w = 0, u \neq 0$  の場合は、

$$\begin{cases} -cm + bn = 0 \\ l = 0 \end{cases}$$

であり、非負解  $(l, m, n) = (0, b, c)$  があります。

$w = u = 0, v \neq 0$  の場合は、同様に非負解  $(l, m, n) = (b, c, 0)$  をもちます。

これらは全て  $\Gamma_{0,b,c}$  と  $\Gamma_{0,0,w}$  の比較の話になっています。

### 13.3.2 $b = 0, c \neq 0, a \neq 0$ の場合、 $c = 0, a \neq 0, b \neq 0$ の場合

この場合も

$$\Gamma_{a,0,c} = \Gamma_{0,c,a}, \quad \Gamma_{a,b,0} = \Gamma_{0,a,b}$$

ですから、全く同様に、非負解があるのは以下の通りのみです。

$$\Gamma_{a,0,c} \leq \Gamma_{a,0,c}, \quad \Gamma_{a,0,c} \leq \Gamma_{0,0,w}$$

$$\Gamma_{a,b,0} \leq \Gamma_{a,b,0}, \quad \Gamma_{a,b,0} \leq \Gamma_{0,0,w}$$

### 13.3.3 $a = b = 0, c \neq 0$ の場合

連立方程式は

$$\begin{cases} vl + um + wn = 0 \\ ul + wm + vn = 0 \end{cases}$$

であり、 $u, v, w$  のうちいずれかは0でなければ非負の解は存在しません。

$u = 0, v \neq 0, w \neq 0$  の場合は、

$$\begin{cases} vl + wn = 0 \\ wm + vn = 0 \end{cases}$$

となり、非負解はありません。

$u = 0, v = 0, w \neq 0$  の場合は、

$$\begin{cases} n = 0 \\ m = 0 \end{cases}$$

となって、非負解  $(l, m, n) = (1, 0, 0)$  が存在します。

$v = 0, w \neq 0, u \neq 0$  である場合や  $w = 0, u \neq 0, v \neq 0$  である場合も同様に非負解はなく、 $v = w = 0, u \neq 0$  の場合、 $w = u = 0, v \neq 0$  の場合は非負解が存在します。これらはすべて  $\Gamma_{0,0,c}$  と  $\Gamma_{0,0,w}$  の比較の場合です。

## 14 $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$ に AM-GM が適用できる条件 その3

色々試行錯誤しましたが、無駄な計算も多かったようです。対称な条件を求めましょう。

### 14.1 逆行列の計算

$\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$  を示すときに、Hölder の不等式の部分は置いておいて、まず weighted AM-GM 不等式を適用できるための条件は、

$$ul + wm + vn : vl + um + wn : wl + vm + un = a : b : c$$

となるようなノンゼロな非負解  $(l, m, n)$  が存在することですが、それは連立方程式：

$$\begin{cases} ul + wm + vn = a \\ vl + um + wn = b \\ wl + vm + un = c \end{cases}$$

がノンゼロな非負解  $(l, m, n)$  をもつことと同値です。ここで係数行列の行列式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u & w & v \\ v & u & w \\ w & v & u \end{vmatrix} &= u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw \\ &= (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) \\ &= \frac{1}{2}(u + v + w) \{ (u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 \} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ですから、 $u + v + w > 0$  であることから  $u = v = w$  のときのみ正則でないことが分かります。

$u = v = w$  でない場合、逆行列が存在しますから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & w & v \\ v & u & w \\ w & v & u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw} \begin{pmatrix} u^2 - vw & v^2 - wu & w^2 - uv \\ w^2 - uv & u^2 - vw & v^2 - wu \\ v^2 - wu & w^2 - uv & u^2 - vw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw} \begin{pmatrix} a(u^2 - vw) + b(v^2 - wu) + c(w^2 - uv) \\ a(w^2 - uv) + b(u^2 - vw) + c(v^2 - wu) \\ a(v^2 - wu) + b(w^2 - uv) + c(u^2 - vw) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られます。ここで、

$$\begin{aligned} &a(u^2 - vw) + b(v^2 - wu) + c(w^2 - uv) \\ &\quad + a(w^2 - uv) + b(u^2 - vw) + c(v^2 - wu) \\ &\quad + a(v^2 - wu) + b(w^2 - uv) + c(u^2 - vw) \\ &= (a + b + c)(u^2 + v^2 + w^2) - (a + b + c)(uv + vw + wu) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) \{ (u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2 \} \end{aligned}$$

