楕円を斜めに拡大したものも楕円か？

目 次

1 背景あるいは発端

空間内の平面曲線 C の別の平面への（特に直交しない）射影（平行投影）が楕円ならば、C は楕円であると言えるでしょうか？　逆に、楕円の射影は必ず楕円なのでしょうか？

2 次曲線の分類・標準形・判別式等から考えれば結論は出ていますが、特にそれらの知識のない初学者にとってそれは『自明』なこととは思えません。
一般的な証明は荷が重いとしても、比較的簡単な具体例で射影が楕円であることを実際に計算して見せることは出来ないでしょうか。

本稿の主眼は楕円の射影が楕円である簡単に計算可能な具体例を得ることにあります。更に双曲線・放物線についても考えましょう。

1.1 射影の性質

平面図形を斜交する他の平面に平行射影することは、２平面の交線である直線に垂直な方向に関する拡大・縮小です。従って楕円の射影は、楕円をある（軸とは平行でない）方向に拡大・縮小したものになります。一般に軸方向でない方向での拡大・縮小は記述が面倒（と思われる）なので、一旦楕円を回転してから軸方向に拡大・縮小したものが楕円であるかどうか考えれば良いでしょう。

2 具体例

2.1 問題

まずは（問題の出所は置いておいて）次の簡単な問題を計算してみましょう：

問題 2.1 (1) 楕円 E_1 : $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものを、x 軸方向に $\sqrt{6}$ 倍した曲線 C_1 の方程式を求めてください。

(2) 楕円 E_2 : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$ を原点中心に

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{2}{29}},\quad \cos\theta=\sqrt{\frac{27}{29}}$$

を満たす角度 θ だけ回転して得られる楕円 C_2 の方程式を求めてください。

2.1.1 回転による曲線の方程式

問題に手をつける前に、回転変換が方程式をどのように変えたかを確認しておきます：

事実 2.2 方程式：$f(x,y)=0$ の表す曲線 C を原点中心に角度 θ だけ（反時計回りに）回転した曲線 C_1 は、方程式：$f(x\cos\theta+y\sin\theta, y\cos\theta-x\sin\theta)=0$ で表されます。

【確認】曲線 C_1 上に点 $(x,y)=(r\cos\phi, r\sin\phi)$ があるための条件は、この点を $-\theta$ だけ回転移動した点 (X,Y)：

$$\begin{aligned}(X,Y)&=(r\cos(\phi-\theta), r\sin(\phi-\theta))\\&=(r\cos\phi\cos\theta+r\sin\phi\sin\theta, r\sin\phi\cos\theta-r\cos\phi\sin\theta)\\&=(x\cos\theta+y\sin\theta, y\cos\theta-x\sin\theta)\end{aligned}$$

が曲線 C 上にあることであり、C_1 は

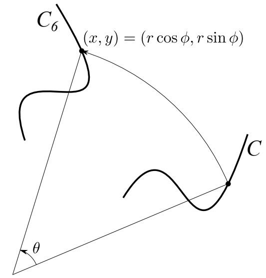
$$f(x\cos\theta+y\sin\theta, y\cos\theta-x\sin\theta)=0$$

で表されます。

あるいは行列による回転変換の知識があれば、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x\cos\theta+y\sin\theta\\-x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から求めることも出来るでしょう。



□

2.1.2 問題の解答

【問題 2.1 の解答】(1) まず楕円 E_1 を $\frac{\pi}{4}$ 回転すると

$$\begin{aligned}1&=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{4}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2\\8&=(x+y)^2+4(x-y)^2\end{aligned}$$

であり（これは楕円のはずです）、更に x 軸方向に $\sqrt{6}$ 倍すると（その結果がどんな曲線になるか、楕円のままなのかは不明です）、

$$\begin{aligned} 8 &= \left(\frac{x}{\sqrt{6}}+y\right)^2+4\left(\frac{x}{\sqrt{6}}-y\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{6}+y^2+\frac{2}{\sqrt{6}}xy+\frac{4}{6}x^2+4y^2-\frac{8}{\sqrt{6}}xy \\ 48 &= 5x^2+30y^2-6\sqrt{6}xy \end{aligned}$$

となります。これが曲線 C_1 の方程式です。

(2) 楕円 E_2 を問題の角度 θ だけ回転すると

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\left(\sqrt{\frac{27}{29}}x+\sqrt{\frac{2}{29}}y\right)^2}{16}+\frac{\left(-\sqrt{\frac{2}{29}}x+\sqrt{\frac{27}{29}}y\right)^2}{\frac{3}{2}} \\ 48 &= 3\left(\sqrt{\frac{27}{29}}x+\sqrt{\frac{2}{29}}y\right)^2+32\left(\sqrt{\frac{2}{29}}x-\sqrt{\frac{27}{29}}y\right)^2 \\ &= \frac{3\cdot27+32\cdot2}{29}x^2+\frac{3\cdot2+32\cdot27}{29}y^2-29\cdot2\sqrt{\frac{27}{29}}\sqrt{\frac{2}{29}}xy \\ &= \frac{145}{29}x^2+\frac{870}{29}y^2-6\sqrt{6}xy \\ &= 5x^2+30y^2-6\sqrt{6}xy \end{aligned}$$

となってこれが楕円 C_2 の方程式です。これは C_1 に一致していますから、楕円を斜めに拡大したものもやはり楕円であったことが分かりました。 □

2.1.3　固有値の計算

曲線 C_1 は

$$C_1: \quad \frac{5}{48}x^2-\frac{6\sqrt{6}}{48}xy+\frac{30}{48}y^2=1$$

であって、これを

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{48} & -\frac{3\sqrt{6}}{48} \\ -\frac{3\sqrt{6}}{48} & \frac{30}{48} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

と書いて、この表現行列の固有値を計算して見ると、

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \frac{5}{48}-t & -\frac{3\sqrt{6}}{48} \\ -\frac{3\sqrt{6}}{48} & \frac{30}{48}-t \end{vmatrix} \\ &= \left(t-\frac{5}{48}\right)\left(t-\frac{30}{48}\right)-\frac{54}{48^2} \\ &= t^2-\frac{35}{48}t+\frac{150}{48^2}-\frac{54}{48^2} \\ &= \left(t-\frac{35}{96}\right)^2-\frac{841}{96^2} \\ &= \left(t-\frac{35}{96}+\frac{29}{96}\right)\left(t-\frac{35}{96}-\frac{29}{96}\right) \\ &= \left(t-\frac{1}{16}\right)\left(t-\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

となっており、係数の $\frac{1}{16}, \frac{2}{3}$ が出てきます。固有ヴェクターを計算すれば $\sqrt{\frac{2}{29}}$ 等も出てくることでしょう。

3　楕円の一般論

楕円 E：

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0)$$

を斜めに拡大するために、回転させてから x 軸方向に拡大します。

まず角度 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものは（楕円）

$$E_1: \quad \frac{(\cos\theta x+\sin\theta y)^2}{a^2}+\frac{(-\sin\theta x+\cos\theta y)^2}{b^2}=1$$

であり、これを更に x 軸方向に $A>0$ 倍すると曲線 C_2：

$$C_2: \quad \frac{\left(\cos\theta\frac{x}{A}+\sin\theta y\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\sin\theta\frac{x}{A}+\cos\theta y\right)^2}{b^2}=1$$

が得られます。

これが楕円であることは、２次形式の判別式を使えば簡単に示せるのですが、それを使わない場合に楕円（を回転したもの）の形に直接変形できないでしょうか。

つまり、曲線 C_2 が、次の曲線 C_3：

$$C_3 : \quad \frac{(\cos\xi x + \sin\xi y)^2}{c^2} + \frac{(-\sin\xi x + \cos\xi y)^2}{d^2} = 1$$

に一致するように定数 $c > d > 0$ 及び角度 $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ を決めようということです。

3.1 特殊な場合に考えてみる

当たりをつけるために、$\theta = \frac{\pi}{4}, a = 2, b = 1$ の場合に考えてみましょう。この場合 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{A} + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{4} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{A} + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 \\ 8A^2 &= (x + Ay)^2 + 4(x - Ay)^2 \\ &= 5x^2 + 5A^2y^2 - 6Axy \end{aligned}$$

であり、C_3 の方程式は整理すると

$$\begin{aligned} c^2d^2 &= d^2(\cos\xi x + \sin\xi y)^2 + c^2(-\sin\xi x + \cos\xi y)^2 \\ &= (c^2\sin^2\xi + d^2\cos^2\xi)x^2 + (c^2\cos^2\xi + d^2\sin^2\xi)y^2 - 2(c^2 - d^2)\sin\xi\cos\xi xy \end{aligned}$$

ですから、比較しやすくすると

$$\begin{aligned} C_2 &: \quad 5c^2d^2x^2 + 5A^2c^2d^2y^2 - 6Ac^2d^2xy = 8c^2d^2A^2 \\ C_3 &: \quad 8A^2(c^2\sin^2\xi + d^2\cos^2\xi)x^2 + 8A^2(c^2\cos^2\xi + d^2\sin^2\xi)y^2 \\ &\qquad\qquad - 16A^2(c^2 - d^2)\sin\xi\cos\xi xy = 8c^2d^2A^2 \end{aligned}$$

です。これらが一致すると仮定すれば、連立方程式：

$$\begin{cases} 8A^2(c^2\sin^2\xi + d^2\cos^2\xi) = 5c^2d^2 \\ 8A^2(c^2\cos^2\xi + d^2\sin^2\xi) = 5A^2c^2d^2 \\ 8A^2(c^2 - d^2)\sin\xi\cos\xi = 3Ac^2d^2 \end{cases}$$

が得られますのでこれを解いていきましょう。

$\cos\xi$ は $\sin\xi$ に直して整理すれば

$$\begin{cases} 8A^2\left\{(c^2 - d^2)\sin^2\xi + d^2\right\} = 5c^2d^2 \\ 8\left\{(d^2 - c^2)\sin^2\xi + c^2\right\} = 5c^2d^2 \\ 64A^2(c^2 - d^2)^2\sin^2\xi(1 - \sin^2\xi) = 9c^4d^4 \end{cases}$$

です（ただし、第３式の両辺を自乗しましたから同値性は破れています。$c > d$ であること、そして $A > 0$ であることを追加すれば同値性は保たれます）。

第２式から

$$8(c^2 - d^2)\sin^2\xi = 8c^2 - 5c^2d^2$$

ですから、第１式に代入して

$$5c^2d^2 = A^2\{8(c^2 - d^2)\sin^2\xi + 8d^2\} = A^2\{8c^2 + 8d^2 - 5c^2d^2\}$$

であり、第３式に代入すれば

$$\begin{aligned} 9c^4d^4 &= A^2 8(c^2 - d^2)\sin^2\xi\{8(c^2 - d^2) - 8(c^2 - d^2)\sin^2\xi\} \\ &= A^2(8c^2 - 5c^2d^2)(5c^2d^2 - 8d^2) \\ 9c^2d^2 &= A^2(8 - 5d^2)(5c^2 - 8) \end{aligned}$$

が得られますから

$$\begin{aligned} 5A^2(8 - 5d^2)(5c^2 - 8) &= 9A^2\{8c^2 + 8d^2 - 5c^2d^2\} \\ 5(40c^2 - 64 - 25c^2d^2 + 40d^2) &= 9(8c^2 + 8d^2 - 5c^2d^2) \\ 128c^2 + 128d^2 - 80c^2d^2 - 320 &= 0 \\ 8c^2 + 8d^2 - 5c^2d^2 - 20 &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

が成り立つことが分かります。

一方、第１式と第２式の A^2 倍を辺々足せば

$$\begin{aligned} 8A^2(c^2 + d^2) &= 5c^2d^2(1 + A^2) \\ A^2(8c^2 + 8d^2 - 5c^2d^2) &= 5c^2d^2 \end{aligned}$$

となりますが、(3.1) によれば

$$20A^2 = 5c^2d^2, \quad \text{すなわち} \quad 4A^2 = c^2d^2$$

となり、またこれを (3.1) に戻せば

$$\begin{aligned} 8(c^2 + d^2) &= 20(1 + A^2) \\ c^2 + d^2 &= \frac{5}{2}(1 + A^2) \end{aligned}$$

であることも分かります：

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = \frac{5}{2}(A^2 + 1) \\ c^2d^2 = 4A^2 \end{cases} .$$

従って 2 次方程式：

$$X^2-\frac{5}{2}(A^2+1)X+4A^2=0$$

の２解が $c^2>d^2$ であることが分かります。これを解けば

$$X=\frac{5}{4}(A^2+1)\pm\frac{\sqrt{25A^4-14A^2+25}}{4}$$

です。

$A=0$ のときは $X=\frac{5}{2},0$ であり、$A=1$ のときは $X=4,1$ となります。これらは『自明な場合』ですので、さて、非自明な場合で、なおかつ c^2,d^2 が『簡単な数』になるような場合はないでしょうか。もちろん A を正の整数で考えて $25A^4-14A^2+25$ が平方数になれば御の字ですが、譲って A^2 が整数でも良いんですが・・・

3.2 派生した整数論の問題

研究課題 1 (1) $25n^4-14n^2+25$ が平方数になるような正の整数 n を求めてください。

(2) $25n^2-14n+25$ が平方数になるような正の整数 n を求めてください。

(1)

$$(5n^2-2)^2=25n^4-20n^2+4=25n^4-14n^2+25-(6n^2+21)$$

によれば

$$(5n^2-2)^2<25n^4-14n^2+25$$

であり、また明らかに $n>1$ であれば

$$25n^4-14n^2+25<25n^4=(5n^2)^2$$

であって、合わせて

$$(5n^2-2)^2<25n^4-14n^2+25<(5n^2)^2\quad(n>1)$$

が得られますが、

$$(5n^2-1)^2=25n^4-10n^2+1=(25n^4-14n^2+25)+(4n^2-24)$$

ですので、$25n^4-14n^2+25$ は n が 1 より大きな整数の場合平方数ではないことが分かります。従って、平方数になるのは $n=1$ のときのみです。

(2) 同様に

$$(5n)^2=25n^2=25n^2-14n+25+14n-25$$
$$(5n-2)^2=25n^2-20n+4=25n^2-14n+25-(6n+21)$$

ですから $n>1$ であれば

$$(5n-2)^2<25n^2-14n+25<(5n)^2$$

です。ここで

$$(5n-1)^2=25n^2-10n+1=25n^2-14n+25+4n-24$$

となっているため、$n=6$ であれば $25n^2-14n+25$ は平方数です：

$$25\cdot 6^2-14\cdot 6+25=841=29^2$$

$n>6$ であれば

$$(5n-2)^2<25n^2-14n+25<(5n-1)^2$$

です。

以上から、平方数となるのは $n=1,6$ のみです。 □

さて、このように $A=\sqrt{6}$ であれば割合簡単な数になることが分かりました。実際このとき 2 次方程式の２解は

$$X=\frac{5}{4}(A^2+1)\pm\frac{\sqrt{25A^4-14A^2+25}}{4}=\frac{1}{4}(35\pm 29)=16,\frac{3}{2}$$

となって、

$$c^2=16,\quad d^2=\frac{3}{2}$$

であることが分かります。

これを連立方程式に代入すれば

$$\begin{cases}32\sin^2\xi+3\cos^2\xi=5\\32\cos^2\xi+3\sin^2\xi=30\\29\sin\xi\cos\xi=3\sqrt{6}\end{cases}$$

となって、

$$\sin\xi = \sqrt{\frac{2}{29}}, \quad \cos\xi = \sqrt{\frac{27}{29}}$$

が得られるわけです（こうやって研究課題 1 が産み出されたわけです）。

次のようななかなか面白い関係式が成り立っていることに注意しておきましょう：

$$\begin{aligned} 25N^4 - 14N^2 + 25 &= \frac{1}{2}\left\{(7N^2-1)^2 + (N^2-7)^2\right\} \\ &= (5N^2-5)^2 + (6N)^2 \\ &= (5N^2+5)^2 - (8N)^2 \end{aligned}$$

3.3　一般論へ戻る

3.3.1　定式化

研究課題 2 $a > b > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ が与えられたときに、楕円 E：

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

を角度 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だけ回転させてから更に x 軸方向に $A > 0$ 倍した曲線 C_2：

$$C_2: \quad \frac{\left(\cos\theta\dfrac{x}{A} + \sin\theta y\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\sin\theta\dfrac{x}{A} + \cos\theta y\right)^2}{b^2} = 1$$

が、角度 $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ だけ回転させた楕円（$0 < d < c$）：

$$C_3: \quad \frac{(\cos\xi x + \sin\xi y)^2}{c^2} + \frac{(-\sin\xi x + \cos\xi y)^2}{d^2} = 1$$

と一致するように c, d, ξ を定めることは常に出来るのだろうか？

3.3.2　計算

曲線 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} b^2(\cos\theta x + A\sin\theta y)^2 + a^2(\sin\theta x - A\cos\theta y)^2 &= a^2b^2A^2 \\ (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)x^2 + A^2(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)y^2 & \\ -2A(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta xy &= a^2b^2A^2 \end{aligned}$$

であり、C_3 は

$$\begin{aligned} d^2(\cos\xi x + \sin\xi y)^2 + c^2(\sin\xi x - \cos\xi y)^2 &= c^2d^2 \\ (c^2\sin^2\xi + d^2\cos^2\xi)x^2 + (d^2\sin^2\xi + c^2\cos^2\xi)y^2 & \\ -2(c^2-d^2)\sin\xi\cos\xi xy &= c^2d^2 \end{aligned}$$

となりますから、これらが一致するための条件は連立方程式：

$$\begin{cases} c^2d^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) = a^2b^2A^2(c^2\sin^2\xi + d^2\cos^2\xi) \\ c^2d^2(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta) = a^2b^2(d^2\sin^2\xi + c^2\cos^2\xi) \\ c^2d^2(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta = a^2b^2A(c^2-d^2)\sin\xi\cos\xi \end{cases}$$

が成り立つことになります。これを解いて c^2, d^2, ξ を求めてみましょう。

まず $\cos\xi$ は $\sin\xi$ で表すことにして

$$\begin{cases} (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)c^2d^2 = a^2b^2A^2\left\{(c^2-d^2)\sin^2\xi + d^2\right\} & (3.2) \\ (b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)c^2d^2 = a^2b^2\left\{(d^2-c^2)\sin^2\xi + c^2\right\} & (3.3) \\ (a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta \cdot c^4d^4 = a^4b^4A^2(c^2-d^2)^2\sin^2\xi(1-\sin^2\xi) & (3.4) \end{cases}$$

としたうえで（やはりここでも第３式を両辺自乗していますので、最初の条件との同値性は崩れています。$a > b, c > d, A > 0$ としておけば良いでしょう）、(3.3) から

$$a^2b^2(c^2-d^2)\sin^2\xi = a^2b^2\cdot c^2 - (b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)c^2d^2$$

ですのでこれを (3.2) に代入して

$$(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)c^2d^2 = A^2\left\{a^2b^2\cdot c^2 - (b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)c^2d^2 + a^2b^2\cdot d^2\right\}$$

が得られ、(3.4) に代入して

$$
\begin{aligned}
&(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot c^4d^4\\
&=A^2\left\{a^2b^2\cdot c^2-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\right\}\\
&\qquad\Big(a^2b^2(c^2-d^2)-\left\{a^2b^2\cdot c^2-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\right\}\Big)\\
&=A^2\left\{a^2b^2\cdot c^2-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\right\}\\
&\qquad\qquad\left\{-a^2b^2\cdot d^2+(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\right\}\\
&(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot c^2d^2\\
&=A^2\left\{a^2b^2-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)d^2\right\}\\
&\qquad\qquad\left\{-a^2b^2+(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2\right\}\\
&=A^2\left\{-a^4b^4+a^2b^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)(c^2+d^2)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)^2c^2d^2\right\}
\end{aligned}
$$

ですから、これらから A を消去すれば

$$
\begin{aligned}
&(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\left\{a^2b^2(c^2+d^2)-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\right\}\\
&=(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\\
&\qquad\left\{-a^4b^4+a^2b^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)(c^2+d^2)-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)^2c^2d^2\right\}\\
&a^2b^2(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta(c^2+d^2)-(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\\
&=a^2b^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)(c^2+d^2)\\
&\qquad-(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)^2c^2d^2\\
&\qquad\qquad-a^4b^4(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\\
&=a^2b^2\left\{a^2b^2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+(a^4+b^4)\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}(c^2+d^2)\\
&\qquad-\left\{a^2b^2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+(a^4+b^4)\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\\
&\qquad\qquad-a^4b^4(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)\\
&-2a^4b^4\sin^2\theta\cos^2\theta(c^2+d^2)\\
&\qquad+2a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\\
&=a^4b^4(\sin^4\theta+\cos^4\theta)(c^2+d^2)\\
&\qquad-a^2b^2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\\
&\qquad\qquad-a^4b^4(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)
\end{aligned}
$$

ですから整理して

$$
\begin{aligned}
a^4b^4(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)&=a^4b^4(c^2+d^2)-a^2b^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\\
a^2b^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)&=a^2b^2(c^2+d^2)-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2 \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

を得ます。

また (3.2) と (3.3) の A^2 倍を辺々足せば

$$
\begin{aligned}
\left\{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+A^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)\right\}c^2d^2&=a^2b^2A^2(c^2+d^2)\\
A^2\left\{a^2b^2(c^2+d^2)-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)c^2d^2\right\}&=(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)c^2d^2
\end{aligned}
$$

でもあるので、(3.5) を代入して

$$a^2b^2A^2=c^2d^2 \tag{3.6}$$

が得られます。これを (3.5) に戻せば

$$
\begin{aligned}
a^2b^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)&=a^2b^2(c^2+d^2)-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)a^2b^2A^2\\
(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+A^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)&=c^2+d^2 \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

もわかるので、c^2, d^2 は 2 次方程式：

$$X^2-\left\{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+A^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)\right\}X+a^2b^2A^2=0$$

の 2 解であることが分かります。

この 2 次方程式の判別式 D は

$$D=\left\{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+A^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)\right\}^2-4a^2b^2A^2$$

ですが、これが正であることは

$$
\begin{aligned}
(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+A^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)&>2abA\\
(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)A^2-2abA+(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)&>0
\end{aligned}
$$

と同値であり、これは

$$a^2b^2-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)<0 \tag{3.8}$$

が成り立っていれば十分です（任意の A で考えるなら同値）。しかし、

$$\begin{aligned}&(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)-a^2b^2\\&=\{(b^2-a^2)\sin^2\theta+a^2\}\{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2\}-a^2b^2\\&=\{a^2(a^2-b^2)-b^2(a^2-b^2)\}\sin^2\theta-(a^2-b^2)^2\sin^4\theta\\&=(a^2-b^2)^2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)\\&>0\end{aligned}$$

によれば (3.8) は成り立っていますから（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）、判別式 D は正であって、異なる２つの実数解を持つことが分かります。解の和・積ともに正ですから、この２つの解はともに正であることも分かります。

(3.6) によれば C_2 と C_3 が一致するための条件は連立方程式は：

$$\begin{cases}a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta=c^2\sin^2\xi+d^2\cos^2\xi\\A^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)=d^2\sin^2\xi+c^2\cos^2\xi\\A(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta=(c^2-d^2)\sin\xi\cos\xi\end{cases}$$

となって、これによって角度 ξ も決定することが出来ます。

以上のように、C_2 と C_3 が一致するような $c>d>0, 0<\xi<\frac{\pi}{2}$ は必ず存在することが分かります。 □

3.3.3　改良

どうも計算の仕方が良くなかったですね。敗因は何でしょう？　既知のものと未知のものの区別がはっきりされていないところでしょうか。A を消去したことが良くなかったんでしょうね、きっと。

気を取り直して計算し直してみましょう。C_2, C_3 が一致する条件式は

$$\begin{cases}c^2d^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)=a^2b^2A^2(c^2\sin^2\xi+d^2\cos^2\xi)\\c^2d^2(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)=a^2b^2(d^2\sin^2\xi+c^2\cos^2\xi)\\c^2d^2(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta=a^2b^2A(c^2-d^2)\sin\xi\cos\xi\end{cases}$$

でしたが、両辺に a^2b^2, c^2d^2 を掛ける前の元の係数で比較すれば（第３式は両辺自乗）

$$\begin{cases}\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{b^2}\sin^2\theta+\frac{1}{a^2}\cos^2\theta\right)=\frac{1}{d^2}\sin^2\xi+\frac{1}{c^2}\cos^2\xi\\\frac{1}{a^2}\sin^2\theta+\frac{1}{b^2}\cos^2\theta=\frac{1}{c^2}\sin^2\xi+\frac{1}{d^2}\cos^2\xi\\\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2\sin^2\theta\cos^2\theta=\left(\frac{1}{d^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2\sin^2\xi\cos^2\xi\end{cases}$$

ですので、この形で解いていきましょう。ここでも第３式を両辺自乗しましたから、同値性を保つために追加条件として（最初から想定していた）

$$a>b,\quad c>d,\quad A>0$$

を明記することが必要になります。$\cos\xi$ は $\sin\xi$ に直して、更に

$$\sin^2\xi=s,\quad \frac{1}{c^2}=C,\quad \frac{1}{d^2}=D$$

とし、左辺は順に L, M, N^2 とすれば

$$\begin{cases}L=(D-C)s+C & (3.9)\\M=(C-D)s+D & (3.10)\\N^2=(D-C)^2s(1-s) & (3.11)\end{cases}$$

と書き表されます。

(3.9),(3.10) から $C+D=L+M, (D-C)s=L-C=D-M$ ですから、(3.11) から

$$\begin{aligned}N^2&=(D-C)s\{D-C-(D-C)s\}\\&=(L-C)(D-C-L+C)\\&=(L-C)(D-L)\\&=(L-C)(M-C)\\&=(D-M)(D-L)\end{aligned}$$

が得られ、2 次方程式

$$(X-L)(X-M)=N^2,\quad \text{すなわち}\quad X^2-(L+M)X+LM-N^2=0$$

の２解が C, D であることが分かり、

$$\frac{L+M\pm\sqrt{(L+M)^2-4LM+4N^2}}{2}=\frac{L+M\pm\sqrt{(L-M)^2+4N^2}}{2}$$

が $C<D$ であることが分かります。これで c, d が求まり、これを使って s すなわち $\sin^2\xi$ も分かる事になります。

3.3.4 平方数問題

簡単な例を得ることが本稿の主目的ですから、当然 C, D は『簡単な』値になってもらわなければなりません。

見ると平方根がありますから、その中身が平方数であるような場合を考えてみたくなるわけです。

> **研究課題 3** $(L-M)^2+4N^2$ が平方数になる場合を見つけよう。

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{b^2}\sin^2\theta+\frac{1}{a^2}\cos^2\theta\right)\\
M &= \frac{1}{a^2}\sin^2\theta+\frac{1}{b^2}\cos^2\theta\\
N^2 &= \frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2\sin^2\theta\cos^2\theta
\end{aligned}$$

でしたから、

$$\begin{aligned}
L-M &= \left(\frac{1}{A^2b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin^2\theta+\left(\frac{1}{A^2a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos^2\theta\\
&= \frac{1}{A^2a^2b^2}\left\{(a^2-A^2b^2)\sin^2\theta+(b^2-A^2a^2)\cos^2\theta\right\}\\
(L-M)^2 &= \frac{1}{A^4a^4b^4}\left\{(a^2-A^2b^2)\sin^2\theta+(b^2-A^2a^2)\cos^2\theta\right\}^2\\
A^4a^4b^4(L-M)^2 &= (a^2-A^2b^2)^2\sin^4\theta\\
&\qquad +2(a^2-A^2b^2)(b^2-A^2a^2)\sin^2\theta\cos^2\theta+(b^2-A^2a^2)^2\cos^4\theta\\
A^4a^4b^44N^2 &= 4A^2(a^2-b^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta
\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
&A^4a^4b^4\left\{(L-M)^2+4N^2\right\}\\
&=(a^2-A^2b^2)^2\sin^4\theta\\
&\qquad +2\{a^2b^2A^4+(a^4+b^4-4a^2b^2)A^2+a^2b^2\}\sin^2\theta\cos^2\theta+(b^2-A^2a^2)^2\cos^4\theta
\end{aligned}$$

です。一般には難しいので、まず θ を決めてみましょう。とりあえず簡単なのは $\theta=\frac{\pi}{4}$ でしょう。

$$\begin{aligned}
&4A^4a^4b^4\left\{(L-M)^2+4N^2\right\}\\
&=(a^2-A^2b^2)^2+2\left\{a^2b^2A^4+(a^4+b^4-4a^2b^2)A^2+a^2b^2\right\}+(b^2-A^2a^2)^2\\
&=(a^2+b^2)^2A^4+2(a^4+b^4-6a^2b^2)A^2+(a^2+b^2)^2\\
&=(a^2+b^2)^2\left\{A^4+2\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}A^2+1\right\}
\end{aligned}$$

となるので結局は

$$A^4+2\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}A^2+1$$

が平方数になれば良いということです。

ちなみに $a=2, b=1$ のときは，既に見たように

$$A^4-\frac{14}{25}A^2+1$$

が平方数となる問題が出てきます。

$$2\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}=2\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4+1-6\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right\}^2}$$

に注意すれば $\frac{a^2}{b^2}=J$ として

$$A^4-\frac{2(J^2-6J+1)}{(J+1)^2}A^2+1$$

とも書けるでしょう。

しかしこの方法では A は簡単になっても、そのあと導かれる c, d, ξ は複雑になる恐れがありますので、先に角度 ξ だけ（有名角に）決めてしまって、それに従って A, c, d を決める問題を考えた方が、結果的にはより簡単な例を作れるのではないでしょうか。

3.4 仕切り直し：有名角の例を作る

ちょっと収拾がつかなくなったので、整理して再出発します。

研究課題 4 $\theta = \frac{\pi}{3}$ に固定し、$\xi = \frac{\pi}{4}$ ないし $\xi = \frac{\pi}{6}$ となる例を探してみましょう。