なので  $l = m = n = 0$  となるのは  $u = v = w$  の場合だけであることに注意すれば、求める条件は以下の通りになります：

**事実 14.1.1**  $a, b, c, u, v, w \geq 0$ ,  $a + b + c > 0$ ,  $u + v + w > 0$  とします。

$u = v = w$  でないとき、

$$\begin{cases} a(u^2 - vw) + b(v^2 - wu) + c(w^2 - uv) \geq 0 \\ a(w^2 - uv) + b(u^2 - vw) + c(v^2 - wu) \geq 0 \\ a(v^2 - wu) + b(w^2 - uv) + c(u^2 - vw) \geq 0 \end{cases}$$

であれば、

$$\begin{cases} ul + wm + vn = a \\ vl + um + wn = b \\ wl + vm + un = c \end{cases}$$

はノンゼロな非負解

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw} \begin{pmatrix} a(u^2 - vw) + b(v^2 - wu) + c(w^2 - uv) \\ a(w^2 - uv) + b(u^2 - vw) + c(v^2 - wu) \\ a(v^2 - wu) + b(w^2 - uv) + c(u^2 - vw) \end{pmatrix}$$

をもちます。

$u = v = w$  であるときは、明らかに  $a = b = c$  でなければならず、自明な場合です。

条件はクロス積を使って書くこともできます：

**事実 14.1.2**  $a, b, c, u, v, w \geq 0$ ,  $a + b + c > 0$ ,  $u + v + w > 0$  とします。  
 $u = v = w$  でないとき、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \right\} \geq 0, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\} \geq 0, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} \right\} \geq 0$$

であれば、

$$\begin{cases} ul + wm + vn = a \\ vl + um + wn = b \\ wl + vm + un = c \end{cases}$$

はノンゼロな非負解

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw} \begin{pmatrix} a(u^2 - vw) + b(v^2 - wu) + c(w^2 - uv) \\ a(w^2 - uv) + b(u^2 - vw) + c(v^2 - wu) \\ a(v^2 - wu) + b(w^2 - uv) + c(u^2 - vw) \end{pmatrix}$$

をもちます。

ただし、この議論は不等式が成り立つための十分条件を求めているに過ぎず、必要十分条件を求める問題は依然残されたままです。

実際、 $(a, b, c)$  が  $\Gamma_{u,v,w}$  に入っていないくても不等式  $\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$  が成り立っているような例はありますから（例えば  $\Gamma_{2,1,1} \leq \Gamma_{2,3,1}$ ）、更なる調査が必要です。

## 14.2 AM-GM 不等式が適用できる場合のまとめ

**事実 14.2.1** [ weighted AM-GM と Hölder が有効な場合 ]  $a, b, c, u, v, w \geq 0$ ,  $a + b + c > 0$ ,  $u + v + w > 0$  とします。

(i)  $u = v = w$  でないとき、

$$a + b + c \leq u + v + w, \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} a(u^2 - vw) + b(v^2 - wu) + c(w^2 - uv) \geq 0 \\ a(w^2 - uv) + b(u^2 - vw) + c(v^2 - wu) \geq 0 \\ a(v^2 - wu) + b(w^2 - uv) + c(u^2 - vw) \geq 0 \end{cases}$$

であれば、

$$\Gamma_{a,b,c} \leq \Gamma_{u,v,w}$$

であり、等号は  $x = y = z$  のときのみ成立します。

(ii)  $u = v = w$  のとき、 $a = b = c$  でなければ

$$\Gamma_{a,b,c} \not\leq \Gamma_{u,u,u}$$

であり、 $a = b = c$  であれば、

$$\Gamma_{a,a,a} = \sqrt[3]{xyz} = \Gamma_{u,u,u}$$

です。

## 15 Conical hull

そもそも連立方程式：

$$\begin{cases} ul + wm + vn = a \\ vl + um + wn = b \\ wl + vm + un = c \end{cases}$$