つまり、楕円 E_1：
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$
を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、更に x 軸方向に A 倍した曲線 C_2：
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{x}{A} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{A} + \frac{1}{2}y\right)^2}{b^2} = 1$$
と、楕円 E_3：
$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1 \quad (c > d > 0)$$
を $\xi = \frac{\pi}{4}$ もしくは $\xi = \frac{\pi}{6}$ 回転した楕円 E_4：
$$\frac{(\cos\xi x + \sin\xi y)^2}{c^2} + \frac{(-\sin\xi x + \cos\xi y)^2}{d^2} = 1$$
が一致するように a, b, c, d, A を定めてみましょう。

まず C_2 の式を整理すると
$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\left(\frac{x}{A} + \sqrt{3}y\right)^2}{4a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}x}{A} - y\right)^2}{4b^2} \\
&= \frac{1}{4a^2}\left(\frac{1}{A^2}x^2 + 3y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{A}xy\right) + \frac{1}{4b^2}\left(\frac{3}{A^2}x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{A}xy\right) \\
&= \frac{1}{4A^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right)x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2A}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)xy
\end{aligned}$$
であり、E_4 の式を整理すると
$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{c^2}\left(\cos^2\xi x^2 + \sin^2\xi y^2 + 2\sin\xi\cos\xi xy\right) \\
&\quad + \frac{1}{d^2}\left(\sin^2\xi x^2 + \cos^2\xi y^2 - 2\sin\xi\cos\xi xy\right) \\
&= \left(\frac{\cos^2\xi}{c^2} + \frac{\sin^2\xi}{d^2}\right)x^2 + \left(\frac{\sin^2\xi}{c^2} + \frac{\cos^2\xi}{d^2}\right)y^2 + 2\sin\xi\cos\xi\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right)xy
\end{aligned}$$
ですから、これらが一致する条件は
$$\begin{cases}
\frac{1}{4A^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right) = \frac{\cos^2\xi}{c^2} + \frac{\sin^2\xi}{d^2} \\
\frac{1}{4}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{\sin^2\xi}{c^2} + \frac{\cos^2\xi}{d^2} \\
\frac{\sqrt{3}}{2A}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 2\sin\xi\cos\xi\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right)
\end{cases}$$
となります。

3.4.1　$\xi = \frac{\pi}{6}$ の場合

この場合一致する条件式は
$$\begin{cases}
\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right) = \frac{3}{c^2} + \frac{1}{d^2} \\
\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{3}{d^2} \\
\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}
\end{cases}$$
となります。第３式から（$c > d > 0, a > b > 0$ に注意すれば）$A > 0$ でなければならないことが分かります。

最初の２式から（右辺をそれぞれ V, W として）
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{d^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right) \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{d^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3V - W \\ 3W - V \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
が得られ、従って
$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} = \frac{1}{2}(V - W)$$

となるので、これと第３式から

$$\begin{aligned}\frac{2}{A}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)&=V-W\\&=\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}\right)-\frac{3}{a^2}-\frac{1}{b^2}\\2A(b^2-a^2)&=b^2+3a^2-A^2(3b^2+a^2)\end{aligned}$$

従って

$$(a^2+3b^2)A^2-2(a^2-b^2)A-(3a^2+b^2)=0$$

が得られます。注意してみればこの２次方程式の１つの解は $A=-1$ であり、因数分解すれば

$$\{(a^2+3b^2)A-(3a^2+b^2)\}\{A+1\}=0$$

ですから

$$A=\frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$$

が分かります。これを第３式に戻して第２式と連立すれば

$$\begin{cases}\dfrac{3b^2+a^2}{a^2b^2}=\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{3}{d^2}\\[2ex]\dfrac{a^2+3b^2}{3a^2+b^2}\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{d^2}\end{cases}$$

ですからこれを解いて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\\frac{1}{d^2}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{3b^2+a^2}{a^2b^2}\\\frac{a^2+3b^2}{3a^2+b^2}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\end{pmatrix}\\&=\frac{a^2+3b^2}{4a^2b^2}\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\frac{b^2-a^2}{3a^2+b^2}\end{pmatrix}\\&=\frac{a^2+3b^2}{4a^2b^2}\begin{pmatrix}1+\frac{3(b^2-a^2)}{3a^2+b^2}\\1-\frac{b^2-a^2}{3a^2+b^2}\end{pmatrix}\\&=\frac{a^2+3b^2}{3a^2+b^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2}\\\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{A}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2}\\\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

すなわち、$c^2=Aa^2$, $d^2=Ab^2$ が分かります。

ちなみに、$A=-1$ に対応した a,b,c,d は $a=d, b=c$ であって、$a>b, c>d$ の大小関係を満たしません。y 軸に関する折り返しということになっているようです。

事実 3.1 楕円：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$$

を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $\frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}$ 倍した曲線と、楕円：

$$\frac{x^2}{\frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}a^2}+\frac{y^2}{\frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}b^2}=1$$

を $\frac{\pi}{6}$ 回転した楕円は一致します。

特に $(a,b)=(3,1)$ のとき、

$$\frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}=\frac{28}{12}=\frac{7}{3}$$

ですから次の例があります：

事実 3.2 楕円：

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1$$

を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $\frac{7}{3}$ 倍した曲線と、楕円：

$$\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{\frac{7}{3}}=1$$

を $\frac{\pi}{6}$ 回転した楕円は一致します。

斜めに拡大しているにも関わらず離心率が変化していないのは驚きです。何か事情が隠されているような気もします。

3.4.2 $\xi = \frac{\pi}{4}$ の場合

一致する条件は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2A^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{b^2}\right) = \dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right) = \dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2A}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right) = \dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{d^2} \end{cases}$$

ですから、第１・２式から

$$A^2 = \frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2} \quad \text{すなわち、} \quad A = \sqrt{\frac{3a^2+b^2}{a^2+3b^2}}$$

であって、c, d も a, b によって決定されていきますが、この A の平方根がネックで思ったより複雑な形になりそうです。ただ、a, b 自体が整数である必要はないので、根号を外してしまいましょう。

例えば $a^2 = \frac{39}{8}, b^2 = \frac{11}{8}$ のとき、

$$3a^2+b^2 = 16, \quad a^2+3b^2 = 9, \quad \text{すなわち} \quad A = \frac{4}{3}$$

などでしょうか。うーん、微妙だわ。

ただ、それ以上に第３式の $\sqrt{3}$ が気になるんですよね。でも $A = \sqrt{3}$ とすることは出来ないし（$b = 0$）、A には大きさ制限があるから（$1 < A^2 < \frac{10}{3}$）$A = 2\sqrt{3}$ も大き過ぎます。じゃあ $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ でもやってみますか？　この場合 $a^2 = 9, b^2 = 5$ なら良い感じですね。

$$A^2 = \frac{3\cdot 9+5}{9+3\cdot 5} = \frac{4}{3}$$

このとき c^2, d^2 を求めてみると、

$$\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$$
$$\frac{1}{d^2}-\frac{1}{c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{45} = \frac{1}{15}$$

から、$c^2 = 10, d^2 = 6$ が分かります。

事実 3.3 楕円：
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1$$
を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍した曲線と、楕円：
$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6} = 1$$
を $\frac{\pi}{4}$ 回転した楕円は一致します。

なかなか良い例が得られました。

3.4.3 $\xi = \frac{\pi}{6}$ の場合　再考

いや、ってことはさっきの $\frac{\pi}{6}$ の場合でも、元の楕円を $a^2 = 9, b^2 = 5$ でやって行けるんじゃないでしょうか？

事実 3.4 楕円：
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1$$
を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍した曲線と、楕円：
$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{20}{3}} = 1$$
を $\frac{\pi}{6}$ 回転した楕円は一致します。

さっきの例と比べて遜色ない上に、同じ楕円の同じ回転から出発して、異なる拡大で２つの回転という、非常に良い例が得られました。

問題 3.5 楕円：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したものを E とします。

(1) E の方程式を求めてください。

(2) E を更に x 軸方向に $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍した曲線と、楕円：$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ を $\frac{\pi}{4}$ 回転した楕円が一致することを示してください。

(3) E を更に x 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍した曲線と、楕円：$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{20}{3}}=1$ を $\frac{\pi}{6}$ 回転した楕円が一致することを示してください。

3.5 一般の角度での再検討

先の $\frac{\pi}{6}$ のときの離心率が変化しないことも気になりますので、一般の角度での計算も見ておきましょう。

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

を $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものを x 軸方向に $A>0$ 倍した曲線は

$$\frac{\left(\frac{\cos\theta}{A}x+\sin\theta y\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{\sin\theta}{A}x+\cos\theta y\right)^2}{b^2}=1$$

で表されますが、これを整理すると

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y^2+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{A}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)xy=1$$

となります。

一方、楕円

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1 \quad (c>d>0)$$

を ξ 回転した楕円は

$$\frac{(\cos\xi x+\sin\xi y)^2}{c^2}+\frac{(-\sin\xi x+\cos\xi y)^2}{d^2}=1$$

で表され、これを整理すると

$$\left(\frac{\cos^2\xi}{c^2}+\frac{\sin^2\xi}{d^2}\right)x^2+\left(\frac{\sin^2\xi}{c^2}+\frac{\cos^2\xi}{d^2}\right)y^2+2\sin\xi\cos\xi\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{d^2}\right)xy=1$$

となります。これらが一致する条件は

$$\begin{cases}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=\frac{\cos^2\xi}{c^2}+\frac{\sin^2\xi}{d^2} & (3.12)\\ \frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}=\frac{\sin^2\xi}{c^2}+\frac{\cos^2\xi}{d^2} & (3.13)\\ \frac{2\cos\theta\sin\theta}{A}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=2\sin\xi\cos\xi\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{d^2}\right) & (3.14)\end{cases}$$

です。

3.5.1 $\xi\neq\frac{\pi}{4}$ の場合

第１・２式から

$$\begin{pmatrix}\cos^2\xi & \sin^2\xi\\ \sin^2\xi & \cos^2\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\ \frac{1}{d^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\\ \frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\ \frac{1}{d^2}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos^2\xi & \sin^2\xi\\ \sin^2\xi & \cos^2\xi\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\\ \frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{\cos^4\xi-\sin^4\xi}\begin{pmatrix}\cos^2\xi & -\sin^2\xi\\ -\sin^2\xi & \cos^2\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\\ \frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで一時的に

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=L,\quad \frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}=M$$

と置けば

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\ \frac{1}{d^2}\end{pmatrix}&=\frac{1}{\cos^4\xi-\sin^4\xi}\begin{pmatrix}\cos^2\xi & -\sin^2\xi\\ -\sin^2\xi & \cos^2\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L\\ M\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{\cos^2\xi-\sin^2\xi}\begin{pmatrix}\cos^2\xi L-\sin^2\xi M\\ \cos^2\xi M-\sin^2\xi L\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ですから、

$$\frac{1}{c^2}-\frac{1}{d^2}=\frac{1}{\cos^2\xi-\sin^2\xi}\left\{\cos^2\xi(L-M)+\sin^2\xi(L-M)\right\}=\frac{L-M}{\cos 2\xi}$$

が分かります。これを第３式に代入すれば

$$\frac{2\cos\theta\sin\theta}{A}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\sin 2\xi\frac{L-M}{\cos 2\xi}=(L-M)\tan 2\xi$$

が得られます。ここで $L-M$ は

$$\begin{aligned}L-M&=\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)-\frac{\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\theta}{b^2}\\&=\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta-A^2b^2\sin^2\theta-A^2a^2\cos^2\theta}{A^2a^2b^2}\end{aligned}$$

でしたから、第３式は

$$\frac{2\cos\theta\sin\theta(b^2-a^2)}{Aa^2b^2}=\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta-A^2b^2\sin^2\theta-A^2a^2\cos^2\theta}{A^2a^2b^2}\tan 2\xi$$
$$2\cos\theta\sin\theta(b^2-a^2)A=(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)\tan 2\xi-(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)\tan 2\xi A^2$$

となり、A の２次方程式：

$$\tan 2\xi(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)A^2-2\cos\theta\sin\theta(a^2-b^2)A-\tan 2\xi(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)=0$$

が得られます。判別式は

$$\cos^2\theta\sin^2\theta(a^2-b^2)^2+\tan^2 2\xi(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)>0$$

ですから、異なる２つの実数解が存在し、解の積が

$$-\frac{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}<0$$

ですから、正の解と負の解が１つずつあります。

$\theta=\frac{\pi}{3},\xi=\frac{\pi}{6}$ の場合には

$$\sqrt{3}\left(b^2\frac{3}{4}+a^2\frac{1}{4}\right)A^2-2\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-b^2)A-\sqrt{3}\left(a^2\frac{3}{4}+b^2\frac{1}{4}\right)=0$$

であって、先に見たものと一致していますね（確認）。

あるいは

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},\qquad \sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

によって変形すると、

$$\begin{aligned}b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta&=b^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}+a^2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\cos 2\theta\\a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta&=a^2\frac{1-\cos 2\theta}{2}+b^2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{2}(a^2-b^2)\cos 2\theta\end{aligned}$$

ですから、$\theta\neq\frac{\pi}{4}$ であれば２次方程式は

$$\begin{aligned}0=&\frac{1}{2}(a^2+b^2)\tan 2\xi(A^2-1)\\&+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\cos 2\theta\left\{\tan 2\xi A^2-2\tan 2\theta A+\tan 2\xi\right\}\end{aligned}$$

とも書けます。

研究課題 5 A の２次方程式：

$$(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)A^2-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\tan 2\xi}(a^2-b^2)A-(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)=0$$

あるいは

$$(a^2+b^2)(A^2-1)+(a^2-b^2)\cos 2\theta\left(A^2-2\frac{\tan 2\theta}{\tan 2\xi}A+1\right)=0\quad \theta\neq\frac{\pi}{4}$$

をどう処理したら良いでしょうか。

3.5.2 $\xi\neq\frac{\pi}{4},\xi=\frac{\pi}{2}-\theta$ である場合

この場合 $\theta\neq\frac{\pi}{4}$ でもあって、$\tan 2\xi=-\tan 2\theta$ ですから、方程式は

$$\begin{aligned}0&=\{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)\}A^2+2\cos 2\theta(a^2-b^2)A-\{a^2+b^2-\cos 2\theta(a^2-b^2)\}\\&=(A+1)\left(\{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)\}A-a^2-b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)\right)\end{aligned}$$

となり、正の解は

$$A=\frac{a^2+b^2-\cos 2\theta(a^2-b^2)}{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)}=\frac{A_-}{A_+}$$

です。このとき、

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = \frac{A_+^2}{A_-^2}\frac{A_-}{2a^2b^2} = \frac{A_+^2}{2a^2b^2A_-} \\
M &= \frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2} = \frac{A_+}{2a^2b^2}
\end{aligned}
$$