は、ベクトル  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  を

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix}$$

と分解しているわけですが。3つのベクトル  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix}$  は長さが等しく、またどの2本も挟む角が等しいため、正三角錐を成していますが、条件は、3点  $(u, v, w), (w, u, v), (v, w, u)$  の作る錐包  $\mathcal{C}_{u,v,w}$  の中に点  $(a, b, c)$  が入ることとも言えます。

点  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  が錐包  $\mathcal{C}_{u,v,w}$  に入れば、 $(c, a, b), (b, c, a)$  も入りますから、3点  $(a, b, c), (c, a, b), (b, c, a)$  の錐包  $\mathcal{C}_{a,b,c}$  は  $\mathcal{C}_{u,v,w}$  に含まれることになります。実際、

$$\begin{aligned} (a, b, c) \in \mathcal{C}_{u,v,w} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad \exists (j, k, h) \geq 0 \\ &= \begin{pmatrix} j & h & k \\ k & j & h \\ h & k & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので、任意の  $(p, q, r) \geq 0$  に対して

$$\begin{aligned} &p \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & h & k \\ k & j & h \\ h & k & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pj + rk + qh & ph + rj + qk & pk + rh + qj \\ qj + pk + rh & qh + pj + rk & qk + ph + rj \\ rj + qk + ph & rh + qj + pk & rk + qh + pj \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= (pj + rk + qh) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + (ph + rj + qk) \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} + (pk + rh + qj) \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} \\ &\in \mathcal{C}_{u,v,w} \end{aligned}$$

つまり、 $\mathcal{C}_{a,b,c} \subset \mathcal{C}_{u,v,w}$  です。

従って

$$(p, q, r) \in \mathcal{C}_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathcal{C}_{u,v,w} \Rightarrow (p, q, r) \in \mathcal{C}_{u,v,w}$$

となりますから、以前指摘したように推移律が成り立っており、『間に咬ませる』やり方は通用しないことが分かります。

この系統の言葉で一度書き直してみても良いでしょう ([高橋 14])。

## 15.1 言葉の定義

### 15.1.1 錐包

行列  $M$  のすべての成分が非負であるとき、 $M$  は非負であると言って、 $M \geq O$  で表します。成分が全て正である場合は  $M$  は正であると言って  $M > O$  で表します。

また、同じ型の行列  $M, N$  が  $M - N \geq O$  あるいは  $M - N > O$  であるとき、 $M \geq N$  あるいは  $M > N$  と書きます。

( $n$  次元) ベクトル  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  と ( $k$  次元) 非負ベクトル  $\mathbf{l} \geq \mathbf{0}$  に対して、

$$l_1 \mathbf{x}_1 + \dots + l_k \mathbf{x}_k$$

の型のベクトルを錐結合 (conical combination) と言い、特に  $l_1 + \dots + l_k = 1$  である場合は凸結合 (convex combination) と呼びます。

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  の錐結合全体は、 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  の錐包 (conical hull) と呼ばれ、ここでは  $\langle \mathbf{x}_j \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle$  で表します。

任意の集合  $B$  についても同様に、 $B$  の任意の有限個の元の錐結合全体を  $B$  の錐包と言って  $\langle B \rangle$  と書きます。

また、

$$a_1, \dots, a_j \in A \Rightarrow \langle a_1, \dots, a_j \rangle \subset A$$

であるとき、 $A$  は凸錐 (convex cone) であると言えます。 $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle$  は  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  を含む最小の凸錐です。

有限個の点 (ベクトル) によって生成される凸錐のことを有限錐と言います。

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_k \end{pmatrix}$$

と書けば、

$$\langle m_1, \dots, m_k \rangle = \{ M\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

ですから、この意味で

$$\langle m_1, \dots, m_k \rangle = \langle M \rangle$$

と書くことがあります。

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  の凸結合全体は、 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  の凸包 (convex hull) と呼ばれ、ここでは  $[\mathbf{x}_j] = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$  で表します。

特に

$$a_1, \dots, a_j \in M \Rightarrow [a_1, \dots, a_j] \subset M$$

が成り立つとき、集合  $M$  は凸であると言えます。

### 15.1.2 双対錐

$A$  を  $n$  次元ユークリッド空間の部分集合とします。任意の  $a \in A$  に対して  $\mathbf{x} \cdot a \geq 0$  となるような  $\mathbf{x}$  の全体を  $A^*$  と書いて、 $A$  の双対錐と言います：

$$A^* = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot a \geq 0 \text{ for all } a \in A \}$$

$A$  が凸錐でなくても  $A^*$  は凸錐であり、特に  $A$  が部分空間であれば  $A^* = A^\perp$  です。

( $k, n$ )-型連立不等式：

$$M\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

の解の全体は、

$${}^tM = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_k \end{pmatrix}$$

と書けば、有限錐  $\langle c_1, \dots, c_k \rangle = \langle {}^tM \rangle$  の双対錐です。従って (G.Farkas の結果により) 解の全体は有限錐です。

## 15.2 Minkowski-Farkas の定理

行列  $U \geq 0$  に対して、連立方程式  $U\mathbf{x} = a$  がノンゼロな非負解  $\mathbf{x}$  をもつと云うことは、

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \end{pmatrix}$$

と書けば、 $a$  が錐包  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle U \rangle$  に入ると云うことであり、

$$\langle a \rangle \subset \langle U \rangle$$

と書き表すことが出来ます。これの双対は

$$\langle a \rangle^* \supset \langle U \rangle^*$$

ですが、これらの条件は同値であることが知られています：

**定理 15.2.1** [ Minkowski-Farkas の定理 ]  $U\mathbf{x} = a$  がノンゼロな非負解  $\mathbf{x}$  をもつ必要十分条件は、

$$\langle a \rangle^* \supset \langle U \rangle^*$$

です。

もっとも、今考えているケースは ( $u = v = w$  でなければ) 正則な正方行列:

$$U = \begin{pmatrix} u & w & v \\ v & u & w \\ w & v & u \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

の場合ですから特殊なケースです。ノンゼロな非負解があるための条件は、元々は

$$a \in \langle U \rangle$$

ですが、 $u = v = w$  でなければ逆行列を使えば

$$U^{-1}a \geq 0$$

とも書けて、これは

$$\langle {}^t(U^{-1}) \rangle \subset \langle a \rangle^*$$

と云うことです。ということは、Minkowski-Farkas の定理の言っていることと照合すれば

$$\langle {}^t(U^{-1}) \rangle = \langle U \rangle^*$$

と云うことになるでしょうか。事実、

$$\begin{aligned} x \in \langle {}^t(U^{-1}) \rangle &\Leftrightarrow x = {}^t(U^{-1})y \text{ for some } y \geq 0 \\ &\Rightarrow {}^tUx = y \geq 0 \\ &\Rightarrow x \in \langle U \rangle^* \end{aligned}$$

であり、逆に  $x \in \langle U \rangle^*$ 、すなわち  ${}^tUx \geq 0$  と仮定すると、

$$x = ({}^tU)^{-1}({}^tUx) = {}^t(U^{-1})({}^tUx)$$

と書けますから  $x \in \langle {}^t(U^{-1}) \rangle$  が分かります。

また、行列  $U$  は巡回行列なので、 $a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \langle U \rangle = \mathcal{C}_{u,v,w}$  であることは

$$Ux = \begin{pmatrix} ux + wy + vz \\ vx + uy + wz \\ wx + vy + uz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

と書け、これは更に

$$\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uz + wx + vy \\ vz + ux + wy \\ wz + vx + uy \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

を意味しますから  $\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \langle U \rangle$ 、そして全く同様に  $\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in \langle U \rangle$  が分かり、

$$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

として

$$\langle A \rangle \subset \langle U \rangle, \quad \text{すなわち} \quad \mathcal{C}_{a,b,c} \subset \mathcal{C}_{u,v,w}$$

です。これの双対をとれば ( $a = b = c$  でない限り)

$$\langle {}^t(A^{-1}) \rangle = \langle A \rangle^* \supset \langle U \rangle^* = \langle {}^t(U^{-1}) \rangle$$

でもありますか。

$\langle M \rangle$  と  $\langle {}^tM \rangle$  や  $\langle M^{-1} \rangle$  の関係等、気になることは幾つもありますね。