ですから、$\sin\xi = \cos\theta, \cos\xi = \sin\theta$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{d^2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\cos^2\xi - \sin^2\xi}\begin{pmatrix} \cos^2\xi L - \sin^2\xi M \\ \cos^2\xi M - \sin^2\xi L \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}\begin{pmatrix} \sin^2\theta L - \cos^2\theta M \\ \sin^2\theta M - \cos^2\theta L \end{pmatrix} \\
&= \frac{A_+}{2A_-a^2b^2\cos 2\theta}\begin{pmatrix} A_-\cos^2\theta - A_+\sin^2\theta \\ A_+\cos^2\theta - A_-\sin^2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
A_-\cos^2\theta - A_+\sin^2\theta &= \{a^2+b^2-\cos 2\theta(a^2-b^2)\}\cos^2\theta \\
&\qquad - \{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)\}\sin^2\theta \\
&= (a^2+b^2)\cos 2\theta - \cos 2\theta(a^2-b^2) \\
&= 2b^2\cos 2\theta \\
A_+\cos^2\theta - A_-\sin^2\theta &= \{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)\}\cos^2\theta \\
&\qquad - \{a^2+b^2-\cos 2\theta(a^2-b^2)\}\sin^2\theta \\
&= (a^2+b^2)\cos 2\theta + \cos 2\theta(a^2-b^2) \\
&= 2a^2\cos 2\theta
\end{aligned}
$$

ですから

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{d^2} \end{pmatrix} = \frac{A_+}{2A_-a^2b^2\cos 2\theta}\begin{pmatrix} 2b^2\cos 2\theta \\ 2a^2\cos 2\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}
$$

すなわち、

$$
c^2 = Aa^2, \qquad d^2 = Ab^2
$$

が得られ、離心率が変わらないことが分かります。この結果自体は $\theta = \xi = \frac{\pi}{4}$ でも成り立っています（自明なケースですが）。

事実 3.6 楕円：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 回転し、更に x 軸方向に $\frac{a^2+b^2-\cos 2\theta(a^2-b^2)}{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)}$ 倍したものは、楕円：$\frac{x^2}{\frac{a^2+b^2-\cos 2\theta(a^2-b^2)}{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)}a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2+b^2-\cos 2\theta(a^2-b^2)}{a^2+b^2+\cos 2\theta(a^2-b^2)}b^2} = 1$ を $\frac{\pi}{2}-\theta$ 回転した楕円に一致します。

A は

$$
A = \frac{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{b^2+a^2\tan^2\theta}{a^2+b^2\tan^2\theta}
$$

とも書けますので、こちらの方が良いかも知れません：

事実 3.7 楕円：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 回転し、更に x 軸方向に $\frac{b^2+a^2\tan^2\theta}{a^2+b^2\tan^2\theta}$ 倍したものは、楕円：$\frac{x^2}{\frac{b^2+a^2\tan^2\theta}{a^2+b^2\tan^2\theta}a^2} + \frac{y^2}{\frac{b^2+a^2\tan^2\theta}{a^2+b^2\tan^2\theta}b^2} = 1$ を $\frac{\pi}{2}-\theta$ 回転した楕円に一致します。

$A<1$ であることと $\theta<\frac{\pi}{4}$ であることが対応していますね。

しかし何故離心率が変化しないのか、図形的な解釈が欲しいところですね。

3.5.3 $\xi = \frac{\pi}{4}$ の場合

一致する条件は

$$
\begin{cases}
\frac{1}{A^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right) \\
\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right) \\
\frac{\cos\theta\sin\theta}{A}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{d^2}\right)
\end{cases}
$$

です。

第１・２式から

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \frac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta} \\
A &= \sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}}
\end{aligned}
$$

が得られ、第２・３式から c, d が求まりますが、この根号が・・・

3.6 離心率の推移の解明

3.6.1 ξ の消去

一致する条件は

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{A^2}\left(\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = \dfrac{\cos^2\xi}{c^2} + \dfrac{\sin^2\xi}{d^2} \\ M = \dfrac{\sin^2\theta}{a^2} + \dfrac{\cos^2\theta}{b^2} = \dfrac{\sin^2\xi}{c^2} + \dfrac{\cos^2\xi}{d^2} \\ N = \dfrac{\sin 2\theta}{A}\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) = \sin 2\xi\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{d^2}\right) \end{cases}$$

ですが、第１・２式を辺々加えれば

$$L + M = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$$

であり、辺々引けば

$$L - M = \cos 2\xi\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right)$$

です。これを両辺自乗して第３式の両辺を自乗したものと加えれば

$$(L-M)^2 + N^2 = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right)^2$$

です。従って c, d の満たす連立方程式は、ξ を消去した形では

$$\begin{cases} L + M = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2} \\ \sqrt{(L-M)^2 + N^2} = \dfrac{1}{d^2} - \dfrac{1}{c^2} \end{cases}$$

となり、これを解けば

$$\frac{1}{c^2} = \frac{L + M - \sqrt{(L-M)^2 + N^2}}{2}, \quad \frac{1}{d^2} = \frac{L + M + \sqrt{(L-M)^2 + N^2}}{2}$$

が分かります。

あるいは、

$$(L+M)^2 = \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2}\right)^2 + \frac{4}{c^2d^2}$$

から

$$\begin{aligned} (L-M)^2 + N^2 &= (L+M)^2 - \frac{4}{c^2d^2} \\ \frac{4}{c^2d^2} &= 4LM - N^2 \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} 4LM - N^2 &= \frac{4}{A^2a^4b^4}(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta) \\ &\quad - \frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta}{A^2a^4b^4}(b^2 - a^2)^2 \\ \frac{A^2a^4b^4(4LM - N^2)}{4} &= b^4\cos^2\theta\sin^2\theta + a^4\cos^2\theta\sin^2\theta + a^2b^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ &\quad - \sin^2\theta\cos^2\theta(b^4 - 2a^2b^2 + a^4) \\ &= a^2b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 \\ 4LM - N^2 &= \frac{4}{A^2a^2b^2} \end{aligned}$$

も分かりますから

$$c^2d^2 = A^2a^2b^2 \quad \text{すなわち、} \quad A^2 = \frac{c^2d^2}{a^2b^2}$$

が分かります。

3.6.2 離心率の推移

元の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の離心率を $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ としておきます。

回転した上で拡大後の楕円の離心率 $e(A)$ は（θ にも依存しますが、A だけ明示しておきます）楕円 $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$ の離心率に等しく、

$$e(A)^2 = 1 - \frac{d^2}{c^2} = \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{c^2}\right)d^2 = \frac{2\sqrt{(L-M)^2 + N^2}}{L + M + \sqrt{(L-M)^2 + N^2}}$$

です。ここで A の役割を分離しはっきりさせるために

$$L = \frac{\tilde{L}}{A^2}, \qquad N = \frac{\tilde{N}}{A}$$

と置けば、

$$
\begin{aligned}
e(A)^2 &= \frac{2\sqrt{\left(\frac{\tilde{L}}{A^2} - M\right)^2 + \frac{\tilde{N}^2}{A^2}}}{\frac{\tilde{L}}{A^2} + M + \sqrt{\left(\frac{\tilde{L}}{A^2} - M\right)^2 + \frac{\tilde{N}^2}{A^2}}} \\
&= \frac{2\sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}}{\tilde{L} + MA^2 + \sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}} \\
&= \frac{2\sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}\left\{\tilde{L} + MA^2 - \sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}\right\}}{\left(\tilde{L} + MA^2\right)^2 - (\tilde{L} - MA^2)^2 - \tilde{N}^2 A^2} \\
&= 2\frac{\left(\tilde{L} + MA^2\right)\sqrt{\left(\tilde{L} - MA^2\right)^2 + \tilde{N}^2 A^2} - \left(\tilde{L} - MA^2\right)^2 - \tilde{N}^2 A^2}{\left(4\tilde{L}M - \tilde{N}^2\right) A^2}
\end{aligned}
$$

が得られます。ちなみに分母の係数は

$$
\begin{aligned}
4LM - N^2 &= \frac{4}{A^2 a^2 b^2} \\
\frac{4\tilde{L}M}{A^2} - \frac{\tilde{N}^2}{A^2} &= \frac{4}{A^2 a^2 b^2} \\
4\tilde{L}M - \tilde{N}^2 &= \frac{4}{a^2 b^2}
\end{aligned}
$$

です。でもちょっとこれは形が良くないように思われます。

あるいは

$$
\begin{aligned}
E(A) = 1 - e(A)^2 = \frac{d^2}{c^2} &= \frac{L + M - \sqrt{(L - M)^2 + N^2}}{L + M + \sqrt{(L - M)^2 + N^2}} \\
&= \frac{\tilde{L} + MA^2 - \sqrt{\left(\tilde{L} - MA^2\right)^2 + \tilde{N}^2 A^2}}{\tilde{L} + MA^2 + \sqrt{\left(\tilde{L} - MA^2\right)^2 + \tilde{N}^2 A^2}}
\end{aligned}
$$

の形の方が見やすいでしょうか？

$$
E'(A) = \frac{\begin{aligned}&\left(2MA - \frac{(\tilde{L} - MA^2)(-2MA) + \tilde{N}^2 A}{\sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}}\right)\left(\tilde{L} + MA^2 + \sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}\right) \\ &- \left(\tilde{L} + MA^2 - \sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}\right)\left(2MA + \frac{(\tilde{L} - MA^2)(-2MA) + \tilde{N}^2 A}{\sqrt{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2}}\right)\end{aligned}}{\left\{\tilde{\tilde{L}} + MA^2 + \sqrt{\left(\tilde{\tilde{L}} - MA^2\right)^2 + \tilde{\tilde{N}}^2 A^2}\right\}^2}
$$

ここで簡単のために

$$
Q = \left(\tilde{L} - MA^2\right)^2 + \tilde{N}^2 A^2
$$

と書けば、

$$
E'(A) = \frac{\begin{aligned}&\left\{2MA\sqrt{Q} + 2MA(\tilde{L} - MA^2) - \tilde{N}^2 A\right\}(\tilde{L} + MA^2 + \sqrt{Q}) \\ &- (\tilde{L} + MA^2 - \sqrt{Q})\left\{2MA\sqrt{Q} - 2MA(\tilde{L} - MA^2) + \tilde{N}^2 A\right\}\end{aligned}}{\sqrt{Q}(\tilde{L} + MA^2 + \sqrt{Q})^2}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺分子}) &= 2MA(\tilde{L} + MA^2)\sqrt{Q} + 2MAQ + 2MA(\tilde{L}^2 - M^2A^4) \\
&\quad + 2MA(\tilde{L} - MA^2)\sqrt{Q} - \tilde{N}^2 A(\tilde{L} + MA^2) - \tilde{N}^2 A\sqrt{Q} \\
&\quad - 2MA(\tilde{L} + MA^2)\sqrt{Q} + 2MAQ + 2MA(\tilde{L}^2 - M^2A^4) \\
&\quad - 2MA(\tilde{L} - MA^2)\sqrt{Q} - \tilde{N}^2 A(\tilde{L} + MA^2) + \tilde{N}^2 A\sqrt{Q} \\
&= 4MAQ + 4MA(\tilde{L}^2 - M^2A^4) - 2\tilde{N}^2 A(\tilde{L} + MA^2) \\
&= 4MA\left\{(\tilde{L} - MA^2)^2 + \tilde{N}^2 A^2\right\} \\
&\quad + 4MA(\tilde{L}^2 - M^2A^4) - 2\tilde{N}^2 A(\tilde{L} + MA^2) \\
&= 4MA(\tilde{L}^2 - 2\tilde{L}MA^2 + M^2A^4 + \tilde{N}^2A^2 + \tilde{L}^2 - M^2A^4) \\
&\quad - 2\tilde{L}\tilde{N}^2 A - 2M\tilde{N}^2 A^3 \\
&= 4MA(2\tilde{L}^2 - 2\tilde{L}MA^2 + \tilde{N}^2A^2) - 2\tilde{L}\tilde{N}^2 A - 2M\tilde{N}^2 A^3 \\
&= 8\tilde{L}^2 MA - 8\tilde{L}M^2A^3 + 2M\tilde{N}^2A^3 - 2\tilde{L}\tilde{N}^2 A \\
&= 2A\left\{(M\tilde{N}^2 - 4\tilde{L}M^2)A^2 + 4\tilde{L}^2 M - \tilde{L}\tilde{N}^2\right\} \\
&= 2A(\tilde{N}^2 - 4\tilde{L}M)(MA^2 - \tilde{L})
\end{aligned}
$$

ですから、

$$
E'(A) = -2(4\tilde{L}M - \tilde{N}^2)\frac{A(MA^2 - \tilde{L})}{\sqrt{Q}(\tilde{L} + MA^2 + \sqrt{Q})^2}
$$

となり、$E(A)$ の増減表は

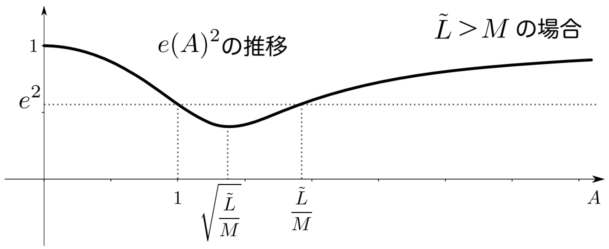
$$4\tilde{L}M - \tilde{N}^2 = \frac{4}{a^2b^2} > 0$$

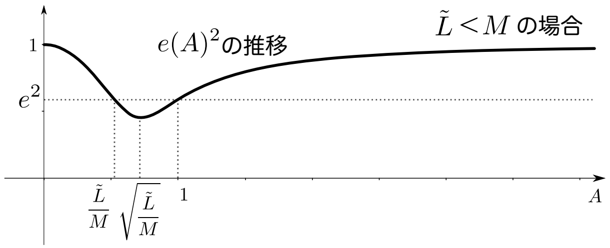
に注意して

A	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}$	$\cdots$	∞
$E'(A)$	0	$+$	0	$-$	0
$E(A)$	0	$\nearrow$	$E\left(\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}\right)$	$\searrow$	0

となります。

$$E\left(\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}\right) = \frac{2\tilde{L} - \tilde{N}\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}}{2\tilde{L} + \tilde{N}\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}} = \frac{2\sqrt{LM} - \tilde{N}}{2\sqrt{LM} + \tilde{N}}$$





これが離心率が一番小さくなるとき、つまり、一番『丸くなった』ときです。このときの ξ はどうなっているのでしょうか？

また、拡大しない場合、つまり $A = 1$ の場合は

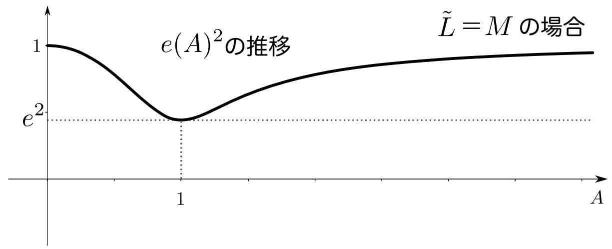
$$\tilde{L} + M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \tilde{L} - M = \cos 2\theta\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right), \quad \tilde{N} = \sin 2\theta\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

に注意すれば

$$E(1) = \frac{\tilde{L} + M - \sqrt{\left(\tilde{L} - M\right)^2 + \tilde{N}^2}}{\tilde{L} + M + \sqrt{\left(\tilde{L} - M\right)^2 + \tilde{N}^2}} = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)} = \frac{b^2}{a^2}$$

となっていて、確かに元の楕円の離心率に一致しています。

$$e(1)^2 = 1 - E(1) = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2$$



$\tilde{L} = M$ である場合は、この『一番丸くなったとき』が拡大しない場合ですから、A を大きくしていくと離心率は単調に増加していき、『平べったく』なって行きます。

$$\tilde{L} = M \iff \cos 2\theta\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{4}$$

です（$a > b > 0$）。

$\tilde{L} \neq M$ の場合は、$0 < A \neq 1$ で $E(A) = E(1)$ となる A が存在します。恐らくこれが $\xi = \frac{\pi}{2} - \theta$ に該当する場合と思われます。実際、

$$E(A) = \frac{\tilde{L} + MA^2 - \sqrt{\left(\tilde{L} - MA^2\right)^2 + \tilde{N}^2A^2}}{\tilde{L} + MA^2 + \sqrt{\left(\tilde{L} - MA^2\right)^2 + \tilde{N}^2A^2}}$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\tilde{L}}{M}\right) &= \frac{\tilde{L} + \frac{\tilde{L}^2}{M} - \sqrt{\left(\tilde{L} - \frac{\tilde{L}^2}{M}\right)^2 + \tilde{N}^2\frac{\tilde{L}^2}{M^2}}}{\tilde{L} + \frac{\tilde{L}^2}{M} + \sqrt{\left(\tilde{L} - \frac{\tilde{L}^2}{M}\right)^2 + \tilde{N}^2\frac{\tilde{L}^2}{M^2}}} \\ &= \frac{M + \tilde{L} - \sqrt{\left(M - \tilde{L}\right)^2 + \tilde{N}^2}}{M + \tilde{L} + \sqrt{\left(M - \tilde{L}\right)^2 + \tilde{N}^2}} \\ &= E(1) \end{aligned}$$

です。このとき（$A=\frac{\tilde{L}}{M}$）の θ と ξ の関係は $\xi=\frac{\pi}{2}-\theta$ であるはずです。また、$A=\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}$ のときの ξ はどうなっているのでしょうか。

3.6.3 ξ と θ の関係

$\xi\neq\frac{\pi}{4}$ であれば A の満たす２次方程式が得られ、それは

$$(b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)A^2-\frac{\sin 2\theta}{\tan 2\xi}(a^2-b^2)A-(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)=0$$

すなわち

$$MA^2+\frac{\tilde{N}}{\tan 2\xi}A-\tilde{L}=0 \tag{3.15}$$

でした。ここで

$$\tilde{L}=\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{a^2b^2},\quad M=\frac{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}{a^2b^2},\quad \tilde{N}=\frac{\sin 2\theta(b^2-a^2)}{a^2b^2}$$

です。ここで $A=\frac{\tilde{L}}{M}$ とすれば、

$$\begin{aligned}0&=\frac{\tilde{L}^2}{M}+\frac{\tilde{N}}{\tan 2\xi}\frac{\tilde{L}}{M}-\tilde{L}\\&=\tilde{L}+\frac{\tilde{N}}{\tan 2\xi}-M\\ \tilde{L}-M&=-\frac{\tilde{N}}{\tan 2\xi}\\ \cos 2\theta\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)&=\frac{\sin 2\theta\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)}{\tan 2\xi}\\ \tan 2\xi&=-\tan 2\theta\end{aligned}$$

ですから、$\xi=\frac{\pi}{2}-\theta$ です。

また、$A=\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}$ とすれば

$$0=\tilde{L}+\frac{\tilde{N}}{\tan 2\xi}\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}-\tilde{L}=\frac{\tilde{N}}{\tan 2\xi}\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}$$

であって、これは成り立ちません。敢えて言うなれば分母の $\tan 2\xi=+\infty$ の場合でしょう。これは $\xi=\frac{\pi}{4}$ に相当しますから、最初に注意したようにこの場合は２次方程式 (3.15) 自体が成り立っていませんでした。

$\xi=\frac{\pi}{4}$ の場合は、3.5.3 節で見たように

$$A=\sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}}=\sqrt{\frac{\tilde{L}}{M}}$$

です。つまり、拡大したときに『最も丸くなる』のは、丁度 $\frac{\pi}{4}$ だけ傾いた楕円になっている場合（$\xi=\frac{\pi}{4}$）です。

もしも $\theta>\frac{\pi}{4}$ であればそのようなケースは $A>1$、つまり本当の拡大によって実現され、$\theta<\frac{\pi}{4}$ であれば $A<1$ によって、つまり縮小によって実現されるでしょう。

最も丸くなったとき、つまり、$A=\sqrt{\tilde{L}}M$ のときの離心率はどうなっているか見てみると、

3.6.4 $\tilde{L}$ と M の大小関係

先に見たように、$a>b>0,\ c>d>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$ という前提のもとでは、

$$\tilde{L}=M\iff\theta=\frac{\pi}{4}$$

でしたが、もう少し詳しく見れば

$$\tilde{L}<M\iff 0<\theta<\frac{\pi}{4},\qquad \tilde{L}>M\iff\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

です。

3.7 まとめ

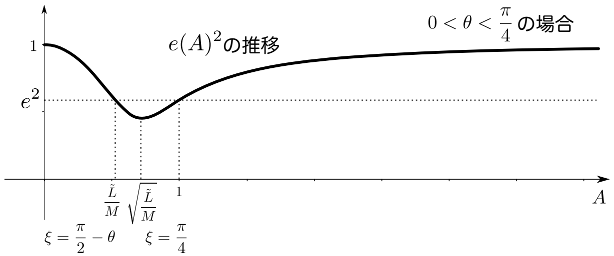
事実 3.8 楕円 E：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

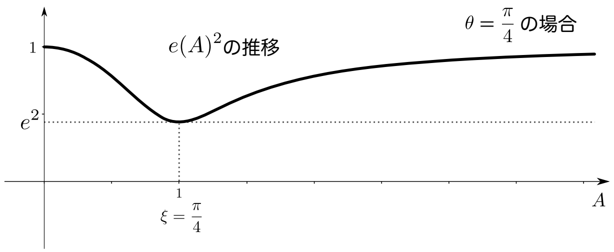
を原点中心に $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 回転したものを x-軸方向に拡大してゆくと、次第に離心率が単調に増加して（平べったくなって）1 に近づいて行きます。

また逆に縮小してゆくと、最初少し離心率は減少し（円に近づいて行き）、軸が $\frac{\pi}{4}$ の傾きになったところで離心率の最小値となり、その後離心率は増加に転じ、特

に軸の傾きが $\frac{\pi}{2}-\theta$ になるときに最初の楕円の離心率に戻ります。その後も増加して 1 に近づいて行きます。

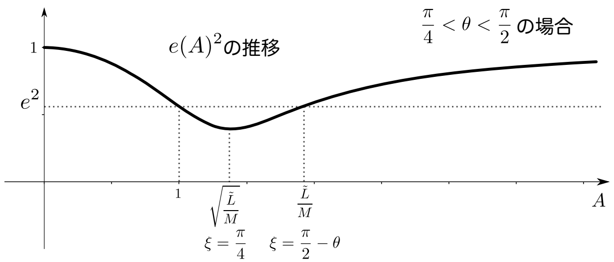


楕円の回転角が $\theta=\frac{\pi}{4}$ であるときは、拡大した場合も縮小した場合も離心率は次第に増加し 1 に近づいて行きます。



楕円の回転角が $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるときは、拡大する場合は初め離心率は減少し、軸の傾きが $\frac{\pi}{4}$ になったときに離心率は最小値となり以降増加に転じ、特に軸の傾きが $\frac{\pi}{2}-\theta$ になるとき最初の楕円の離心率に戻ります。その後も増加して 1 に近づいて行きます。

また縮小する場合は離心率は単調に増加して 1 に近づいて行きます。



4 双曲線の場合

4.1 一般論

4.1.1 定式化

研究課題 6 $a,b>0, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$ が与えられたときに、双曲線 H：

$$H\ :\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a,b>0)$$

を角度 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だけ回転させてから更に x 軸方向に $A>0$ 倍した曲線 C_2：

$$C_2\ :\quad \frac{\left(\cos\theta\dfrac{x}{A}+\sin\theta y\right)^2}{a^2}-\frac{\left(-\sin\theta\dfrac{x}{A}+\cos\theta y\right)^2}{b^2}=1$$

が、角度 $0<\xi<\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた双曲線（$0<d,c$）：

$$C_3\ :\quad \frac{(\cos\xi x+\sin\xi y)^2}{c^2}-\frac{(-\sin\xi x+\cos\xi y)^2}{d^2}=1$$

と一致するように c,d,ξ を定めることは常に出来るのだろうか？

4.1.2 計算

曲線 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\cos\theta}{A}x+\sin\theta y\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{\sin\theta}{A}x-\cos\theta y\right)^2}{b^2}&=1\\ \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2A^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2A^2}\right)x^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y^2&\\ +\frac{2}{A}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\theta\cos\theta xy&=1\end{aligned}$$

であり、C_3 は

$$\frac{(\cos\xi x+\sin\xi y)^2}{c^2}-\frac{(\sin\xi x-\cos\xi y)^2}{d^2}=1$$
$$\left(\frac{\cos^2\xi}{c^2}-\frac{\sin^2\xi}{d^2}\right)x^2+\left(\frac{\sin^2\xi}{c^2}-\frac{\cos^2\xi}{d^2}\right)y^2$$
$$+2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\sin\xi\cos\xi xy=1$$

となりますから、これらが一致するための条件は連立方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{A^2}\left(\dfrac{1}{a^2}\cos^2\theta-\dfrac{1}{b^2}\sin^2\theta\right)=\dfrac{1}{c^2}\cos^2\xi-\dfrac{1}{d^2}\sin^2\xi & (4.1)\\ \dfrac{1}{a^2}\sin^2\theta-\dfrac{1}{b^2}\cos^2\theta=\dfrac{1}{c^2}\sin^2\xi-\dfrac{1}{d^2}\cos^2\xi & (4.2)\\ \dfrac{1}{A^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2\sin^2\theta\cos^2\theta=\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\right)^2\sin^2\xi\cos^2\xi & (4.3)\end{cases}$$

ですので、この形で解いていきましょう。$\cos\xi$ は $\sin\xi$ に直して、更に

$$\sin^2\xi=s,\quad \frac{1}{c^2}=C,\quad \frac{1}{d^2}=D$$

とし、左辺は順に L, M, N^2 とすれば

$$\begin{cases}L=-(C+D)s+C & (4.4)\\ M=(C+D)s-D & (4.5)\\ N^2=(C+D)^2s(1-s) & (4.6)\end{cases}$$

と書き表されます。

(4.4),(4.5) から $C-D=L+M, (C+D)s=C-L=D+M$ ですから、(4.6) から

$$\begin{aligned}N^2&=(C+D)s\{C+D-(C+D)s\}\\&=(C-L)(C+D-C+L)\\&=(C-L)(D+L)\\&=(C-L)(C-M)\\&=(D+M)(D+L)\end{aligned}$$

が得られ、

$$\begin{cases}(-C+L)(-C+M)=N^2\\(D+L)(D+M)=N^2\end{cases}$$

ですから 2 次方程式

$$(X+L)(X+M)=N^2,\quad \text{すなわち}\quad X^2+(L+M)X+LM-N^2=0$$

の 2 解が $-C, D$ であることが分かります。これで c, d が求まり、これを使って s すなわち $\sin^2\xi$ も分かる事になります。

$$-C, D=\frac{-(L+M)\pm\sqrt{(L-M)^2+4N^2}}{2}$$

4.2 具体例

とりあえず $\theta=\frac{\pi}{4}$ は固定で、他のパラメータをいじってルートの中が平方数になるような例を探して見ましょう。

$$L=\frac{1}{2A^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right),\quad M=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right),\quad N^2=\frac{1}{4A^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2$$

ですから、

$$\begin{aligned}L-M&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{A^2}-1\right)\\(L-M)^2+4N^2&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{A^2}-1\right)^2+\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\\&=\frac{1}{4a^4b^4A^4}\left\{(b^2-a^2)^2(1-A^2)^2+4A^2(b^2+a^2)^2\right\}\\&=\frac{1}{4a^4b^4A^4}\left\{(b^2-a^2)^2A^4+2(a^4+6a^2b^2+b^4)A^2+(b^2-a^2)^2\right\}\end{aligned}$$

です。従って

$$Q(a,b,A)=(b^2-a^2)^2A^4+2(a^4+6a^2b^2+b^4)A^2+(b^2-a^2)^2$$

が平方数になるような a, b, A を探して見ましょう。

4.2.1 最初の例

まず高次の係数を簡単にするために $b^2=2, a^2=1$ とすると、

$$Q=A^4+34A^2+1$$

ですから、例えば

$$(A^2+2)^2 = a^4+4A^2+4 = Q-30A^2+3$$

なので、$A^2=\frac{1}{10}$ であれば良さげです。このとき $Q=\left(\frac{21}{10}\right)^2$ であり、

$$(L-M)^2+4N^2 = \frac{1}{4\cdot 1\cdot 4\cdot \frac{1}{100}}\left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{100}{4^2}\left(\frac{21}{10}\right)^2 = \left(\frac{21}{4}\right)^2$$
$$L+M = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 11 = \frac{11}{4}$$

ですから

$$\frac{-(L+M)\pm\sqrt{(L-M)^2+4N^2}}{2} = \frac{-11\pm 21}{8}$$

であってこれが $-C, D$ でしたから $C=\frac{1}{c^2}=4, D=\frac{1}{d^2}=\frac{5}{4}$ です。

また、$L=-(C+D)\sin^2\xi+C$ でしたから、

$$\frac{1}{\frac{2}{10}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\left(4+\frac{5}{4}\right)\sin^2\xi+4$$
$$\frac{5}{2} = 4-\frac{21}{4}\sin^2\xi$$
$$\sin^2\xi = \frac{2}{7}$$

が得られ、

$$\sin\xi = \sqrt{\frac{2}{7}}, \quad \cos\xi = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

です。

問題 4.1 (1) 双曲線 $H_1: x^2-\frac{y^2}{2}=1$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものを、x 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 倍した曲線 C_1 の方程式を求めてください。

(2) 双曲線 $H_2: 4x^2-\frac{5y^2}{4}=1$ を原点中心に

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{7}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

を満たす角度 θ だけ回転して得られる双曲線 C_2 の方程式を求めてください。

(1) まず H_1 を回転すると

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 = 1$$
$$2(x+y)^2-(x-y)^2 = 4$$

となり、これを拡大すれば（縮小ですが)、

$$2(\sqrt{10}x+y)^2-(\sqrt{10}x-y)^2 = 4$$
$$2(10x^2+y^2+2\sqrt{10}xy)-(10x^2+y^2-2\sqrt{10}xy) = 4$$
$$10x^2+y^2+6\sqrt{10}xy = 4$$

が得られます。これが C_1 です。

(2) 次に H_2 を回転すると

$$4\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x+\sqrt{\frac{2}{7}}y\right)^2-\frac{5}{4}\left(-\sqrt{\frac{2}{7}}x+\sqrt{\frac{5}{7}}y\right)^2 = 1$$
$$16(\sqrt{5}x+\sqrt{2}y)^2-5(\sqrt{2}x-\sqrt{5}y)^2 = 28$$
$$16(5x^2+2y^2+2\sqrt{10}xy)-5(2x^2+5y^2-2\sqrt{10}xy) = 28$$
$$70x^2+7y^2+42\sqrt{10}xy = 28$$
$$10x^2+y^2+6\sqrt{10}xy = 4$$