## 16 Weighted AM-GM を 2 変数に適用してみる

$\Gamma_{a,b} \leq \Gamma_{v,w}$  の証明に weighted AM-GM 不等式が適用できるのはどんな場合か見てみましょう。 $0 < a < b, 0 < v < w$  とします。

$$(x^v y^w)^l (x^w y^v)^m = x^{vl+wm} y^{wl+vm}$$

ですから、

$$\begin{cases} vl + wm = a \\ wl + vm = b \end{cases}$$

となる  $l, m \geq 0$  が存在することが条件になります。 $v < w$  からこの係数行列は正則であって、

$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{v^2 - w^2} \begin{pmatrix} v & -w \\ -w & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{w^2 - v^2} \begin{pmatrix} bw - av \\ aw - bv \end{pmatrix}$$

ですから、 $bw - av > 0$  に注意すれば、 $aw - bv \geq 0$  であれば良いことが分かります。

$$bw - av + aw - bv = (a + b)(w - v)$$

ですから、

$$\begin{aligned} (a + b)(w - v)(x^v y^w + x^w y^v) &= \{(bw - av)x^v y^w + (aw - bv)x^w y^v\} \\ &\quad + \{(aw - bv)x^v y^w + (bw - av)x^w y^v\} \\ &\geq (a + b)(w - v)^{(a+b)(w-v)} \sqrt{(x^v y^w)^{bw-av} (x^w y^v)^{aw-bv}} \\ &\quad + (a + b)(w - v)^{(a+b)(w-v)} \sqrt{(x^v y^w)^{aw-bv} (x^w y^v)^{bw-av}} \\ x^v y^w + x^w y^v &\geq^{(a+b)(w-v)} \sqrt{(x^a y^b)^{w^2-v^2}} +^{(a+b)(w-v)} \sqrt{(x^b y^a)^{w^2-v^2}} \\ &= (x^a y^b)^{\frac{v+w}{a+b}} + (x^b y^a)^{\frac{v+w}{a+b}} \end{aligned}$$

が得られます。

$a + b = v + w$  であればこれで終了です。

一方、 $a + b < v + w$  のときは Hölder の不等式から

$$\begin{aligned} x^a y^b + x^b y^a &\leq \left\{ (x^a y^b)^{\frac{v+w}{a+b}} + (x^b y^a)^{\frac{v+w}{a+b}} \right\}^{\frac{a+b}{v+w}} \cdot (1 + 1)^{1 - \frac{a+b}{v+w}} \\ (x^a y^b + x^b y^a)^{v+w} &\leq \left\{ (x^a y^b)^{\frac{v+w}{a+b}} + (x^b y^a)^{\frac{v+w}{a+b}} \right\}^{a+b} \cdot 2^{v+w-(a+b)} \end{aligned}$$

が成り立ちますから、先の不等式と合わせて

$$(x^a y^b + x^b y^a)^{v+w} \leq (x^v y^w + x^w y^v)^{a+b} \cdot 2^{v+w-(a+b)}$$

となり、 $\Gamma_{a,b} \leq \Gamma_{v,w}$  が成り立ちます。

2 変数では  $\Gamma_{a,b} = \Sigma_{a,b}$  でしたから、Generalized Muirhead Means の書式で言えば次の通りになります：