であって、これが C_2 です。

このように、C_1, C_2 は一致しています。 □

4.2.2 別の具体例

また、

$$(A^2+9)^2 = A^4+18A^2+81 = Q-16A^2+80$$

でもあり、$A^2=5$ で上手く行きそうです。このとき $Q=14^2$ であり、

$$(L-M)^2+4N^2 = \frac{1}{4\cdot 1\cdot 4\cdot 25}14^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2$$
$$L+M = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

ですから

$$\frac{-(L+M) \pm \sqrt{(L-M)^2+4N^2}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{20}$$

であってこれが $-C, D$ でしたから $C = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2}, D = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{5}$ です。

また、$L = -(C+D)\sin^2\xi + C$ でしたから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\sin^2\xi + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{20} &= \frac{1}{2} - \frac{7}{10}\sin^2\xi \\ \sin^2\xi &= \frac{9}{14} \end{aligned}$$

が得られ、

$$\sin\xi = \sqrt{\frac{9}{14}}, \quad \cos\xi = \sqrt{\frac{5}{14}}$$

です。

> 問題 **4.2** (1) 双曲線 $H_1 : x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものを、x 軸方向に $\sqrt{5}$ 倍した曲線 C_1 の方程式を求めてください。
>
> (2) 双曲線 $H_2 : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$ を原点中心に
>
> $$\sin\theta = \sqrt{\frac{9}{14}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{5}{14}}$$
>
> を満たす角度 θ だけ回転して得られる双曲線 C_2 の方程式を求めてください。

(1) まず H_1 を回転すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 &= 1 \\ 2(x+y)^2 - (x-y)^2 &= 4 \end{aligned}$$

となり、これを拡大すれば、

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + y\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{5}} - y\right)^2 &= 4 \\ 2(x+\sqrt{5}y)^2 - (x-\sqrt{5}y)^2 &= 20 \\ 2(x^2+5y^2+2\sqrt{5}xy) - (x^2+5y^2-2\sqrt{5}xy) &= 4 \\ x^2+5y^2+6\sqrt{5}xy &= 20 \end{aligned}$$

が得られます。これが C_1 です。

(2) 次に H_2 を回転すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{14}}x + \sqrt{\frac{9}{14}}y\right)^2 - \frac{1}{5}\left(-\sqrt{\frac{9}{14}}x + \sqrt{\frac{5}{14}}y\right)^2 &= 1 \\ 5(\sqrt{5}x+3y)^2 - 2(3x-\sqrt{5}y)^2 &= 140 \\ 5(5x^2+9y^2+6\sqrt{5}xy) - 2(9x^2+5y^2-6\sqrt{5}xy) &= 140 \\ 7x^2+35y^2+42\sqrt{5}xy &= 140 \\ x^2+5y^2+6\sqrt{5}xy &= 20 \end{aligned}$$

であって、これが C_2 です。

このように、C_1, C_2 は一致しています。 □

4.2.3 更に別の具体例

また、

$$(A^2+11)^2 = A^4 + 22A^2 + 121 = Q - 12A^2 + 120$$

でもあり、$A^2 = 10$ で上手く行きそうです。このとき $Q = 21^2$ であり、

$$\begin{aligned} (L-M)^2 + 4N^2 &= \frac{1}{4\cdot 1\cdot 4\cdot 100}21^2 = \left(\frac{21}{40}\right)^2 \\ L+M &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{11}{10} = \frac{11}{40} \end{aligned}$$

ですから

$$\frac{-(L+M) \pm \sqrt{(L-M)^2+4N^2}}{2} = \frac{-11 \pm 21}{80}$$

であってこれが $-C, D$ でしたから $C = \frac{1}{c^2} = \frac{2}{5}, D = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{8}$ です。

また、$L = -(C+D)\sin^2\xi + C$ でしたから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{8}\right)\sin^2\xi + \frac{2}{5} \\ \frac{1}{40} &= \frac{2}{5} - \frac{21}{40}\sin^2\xi \\ \sin^2\xi &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

が得られ、

$$\sin\xi = \sqrt{\frac{5}{7}}, \quad \cos\xi = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

です。

> **問題 4.3** (1) 双曲線 $H_1 : x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものを、x 軸方向に $\sqrt{10}$ 倍した曲線 C_1 の方程式を求めてください。
>
> (2) 双曲線 $H_2 : \frac{2x^2}{5} - \frac{y^2}{8} = 1$ を原点中心に
>
> $$\sin\theta = \sqrt{\frac{5}{7}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{7}}$$
>
> を満たす角度 θ だけ回転して得られる双曲線 C_2 の方程式を求めてください。

(1) まず H_1 を回転すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 &= 1 \\ 2(x+y)^2 - (x-y)^2 &= 4\end{aligned}$$

となり、これを拡大すれば（縮小ですが)、

$$\begin{aligned}2\left(\frac{x}{\sqrt{10}} + y\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{10}} - y\right)^2 &= 4 \\ 2(x+\sqrt{10}y)^2 - (x-\sqrt{10}y)^2 &= 40 \\ 2(x^2+10y^2+2\sqrt{10}xy) - (x^2+10y^2-2\sqrt{10}xy) &= 40 \\ x^2+10y^2+6\sqrt{10}xy &= 40\end{aligned}$$

が得られます。これが C_1 です。

(2) 次に H_2 を回転すると

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}x + \sqrt{\frac{5}{7}}y\right)^2 - \frac{1}{8}\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}x + \sqrt{\frac{2}{7}}y\right)^2 &= 1 \\ 16(\sqrt{2}x+\sqrt{5}y)^2 - 5(\sqrt{5}x-\sqrt{2}y)^2 &= 280 \\ 16(2x^2+5y^2+2\sqrt{10}xy) - 5(5x^2+2y^2-2\sqrt{10}xy) &= 280 \\ 7x^2+70y^2+42\sqrt{10}xy &= 280 \\ x^2+10y^2+6\sqrt{10}xy &= 40\end{aligned}$$

であって、これが C_2 です。

このように、C_1, C_2 は一致しています。 □

4.2.4 そのほかの例

更に言えば、

$$\begin{aligned}(A^2+13)^2 &= A^4+26A^2+169 = Q-8A^2+168, \qquad A^2 = 21 \\ (A^2+15)^2 &= A^4+30A^2+225 = Q-4A^2+224, \qquad A^2 = 56 \\ (A^2-3)^2 &= A^4-6A^2+9 = Q-40A^2+8, \qquad A^2 = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

なども上手く行きそうです。$A^2 = n$ で上手くいけば $A^2 = \frac{1}{n}$ でも上手く行くのは、係数の対称性から明らかですね。

4.3 派生した問題

> **研究課題 7**
>
> $$Q(n) = n^2 + 34n + 1$$
>
> が平方数となるような正の整数 n を全て求めてください。

今のところ、$n = 1, 5, 10, 21, 56$ は分かっています：

$$
\begin{aligned}
Q(1) &= 36 = 6^2 \\
Q(5) &= 196 = 14^2 \\
Q(10) &= 441 = 21^2 \\
Q(21) &= 1156 = 34^2 \\
Q(56) &= 5041 = 71^2
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
(n+17)^2 &= n^2 + 34n + 289 = Q(n) + 288 > Q(n) \\
(n+16)^2 &= n^2 + 32n + 256 = Q(n) - 2n + 255
\end{aligned}
$$

ですから、$n \geq 128$ のときは $Q(n)$ は平方数にはなりません。また、$n \leq 127$ であれば $Q(n) < (n+16)^2$ が成り立っており、

$$(n+15)^2 = n^2 + 30n + 225 = Q(n) - 4n + 224$$

によれば $57 \leq n \leq 127$ の範囲では

$$(n+15)^2 < Q(n) < (n+16)^2$$

となって平方数ではあり得ません。

更に $n \leq 55$ においては $Q(n) < (n+15)^2$ であって、

$$(n+14)^2 = n^2 + 28n + 196 = Q(n) - 6n + 195$$

に注意すれば $33 \leq n \leq 55$ でも平方数ではあり得ません。
また、$n \leq 32$ で $Q(n) < (n+14)^2$ なので

$$(n+13)^2 = n^2 + 26n + 169 = Q(n) - 8n + 168$$

と合わせて、$22 \leq n \leq 32$ でも平方数ではありません。
全く同様にして

$$
\begin{aligned}
(n+12)^2 < Q(n) < (n+13)^2 \qquad & 15 \leq n \leq 20 \\
(n+11)^2 < Q(n) < (n+12)^2 \qquad & 11 \leq n \leq 14 \\
(n+10)^2 < Q(n) < (n+11)^2 \qquad & n = 8, 9 \\
(n+9)^2 < Q(n) < (n+10)^2 \qquad & n = 6, 7
\end{aligned}
$$

であって、また $Q(2), Q(3), Q(4)$ は全て平方数ではないので、先に挙げたもの以外の $Q(n)$ は平方数ではありません。 □

上の結果を見れば、

$$n^4 + 34n^2 + 1$$

は、$n = 1$ のときのみ平方数になることも分かります。

4.4 具体例：別の角度から

まずまず簡単な例が作れたのは良いのですが、角度が・・・有名角で行けないでしょうか？

そこで方向を変えて、角度はあらかじめ指定してやってみることにしましょう。例えば $\theta = \frac{\pi}{4}, \xi = \frac{\pi}{6}$ で固定しておいて、何倍すれば一致するかを考えて見ましょう。

研究課題 **8** 双曲線 H_1：

$$H_1: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

を角度 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてから更に x 軸方向に $A > 0$ 倍した曲線 C_2：

$$C_2: \quad \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{A} + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{a^2} - \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{A} + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{b^2} = 1$$

と、双曲線 H_2：

$$H_2: \quad \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1 \qquad (c, d > 0)$$

を角度 $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させたもの：

$$C_3: \quad \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2}{c^2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{d^2} = 1$$

が一致するように A, c, d を定めることは常に出来るのだろうか？

一致するための条件は連立方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2A^2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{d^2}\dfrac{1}{4} & (4.7)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{d^2}\dfrac{3}{4} & (4.8)\\ \dfrac{1}{4A^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\right)^2\dfrac{3}{16} & (4.9)\end{cases}$$

ですので、$a^2=b^2$ である場合はこれらを満たす c^2,d^2,A^2 は存在しません。

$a^2\neq b^2$ であれば (4.7),(4.8) から c^2,d^2 を A^2 で表すことができます：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}3&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\ \frac{1}{d^2}\end{pmatrix}&=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\begin{pmatrix}\frac{2}{A^2}\\ 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\ \frac{1}{d^2}\end{pmatrix}&=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\begin{pmatrix}3&-1\\1&-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{2}{A^2}\\ 2\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{-8}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\begin{pmatrix}-3&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{A^2}\\ 2\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\begin{pmatrix}3&-1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{A^2}\\ 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{4A^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\begin{pmatrix}3-A^2\\ 1-3A^2\end{pmatrix}\\ &=\frac{b^2-a^2}{4a^2b^2}\begin{pmatrix}\frac{3}{A^2}-1\\ \frac{1}{A^2}-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

この時点で

$$\begin{cases}A^2<\frac{1}{3} & a^2<b^2\\ 3<A^2 & a^2>b^2\end{cases}$$

であることが必要になります。そしてこれを (4.9) に代入して A^2 の 2 次方程式が得られます。

$$\begin{aligned}\frac{1}{4A^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2&=\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)^2\frac{3}{16}\\ &=\left\{\frac{1}{4A^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)4(1-A^2)\right\}^2\frac{3}{16}\\ \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2&=\frac{3}{4A^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2(1-A^2)^2\\ 4A^2(a^2+b^2)^2&=3(a^2-b^2)^2(1-A^2)^2\\ \frac{4(a^2+b^2)^2}{3(a^2-b^2)^2}A^2&=(A^2-1)^2\\ 0&=A^4-2\left\{1+\frac{2(a^2+b^2)^2}{3(a^2-b^2)^2}\right\}A^2+1\end{aligned}$$

判別式は正であり、解の和・積が正なのでこの方程式を満たす A^2 が２つ存在します。また、

$$f(X)=X^2-2\left\{1+\frac{2(a^2+b^2)^2}{3(a^2-b^2)^2}\right\}X+1$$

と置けば、

$$\begin{aligned}f(3)&=9-2\left\{1+\frac{2(a^2+b^2)^2}{3(a^2-b^2)^2}\right\}3+1=4-4\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}<0\\ f\left(\frac{1}{3}\right)&=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\left\{1+\frac{2(a^2+b^2)^2}{3(a^2-b^2)^2}\right\}+1=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}<0\end{aligned}$$

ですから、２つの解は互いに逆数であって、一方が $\frac{1}{3}$ より小さく、もう一方が 3 より大きいことが分かります。

以上から題意をみたすような c,d,A は（$a\neq b$ であれば）必ず存在します。この制限 $a\neq b$ は、$\theta=\frac{\pi}{4}$ としたことによって発生していると考えられます。

$a^2=b^2$ の場合は、『斜めの拡大』が丁度漸近線方向の拡大になっていて、回転要素が入らないことが障害の原因でしょう。

4.4.1　派生した問題

$a^2-b^2=1,\ a^2+b^2=3$ であるとき、すなわち、$a^2=2,b^2=1$ であるとき、

$$0=A^4-14A^2+1=(A^2-7)^2-48$$

から $A^2=7\pm4\sqrt{3}$ です。A がもっと簡単になる例が欲しいですね。

$f(X)=0$ の判別式は

$$\begin{aligned}D &= \left\{1+\frac{2(a^2+b^2)^2}{3(a^2-b^2)^2}\right\}^2-1 \\ &= \frac{4(a^2+b^2)^4}{9(a^2-b^2)^4}+\frac{4(a^2+b^2)^2}{3(a^2-b^2)^2} \\ &= \frac{4(a^2+b^2)^2}{9(a^2-b^2)^4}\left\{(a^2+b^2)^2+3(a^2-b^2)^2\right\} \\ &= \frac{16(a^2+b^2)^2}{9(a^2-b^2)^4}(a^4+b^4-a^2b^2)\end{aligned}$$

ですから、$a^4+b^4-a^2b^2$ の部分が平方数になると良いのですが。

例えば $a^2=5, b^2=8$ であれば

$$a^4+b^4-a^2b^2=5^2+8^2-40=49=7^2$$

などですが・・・

研究課題 9

$$a^4+b^4-a^2b^2=p^2$$

を満たす正の整数の組 (a,b,p) を求めてください。もしくは、a^2, b^2 が整数であれば良いという意味で

$$m^2+n^2-mn=p^2$$

を満たす正の整数の組 (m,n,p) を求めてください。

２つ目の問題を考えます。両辺を n^2 で割れば

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2+1-\frac{m}{n}=\left(\frac{p}{n}\right)^2$$

ですから、問題は

$$x^2-x+1=y^2, \quad \text{すなわち} \quad y^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