**事実 16.0.1**  $0 < a < b, 0 < v < w$  とします。 $0 \leq aw - bv, a + b \leq v + w$  のとき

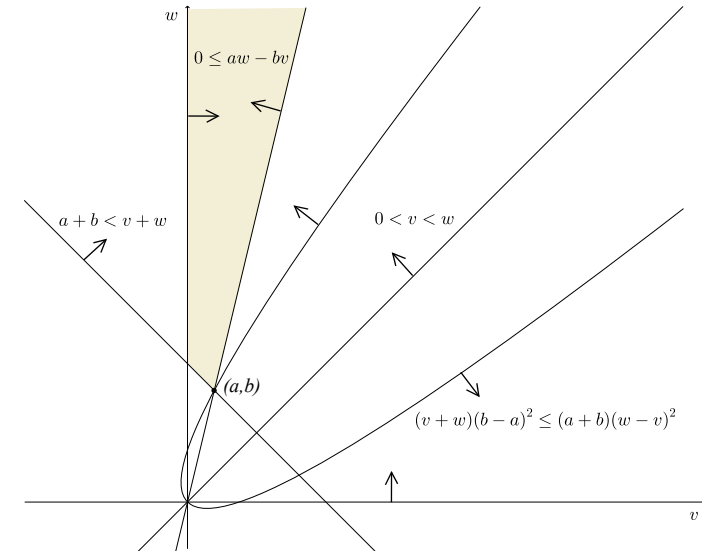
$$\Sigma_{a,b} \leq \Sigma_{v,w}$$

## 16.1 条件について

さて、この条件は既に見た条件に含まれているはずですが、どうでしょうか？ つまり、

$$0 < a < b, 0 < v < w, 0 \leq aw - bv, a + b \leq v + w \Rightarrow (v + w)(b - a)^2 \leq (a + b)(w - v)^2$$

と云うことです。 $0 < a < b$  を固定して 2 次元で領域を図示すると下図の通りであり：



確かに含まれていますね。証明してみましょう。

**問題 16.1.1**  $0 < a < b, 0 < v < w, 0 \leq aw - bv, a + b \leq v + w$  のとき

$$(v + w)(b - a)^2 \leq (a + b)(w - v)^2$$

であることを示して下さい。

$aw - bv \geq 0$  は、変形すると

$$\begin{aligned} a\{(v+w) + (w-v)\} - b\{(v+w) - (w-v)\} &\geq 0 \\ (a-b)(v+w) + (a+b)(w-v) &\geq 0 \\ w-v &\geq \frac{b-a}{a+b}(v+w) \\ (w-v)^2 &\geq \frac{(b-a)^2}{(a+b)^2}(v+w)^2 \end{aligned}$$

となりますが、 $a+b \leq v+w$  から

$$\frac{(b-a)^2}{(a+b)^2}(v+w)^2 - \frac{(b-a)^2}{a+b}(v+w) = \frac{(b-a)^2}{a+b}(v+w) \left\{ \frac{v+w}{a+b} - 1 \right\} \geq 0$$

が得られ、これは

$$\frac{(b-a)^2}{a+b}(v+w) \leq \frac{(b-a)^2}{(a+b)^2}(v+w)^2 \leq (w-v)^2$$

すなわち

$$(b-a)^2(v+w) \leq (a+b)(w-v)^2$$

を意味します。  $\square$

$a+b = v+w$ 、つまり次数の等しい場合には、weighted AM-GM の適用可能な領域と、不等式の成立する領域は一致することが分かりますね。3変数でもそうなのでしょううか？

次数が等しい場合、示すべき式は

$$x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c \leq x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w$$

であり、巡回同次多項式です。おそらく [安藤 12] に記述があるのではないのでしょうか。

## 17 有界条件

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \neq \mathbf{0}$  であって、 $\max\{a, b, c\} = c, \max\{u, v, w\} = w$  であると仮定します（一般性を失わずに可能です）。

$x, y, z > 0$  のとき

$$\begin{aligned} \Gamma_{a,b,c} &\leq \Gamma_{u,v,w} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c}{3} \right)^{\frac{1}{a+b+c}} &\leq \left( \frac{x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w}{3} \right)^{\frac{1}{u+v+w}} \\ \Leftrightarrow (x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c)^{u+v+w} &\leq (x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w)^{a+b+c} 3^{u+v+w-a-b-c} \\ &\leq (x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w)^{a+b+c} 3^{u+v+w-a-b-c} \\ \Leftrightarrow \frac{(x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c)^{u+v+w}}{(x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w)^{a+b+c}} &\leq 3^{u+v+w-a-b-c} \end{aligned}$$

ですから、まずは

$$F(x, y, z) = \frac{(x^a y^b z^c + y^a z^b x^c + z^a x^b y^c)^{u+v+w}}{(x^u y^v z^w + y^u z^v x^w + z^u x^v y^w)^{a+b+c}}$$

として  $F(x, y, z)$  の  $x \rightarrow +0$  での有界性を調べましょう。

【 $a \leq b \leq c, u \leq v \leq w$  の場合】

$$F(x, y, z) = \frac{x^{a(u+v+w)} (y^b z^c + y^a z^b x^{c-a} + z^a x^{b-c} y^c)^{u+v+w}}{x^{u(a+b+c)} (y^v z^w + y^u z^v x^{w-u} + z^u x^{v-u} y^w)^{a+b+c}}$$