の有理解を求める問題に帰着され、更に両辺に 4 を掛ければ

$$(2y)^2-(2x-1)^2=3$$

ですから、$2y=v, 2x-1=w$ として

$$v^2-w^2=3$$

の有理数解を求める問題が現れます。

研究課題 10

$$v^2-w^2=3$$

を満たす有理数の組：(v,w) を求めてください。

自明な解 $(v,w)=(2,1)$ を基にして傾き有理数の直線を使って有理解を求めてみましょう。双曲線 $v^2-w^2=3$ 上の $(2,-1)$ 以外の任意の有理点と点 $(2,1)$ を結ぶ直線の傾きは有理数であることに注意します。

$(2,1)$ を通り傾きが有理数 t である直線：

$$w-1=t(v-2)$$

と双曲線 $v^2-w^2=3$ の交点を求めると、

$$\begin{aligned}0 &= v^2-\{t(v-2)+1\}^2-3 \\ &= (1-t^2)v^2-2t(1-2t)v-(1-2t)^2-3 \\ &= (v-2)\{(1-t^2)v+2t^2-2t+2\}\end{aligned}$$

より $t\neq\pm1$ のとき

$$(v,w)=\left(\frac{2(t^2-t+1)}{t^2-1}, -\frac{t^2-4t+1}{t^2-1}\right)$$

が得られます（対称性があるので、符号は気にしなくて良いでしょう）。

事実 4.4

$$v^2-w^2=3$$

の有理数解は、$(2,-1)$ と

$$(v,w)=\left(\frac{2\{t^2-t+1\}}{t^2-1}, -\frac{t^2-4t+1}{t^2-1}\right) \quad (t\neq\pm1)$$

で全てです。

例えば $t=0,2$ のときに $(\mp 2,1)$ が得られ、$t=3$ のときに $\left(\frac{7}{4},\frac{1}{4}\right)$ が得られます。これは元の問題に帰れば $\{a^2,b^2\}=\{5,8\}$ に対応しています（実は $t=5$ も同じです）：

$$5^2+8^2-5\cdot 8=25+64-40=49=7^2$$

このとき

$$A^4-2\frac{365}{27}A^2+1=0$$

の２解は $A^2=27,\ \frac{1}{27}$ であって、$a^2=5<8=b^2$ の場合を考えれば $A^2=\frac{1}{27}$ です。

c^2,d^2 も求めると

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\ \frac{1}{d^2}\end{pmatrix}=\frac{b^2-a^2}{4a^2b^2}\begin{pmatrix}\frac{3}{A^2}-1\\ \frac{1}{A^2}-3\end{pmatrix}=\frac{3}{4\cdot 40}\begin{pmatrix}81-1\\ 27-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{9}{20}\end{pmatrix}$$

です。

あるいは $a^2=8,b^2=5$ と考えた場合は $A^2=27$ であって、

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{c^2}\\ \frac{1}{d^2}\end{pmatrix}=\frac{b^2-a^2}{4a^2b^2}\begin{pmatrix}\frac{3}{A^2}-1\\ \frac{1}{A^2}-3\end{pmatrix}=\frac{-3}{4\cdot 40}\begin{pmatrix}\frac{1}{9}-1\\ \frac{1}{27}-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{60}\\ \frac{1}{18}\end{pmatrix}$$

です。

4.4.2 最初の例

問題 4.5 双曲線 H_1：

$$H_1:\quad \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{8}=1$$

を角度 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてから更に x 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{27}}$ 倍した曲線 C_2 と、双曲線 H_2：

$$H_2:\quad \frac{x^2}{\frac{2}{3}}-\frac{y^2}{\frac{20}{9}}=1$$

を角度 $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させた曲線 C_3 が一致することを示してください。

$$\begin{aligned}
C_2:\quad 1&=\frac{\left(\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{5}-\frac{\left(-\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{8}\\
80&=8\left(\sqrt{27}x+y\right)^2-5\left(\sqrt{27}x-y\right)^2\\
&=81x^2+3y^2+26\sqrt{27}xy\\
C_3:\quad 1&=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2}{\frac{2}{3}}-\frac{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{\frac{20}{9}}\\
&=3\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2}{2}-9\frac{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{20}\\
80&=30\left(\sqrt{3}x+y\right)^2-9\left(x-\sqrt{3}y\right)^2\\
&=81x^2+3y^2+78\sqrt{3}xy
\end{aligned}$$

確かに一致しています。 □

問題 4.6 双曲線 H_1：

$$H_1:\quad \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{5}=1$$

を角度 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてから更に x 軸方向に $\sqrt{27}$ 倍した曲線 C_2 と、双曲線 H_2：

$$H_2:\quad \frac{x^2}{60}-\frac{y^2}{18}=1$$

を角度 $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させた曲線 C_3 が一致することを示してください。

$$C_2: \quad 1 = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{8} - \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{5}$$

$$\begin{aligned}
80 \cdot 27 &= 5\left(x + \sqrt{27}y\right)^2 - 8\left(x - \sqrt{27}y\right)^2 \\
&= -3x^2 - 81y^2 + 26\sqrt{27}xy \\
720 &= -x^2 - 27y^2 + 26\sqrt{3}xy
\end{aligned}$$

$$C_3: \quad 1 = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2}{60} - \frac{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{18}$$

$$\begin{aligned}
60 \cdot 18 \cdot 4 &= 18\left(\sqrt{3}x + y\right)^2 - 60\left(x - \sqrt{3}y\right)^2 \\
10 \cdot 18 \cdot 4 &= 3\left(\sqrt{3}x + y\right)^2 - 10\left(x - \sqrt{3}y\right)^2 \\
&= -x^2 - 27y^2 + 26\sqrt{3}xy
\end{aligned}$$

確かに一致しています。 □

4.4.3　次の例

$t = 4$ に対応するのは $(v, w) = \left(\frac{26}{15}, -\frac{1}{15}\right)$ であり、$a^2 = 8, b^2 = 15$ です（$a^2 = 15, b^2 = 8$ でも良い）。

$$8^2 + 15^2 - 8 \cdot 15 = 64 + 225 - 120 = 169 = 13^2$$

このとき

$$\begin{aligned}
0 &= A^4 - 2\left\{1 + \frac{2(a^2 + b^2)^2}{3(a^2 - b^2)^2}\right\} A^2 + 1 \\
&= A^4 - 2\frac{1205}{147}A^2 + 1
\end{aligned}$$

の解は $A^2 = \frac{3}{49}$ であり（$a^2 < b^2$ に注意）、

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{d^2} \end{pmatrix} = \frac{b^2 - a^2}{4a^2b^2}\begin{pmatrix} \frac{3}{A^2} - 1 \\ \frac{1}{A^2} - 3 \end{pmatrix} = \frac{7}{480}\begin{pmatrix} 48 \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

です。

問題 4.7 双曲線 H_1：

$$H_1: \quad \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{15} = 1$$

を角度 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてから更に x 軸方向に $\frac{\sqrt{3}}{7}$ 倍した曲線 C_2 と、双曲線 H_2：

$$H_2: \quad \frac{x^2}{\frac{10}{7}} - \frac{y^2}{\frac{36}{7}} = 1$$

を角度 $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させた曲線 C_3 が一致することを示してください。

$$C_2: \quad 1 = \frac{\left(\frac{7}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{8} - \frac{\left(-\frac{7}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2}{15}$$

$$\begin{aligned}
720 &= 15\left(7x + \sqrt{3}y\right)^2 - 8\left(7x - \sqrt{3}y\right)^2 \\
&= 343x^2 + 21y^2 + 322\sqrt{3}xy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3: \quad 1 &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2}{\frac{10}{7}} - \frac{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{\frac{36}{7}} \\
&= 7\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2}{10} - 7\frac{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{36} \\
360 \cdot 4 &= 252\left(\sqrt{3}x + y\right)^2 - 70\left(x - \sqrt{3}y\right)^2 \\
720 &= 126\left(\sqrt{3}x + y\right)^2 - 35\left(x - \sqrt{3}y\right)^2 \\
&= 343x^2 + 21y^2 + 322\sqrt{3}xy
\end{aligned}$$

確かに一致しています。 □

4.4.4　整数解探索

$t = \frac{2}{3}$ としても出てくるのは $a^2 = 8, b^2 = 5$ です。$t = \frac{1}{3}$ は $t = 3$ と同じでしょう。何か違うものが出てくるのを探してみると、$t = \frac{3}{4}$ のとき $a^2 = 15, b^2 = 7$ があります：

$$15^2 + 7^2 - 15 \cdot 7 = 169 = 13^2$$

あるいは、$t = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ のときは $a^2 = 16, b^2 = 21$：

$$16^2 + 21^2 - 16 \cdot 21 = 361 = 19^2$$

$t = \frac{4}{5}$ のときは $a^2 = 8, b^2 = 3$：

$$8^2 + 3^2 - 8 \cdot 3 = 49 = 7^2$$

事実 4.8

$$m^2 + n^2 - mn = p^2 \qquad (m > n > 0)$$

の整数解は例えば以下のものがあります：

$$(m, n, p) = (8, 3, 7),\ (8, 5, 7),\ (15, 7, 13),\ (15, 8, 13),\ (21, 16, 19),$$

$(8, 3, 7), (8, 5, 7)$ のペアと、$(15, 7, 13), (15, 8, 13)$ のペアは面白いですね。どういう仕組みでしょうか？

$$\begin{aligned} 8^2 + 3^2 - 8 \cdot 3 &= 8^2 + 5^2 - 8 \cdot 5 \\ 8(5 - 3) &= 5^2 - 3^2 \\ (5 + 3)(5 - 3) &= (5 + 3)(5 - 3) \end{aligned}$$

ああ、こう云うわけでしたか。じゃあ、

$$\begin{aligned} (n + m)(n - m) &= (n + m)(n - m) \\ n^2 - m^2 &= (n + m)n - (n + m)m \\ n^2 - (n + m)n &= m^2 - (n + m)m \\ (n + m)^2 + n^2 - (n + m)n &= (n + m)^2 + m^2 - (n + m)m \end{aligned}$$

ですから、$(n + m, n, p)$ が 1 つの整数解なら $(n + m, m, p)$ も解になるということです。これによれば $(21, 5, 19)$ も解であることが分かります：

$$21^2 + 5^2 - 5 \cdot 21 = 361 = 19^2$$

もう 1 つはっきりさせておかなくてはならないのは、t と $\frac{1}{t}$ の関係でしょう。

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{2(t^2 - t + 1)}{t^2 - 1} \\ v\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{2\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1\right)}{\frac{1}{t^2} - 1} = \frac{2(1 - t + t^2)}{1 - t^2} = -v(t) \\ w(t) &= -\frac{t^2 - 4t + 1}{t^2 - 1} \\ w\left(\frac{1}{t}\right) &= -\frac{\frac{1}{t^2} - \frac{4}{t} + 1}{\frac{1}{t^2} - 1} = -\frac{1 - 4t + t^2}{1 - t^2} = -w(t) \end{aligned}$$

事実 4.9

$$\left(v\left(\frac{1}{t}\right), w\left(\frac{1}{t}\right)\right) = (-v(t), -w(t))$$

事実 4.10

$$v^2 - w^2 = 3$$

の有理数解は、$(2, -1)$ と

$$(v, w) = \left(\frac{2\{t^2 - t + 1\}}{t^2 - 1}, -\frac{t^2 - 4t + 1}{t^2 - 1}\right) \quad (t \neq \pm 1)$$

で全てです。

$$(v, w) = \left(\frac{2\{t^2 - t + 1\}}{t^2 - 1}, -\frac{t^2 - 4t + 1}{t^2 - 1}\right) = (2y, 2x - 1)$$

を解けば

$$x = \frac{t^2 - 2t}{t^2 - 1}, \quad y = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}$$

であり、$x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{n}$ によれば適当な整数 Q によって

$$m = (t^2 - 2t)Q, \quad n = (t^2 - 1)Q, \quad p = (t^2 - t + 1)Q$$

が得られます：

$$(t^2 - 2t)^2 + (t^2 - 1)^2 - (t^2 - 2t)(t^2 - 1) = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1 = (t^2 - t + 1)^2$$

以上から、$m^2+n^2-mn=p^2$ の整数解 $((t^2-2t)Q,(t^2-1)Q,(t^2-t+1)Q)$ が得られます。

一方、

$$(v,w)=\left(\frac{2\{t^2-t+1\}}{t^2-1},\frac{t^2-4t+1}{t^2-1}\right)=(2y,2x-1)$$

を解けば

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1},\quad y=\frac{t^2-t+1}{t^2-1}$$

であり、$x=\frac{m}{n},y=\frac{p}{n}$ によればやはり適当な整数 Q によって

$$m=(2t-1)Q,\quad n=(t^2-1)Q,\quad p=(t^2-t+1)Q$$

が得られます：

$$(2t-1)^2+(t^2-1)^2-(2t-1)(t^2-1)=t^4-2t^3+3t^2-2t+1=(t^2-t+1)^2$$

以上から、$m^2+n^2-mn=p^2$ の整数解 $((2t-1)Q,(t^2-1)Q,(t^2-t+1)Q)$ が得られます。

このとき

$$(t^2-2t)+(2t-1)=t^2-1$$

であることに注意します。

実はこれは t を $\frac{2t-1}{t-2}$ に変換することによって得られます：

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)&=2\frac{\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)^2-\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)+1}{\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)^2-1}\\
&=2\frac{(2t-1)^2-(2t-1)(t-2)+(t-2)^2}{(2t-1)^2-(t-2)^2}\\
&=2\frac{3t^2-3t+3}{3t^2-3}\\
&=v(t)\\
w\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)&=-\frac{\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)^2-4\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)+1}{\left(\frac{2t-1}{t-2}\right)^2-1}\\
&=-\frac{(2t-1)^2-4(2t-1)(t-2)+(t-2)^2}{(2t-1)^2-(t-2)^2}\\
&=-\frac{-3t^2+12t-3}{3t^2-3}\\
&=-w(t)
\end{aligned}$$

また、$(v,w)=(2,-1)$ に対応するのは $(m,n,p)=(0,n,n)$ の場合であり、$t=1$ は $(m,n,p)=(-1,0,1)$、$t=-1$ は $(3,0,3)$ に対応しています。

事実 4.11

$$m^2+n^2-mn=p^2$$

の整数解 (m,n,p) は、有理数 t によって

$$\left(t^2-2t,t^2-1,t^2-t+1\right)$$

を基に作られるものしかありません。

『基に作られる』というのは、（全てを同時に）定数倍したり、あるいは公倍数で割ったり、m,n の符号を同時に変えたり、p の符号を変えたりすることです。

あるいは $t=\frac{j}{k}$ と置いて

$$x=\frac{\frac{j^2}{k^2}-2\frac{j}{k}}{\frac{j^2}{k^2}-1}=\frac{j^2-2jk}{j^2-k^2},\quad y=\frac{\frac{j^2}{k^2}-\frac{j}{k}+1}{\frac{j^2}{k^2}-1}=\frac{j^2-jk+k^2}{j^2-k^2}$$

から

$$m=j^2-2jk,\quad n=j^2-k^2,\quad p=j^2+k^2-jk$$

とする手もあります：

$$\begin{aligned}(j^2-2jk)^2+(j^2-k^2)^2-(j^2-2jk)(j^2-k^2)&=j^4-2j^3k+3j^2k^2-2jk^3+k^4\\&=(j^2+k^2-jk)^2\end{aligned}$$