ですから、 $a(u+v+w) \geq u(a+b+c)$  でない場合は非有界です。

$a(u+v+w) = u(a+b+c)$  の場合は、 $x \rightarrow +0$  で

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \frac{(y^b z^c + y^a z^b x^{c-a} + z^a x^{b-c} y^c)^{u+v+w}}{(y^v z^w + y^u z^v x^{w-u} + z^u x^{v-u} y^w)^{a+b+c}} \\ &\rightarrow \frac{(y^b z^c + z^a 0^{b-c} y^c)^{u+v+w}}{(y^v z^w + z^u 0^{v-u} y^w)^{a+b+c}} \\ &= \frac{y^{b(u+v+w)} (z^c + z^a 0^{b-c} y^{c-b})^{u+v+w}}{y^{v(a+b+c)} (z^w + z^u 0^{v-u} y^{w-v})^{a+b+c}} \end{aligned}$$

ですから、 $b(u+v+w) = v(a+b+c)$  でない限り ( $y \rightarrow +0$  もしくは  $y \rightarrow +\infty$  で) 右辺を超える値をとり得ます。更に  $b(u+v+w) = v(a+b+c)$  である場合は

$$F(x, y, z) \rightarrow \frac{(z^c + z^a 0^{b-c} y^{c-b})^{u+v+w}}{(z^w + z^u 0^{v-u} y^{w-v})^{a+b+c}}$$

ですから、 $c(u+v+w) = w(a+b+c)$  でない限り ( $z \rightarrow +0$  もしくは  $z \rightarrow +\infty$  で) 右辺を超える値をとり得ます。

$$\begin{cases} a(u+v+w) = u(a+b+c) \\ b(u+v+w) = v(a+b+c) \\ c(u+v+w) = w(a+b+c) \end{cases}$$

のときは、 $a:b:c = u:v:w$  なので、以上から

$$\begin{aligned} a(u+v+w) < u(a+b+c) &\Rightarrow \text{成り立たない} \\ a(u+v+w) = u(a+b+c) &\Rightarrow a:b:c = u:v:w \text{ のとき以外は成り立たない} \\ a(u+v+w) > u(a+b+c) &\Rightarrow \text{成り立つ可能性がある} \end{aligned}$$

です。

次に  $x \rightarrow +\infty$  での有界性ですが、

$$F(x, y, z) = \frac{x^{c(u+v+w)} (x^{a-c} y^b z^c + y^a z^b + z^a x^{b-c} y^c)^{u+v+w}}{x^{w(a+b+c)} (x^{u-w} y^v z^w + y^u z^v + z^u x^{v-w} y^w)^{a+b+c}}$$

ですから、 $c(u+v+w) \leq w(a+b+c)$  でない場合は非有界です。ここで  $c(u+v+w) = w(a+b+c)$  の場合は先と同様に  $a:b:c = u:v:w$  のケースです。

$b \leq a \leq c$  の場合も同様であって、ひとまず有界条件は

$$\begin{aligned} \min\{a, b, c\}(u+v+w) &\geq \min\{u, v, w\}(a+b+c) \\ \max\{a, b, c\}(u+v+w) &\leq \max\{u, v, w\}(a+b+c) \end{aligned}$$

です。

**事実 17.0.1**  $0 \leq a, b, c, u, v, w$ 、 $a+b+c > 0$ 、 $u+v+w > 0$  のとき、

$$\min\{a, b, c\}(u+v+w) < \min\{u, v, w\}(a+b+c)$$

または

$$\max\{a, b, c\}(u+v+w) > \max\{u, v, w\}(a+b+c)$$

であれば

$$\Gamma_{a,b,c} \not\leq \Gamma_{u,v,w}$$

です。

## 参考文献

[Tri06] Tiberiu Trif. Monotonicity, comparison and Minkowski's inequality for generalized Muirhead means in two variables. *Mathematica, Tome 48 (71), N°1*, pp. 99–110, 2006.

[安藤 12] 安藤哲哉. 不等式 21 世紀の代数的不等式論. 数学書房, 東京, 2012.

[高橋 14] 高橋礼司. 線型代数講義 現代数学への誘い. 日本評論社, 東京, 2014.