事実 4.12

$$m^2+n^2-mn=p^2$$

の正の整数解 (m,n,p) は、整数 j,k によって

$$\left(j^2-2jk,j^2-k^2,j^2+k^2-jk\right)$$

を基に作られるものしかありません。

【証明】m,n,p は正の整数で $m^2+n^2-mn=p^2$ を満たしていると仮定します。

$n=0$ のとき、$m^2=p^2$ ですから、$m=p$ であって、$j=k=\sqrt{m}$ とすれば

$$\begin{aligned}-(j^2-2jk)&=m\\-(j^2-k^2)&=0=n\\j^2+k^2-jk&=m=p\end{aligned}$$

が得られます。

$n\neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{m}{n}\right)^2+1-\frac{m}{n}&=\left(\frac{p}{n}\right)^2\\\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}&=\left(\frac{p}{n}\right)^2\\3&=\left(\frac{2p}{n}\right)^2-\left(\frac{2m}{n}-1\right)^2\end{aligned}$$

が成り立っていますから、$\left(\frac{2p}{n},\frac{2m}{n}-1\right)$ は双曲線 $v^2-w^2=3$ 上の有理点であり、$m=n=p$ でない限り $(2,1)$ ではないのでそう仮定すれば

$$\left(\frac{2p}{n},\frac{2m}{n}-1\right)=\left(\frac{2\{t^2-t+1\}}{t^2-1},-\frac{t^2-4t+1}{t^2-1}\right)$$

となるような $t\neq\pm1$ が存在します。

このとき

$$\frac{p}{n}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},\quad \frac{m}{n}=\frac{2t-1}{t^2-1}$$

ですから、先の注意を参考にすれば

$$\frac{p}{n}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},\quad \frac{m}{n}=\frac{t^2-2t}{t^2-1}$$

となるような t が存在します。ここで $t=\frac{j}{k}$ と置けば

$$\frac{p}{n}=\frac{j^2-jk+k^2}{j^2-k^2},\quad \frac{m}{n}=\frac{j^2-2jk}{j^2-k^2}$$

ですから、題意の通りに作られるものであることが分かります。

$m=n=p$ の時は明らかに $k=2j,j=\sqrt{\frac{m}{3}}$ とすれば

$$\begin{aligned}-(j^2-2jk)&=-\left(\frac{m}{3}-\frac{4m}{3}\right)=m\\-(j^2-k^2)&=-\left(\frac{m}{3}-\frac{4m}{3}\right)=m\\j^2+k^2-jk&=\frac{m}{3}+\frac{4m}{3}-\frac{2m}{3}=m\end{aligned}$$

となって題意の通りのものであることは明らかです。

以上から、件の正の整数解 (m,n,p) は、ある整数 j,k と正の整数 Q によって

$$m=Q|j^2-2jk|,\quad n=Q|j^2-k^2|,\quad p=Q|j^2+k^2-jk|$$

と書くことが出来ます。 □

傾きが有理数の直線を使いましたが、$v^2-w^2=3$ に対してではなく、$x^2-x+1=y^2$ の形のところでこの方法を使ってしまうという手もあります。

この曲線は自明な有理点 $(1,1)$ を通りますから、直線 $y-1=t(x-1)$ との交点を求めると

$$\begin{aligned}0&=y^2-x^2+x-1\\&=\{t(x-1)+1\}^2-x^2+x-1\\&=(t^2-1)x^2+(1+2t-2t^2)x+t^2-2t\\&=(x-1)\{(t^2-1)x-t^2+2t\}\end{aligned}$$

となって $t\neq\pm1$ のとき $x=\frac{t^2-2t}{t^2-1}$ を得ます。このとき $y=\frac{-t^2+t-1}{t^2-1}$ ですから

$$\frac{m}{n}=x=\frac{t^2-2t}{t^2-1},\quad \frac{p}{n}=y=\frac{-t^2+t-1}{t^2-1}$$

が得られ、

$$m=Q(t^2-2t),\quad n=Q(t^2-1),\quad p=-Q(t^2-t+1)$$

と置けば（正負は別にして）、$m^2+n^2-mn=p^2$ を満たしています。このとき $(m,n,-p),(-m,-n,\pm p)$ も同じ式を満たしていることに注意します。

符号を吟味すると $t<0,2<t$ であれば $t^2-2t>0$ であり、$t<-1,1<t$ であれば $t^2-1>0$ ですから、これらが同符号であるためには $t<-1,2<t$ もしくは $0<t<1$ であれば良いでしょう。p に関しては $t^2-t+1>0$ に注意します。

以上から、互いに素な組は少なくとも

$$\begin{aligned}t<-1\text{ または }2<t\text{ のとき}\quad & m=t^2-2t,\quad n=t^2-1,\quad p=t^2-t+1\\0<t<1\text{ のとき}\quad & m=2t-t^2,\quad n=1-t^2,\quad p=t^2-t+1\end{aligned}$$

の形をしていることが分かりました。

なんだかすっかり深入りしてしまいましたね。

4.5 一般の角度での再検討

双曲線

$$H_1:\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\qquad(a,b>0)$$

を角度 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だけ回転させてから更に x 軸方向に $A>0$ 倍した曲線

$$C_2:\quad \frac{\left(\cos\theta\dfrac{x}{A}+\sin\theta y\right)^2}{a^2}-\frac{\left(-\sin\theta\dfrac{x}{A}+\cos\theta y\right)^2}{b^2}=1$$

が、双曲線

$$H_3:\quad \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1\qquad(c,d>0)$$

を角度 $0<\xi<\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた双曲線：

$$H_4:\quad \frac{(\cos\xi x+\sin\xi y)^2}{c^2}-\frac{(-\sin\xi x+\cos\xi y)^2}{d^2}=1$$

と一致する条件を求めます。

曲線 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2A^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2A^2}\right)x^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y^2\\&\qquad+\frac{2}{A}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin\theta\cos\theta xy=1\end{aligned}$$

であり、H_4 は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\cos^2\xi}{c^2}-\frac{\sin^2\xi}{d^2}\right)x^2+\left(\frac{\sin^2\xi}{c^2}-\frac{\cos^2\xi}{d^2}\right)y^2\\&\qquad+2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\sin\xi\cos\xi xy=1\end{aligned}$$

となりますから、これらが一致するための条件は連立方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{A^2}\left(\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}-\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}\right)=\dfrac{\cos^2\xi}{c^2}-\dfrac{\sin^2\xi}{d^2}\\\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}-\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}=\dfrac{\sin^2\xi}{c^2}-\dfrac{\cos^2\xi}{d^2}\\\dfrac{1}{A}\sin2\theta\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)=\sin2\xi\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\right)\end{cases}$$

です。ここで仮に

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}=L,\quad \frac{\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\theta}{b^2}=M,\quad \sin2\theta\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=N$$

としておきましょう。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ならば $N\neq0$ です。

$$\begin{cases}\dfrac{L}{A^2}=\dfrac{\cos^2\xi}{c^2}-\dfrac{\sin^2\xi}{d^2}\\M=\dfrac{\sin^2\xi}{c^2}-\dfrac{\cos^2\xi}{d^2}\\\dfrac{N}{A}=\sin2\xi\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\right)\end{cases}$$

第１・２式を辺々加えて

$$\frac{L}{A^2}+M=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{d^2}$$

であり、辺々引けば

$$\frac{L}{A^2}-M=\cos 2\xi\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)$$

ですから、

$$\begin{cases}\dfrac{L}{A^2}+M=\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{d^2}\\ \dfrac{L}{A^2}-M=\cos 2\xi\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\right)\\ \dfrac{N}{A}=\sin 2\xi\left(\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2}\right)\end{cases}$$

とも変形されます。

参考までに ξ を消去すると

$$\left(\frac{L}{A^2}-M\right)^2+\frac{N^2}{A^2}=\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)^2$$

とも書けます。更に

$$\left(\frac{L}{A^2}+M\right)^2=\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{d^2}\right)^2=\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)^2-\frac{4}{c^2d^2}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}\left(\frac{L}{A^2}-M\right)^2-\left(\frac{L}{A^2}+M\right)^2+\frac{N^2}{A^2}&=\frac{4}{c^2d^2}\\ \frac{N^2}{A^2}-\frac{4LM}{A^2}&=\frac{4}{c^2d^2}\\ \frac{N^2-4LM}{A^2}&=\frac{4}{c^2d^2}\\ A^2&=\frac{N^2-4LM}{4}c^2d^2\end{aligned}$$

とも書けます。ここで

$$\begin{aligned}N^2-4LM&=\sin^2 2\theta\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4b^4}-4\frac{(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta)(b^2\sin^2\theta-a^2\cos^2\theta)}{a^4b^4}\\ a^4b^4(N^2-4LM)&=\sin^2 2\theta(a^4+2a^2b^2+b^4)\\ &\quad-4\left\{b^4\cos^2\theta\sin^2\theta+a^4\cos^2\theta\sin^2\theta-a^2b^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\right\}\\ &=4a^2b^2\left\{2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^4\theta\right\}\\ &=4a^2b^2\\ N^2-4LM&=\frac{4}{a^2b^2}\end{aligned}$$

が得られますから、結局、

$$A^2=\frac{c^2d^2}{a^2b^2}\quad\text{すなわち、}\quad A=\frac{cd}{ab}$$

であることが分かります。

4.5.1 $\xi=\frac{\pi}{4}$ の場合

$\xi=\frac{\pi}{4}$ の場合は

$$\begin{cases}\dfrac{L}{A^2}+M=\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{d^2} & (4.10)\\ \dfrac{L}{A^2}-M=0 & (4.11)\\ \dfrac{N}{A}=\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{d^2} & (4.12)\end{cases}$$

第２式から $L=MA^2$ であり、$M\neq 0$ であれば $A=\sqrt{\frac{L}{M}}$ です。

$M=0$ の場合第２式から $L=0$ でもあって、これは $c=d,a=b,\theta=\frac{\pi}{4}$ を意味しますから、ほぼ自明なケースです。

4.5.2 $\xi \neq \frac{\pi}{4}, \xi = \frac{\pi}{2} - \theta$ の場合

$\xi \neq \frac{\pi}{4}$ であれば

$$\frac{N}{A} = \tan 2\xi \left(\frac{L}{A^2} - M\right)$$
$$NA = \tan 2\xi (L - MA^2)$$
$$MA^2 + \frac{N}{\tan 2\xi} A - L = 0$$

となって A の 2 次（以下の）方程式が得られます（$M = 0$ のときは 1 次方程式）。

$M = 0$ のときは、$b^2 \sin^2\theta = a^2 \cos^2\theta$ であって、

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ですから、丁度双曲線 H_1 の漸近線の 1 つが回転によって座標軸（y 軸）に一致するケースです。$L = 0$ の場合も同様で、この場合はもう一方の漸近線が回転によって座標軸（x 軸）に一致します。

$\xi = \frac{\pi}{2} - \theta$ であれば、$\tan 2\xi = -\tan 2\theta$ であり、

$$\frac{N}{\tan 2\xi} = \frac{\sin 2\theta}{-\tan 2\theta}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = -\cos 2\theta \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

であって、また

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\cos 2\theta}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \\
&= \frac{1}{2a^2b^2}\left\{(b^2 - a^2) + \cos 2\theta (a^2 + b^2)\right\} \\
M &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{\cos 2\theta}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \\
&= \frac{1}{2a^2b^2}\left\{(b^2 - a^2) - \cos 2\theta (a^2 + b^2)\right\}
\end{aligned}$$

ですから、方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)(A^2 - 1) - \frac{\cos 2\theta}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(A^2 + 2A + 1) \\
&= (b^2 - a^2)(A^2 - 1) - \cos 2\theta (a^2 + b^2)(A^2 + 2A + 1)
\end{aligned}$$

となり、$A = -1$ を解にもちます。解と係数の関係によりもう一方の解は

$$A = \frac{(b^2 - a^2) + \cos 2\theta (a^2 + b^2)}{(b^2 - a^2) - \cos 2\theta (a^2 + b^2)} = \frac{L}{M}$$

です。

4.6 離心率の推移

離心率が $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ である双曲線：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 回転し、x-軸方向に $A > 0$ 倍拡大したものと、双曲線：$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$ を $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ 回転したものが一致する条件は

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{A^2}\left(\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} - \dfrac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = \dfrac{\cos^2\xi}{c^2} - \dfrac{\sin^2\xi}{d^2} \\
\dfrac{\sin^2\theta}{a^2} - \dfrac{\cos^2\theta}{b^2} = \dfrac{\sin^2\xi}{c^2} - \dfrac{\cos^2\xi}{d^2} \\
\dfrac{1}{A}\sin 2\theta \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) = \sin 2\xi \left(\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}\right)
\end{cases}$$

です。ここで

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2} = L, \quad \frac{\sin^2\theta}{a^2} - \frac{\cos^2\theta}{b^2} = M, \quad \sin 2\theta \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = N$$

と置けば（$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である限りは $N \neq 0$ です）、

$$\begin{cases}
\dfrac{L}{A^2} = \dfrac{\cos^2\xi}{c^2} - \dfrac{\sin^2\xi}{d^2} \\
M = \dfrac{\sin^2\xi}{c^2} - \dfrac{\cos^2\xi}{d^2} \\
\dfrac{N}{A} = \sin 2\xi \left(\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}\right)
\end{cases}$$

です。ここから ξ を消去すれば

$$\begin{cases}
\dfrac{L}{A^2} + M = \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{d^2} \\
\sqrt{\left(\dfrac{L}{A^2} - M\right)^2 + \dfrac{N^2}{A^2}} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}
\end{cases}$$

となりますから、

$$\frac{1}{c^2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{A^2}-M\right)^2+\frac{N^2}{A^2}}+\frac{L}{A^2}+M}{2}$$
$$\frac{1}{d^2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{A^2}-M\right)^2+\frac{N^2}{A^2}}-\frac{L}{A^2}-M}{2}$$

が分かります。

ここで

$$\left(\frac{L}{A^2}-M\right)^2+\frac{N^2}{A^2}-\left(\frac{L}{A^2}+M\right)^2=\frac{N^2}{A^2}-4\frac{LM}{A^2}=\frac{1}{A^2}(N^2-4LM)$$

であり、また

$$\begin{aligned}N^2-4LM&=\sin^2 2\theta\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-4\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)\\&=4\sin^2\theta\cos^2\theta\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{2}{a^2b^2}\right)\\&\qquad-4\left\{\cos^2\theta\sin^2\theta\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)-\frac{1}{a^2b^2}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\right\}\\&=\frac{4}{a^2b^2}\left(\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^\theta+\sin^4\theta\right)\\&=\frac{4}{a^2b^2}>0\end{aligned}$$

ですから、上の c^2, d^2 は正の値として求まっていることが分かります。

拡大後の離心率 $\epsilon(A)$ が双曲線 $\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{d^2}=1$ の離心率に一致することから

$$\epsilon(A)^2=1+\frac{d^2}{c^2}=1+\frac{\sqrt{\left(\frac{L}{A^2}-M\right)^2+\frac{N^2}{A^2}}+\frac{L}{A^2}+M}{\sqrt{\left(\frac{L}{A^2}-M\right)^2+\frac{N^2}{A^2}}-\frac{L}{A^2}-M}$$

です。

$$\epsilon(A)^2=1+\frac{\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}+L+MA^2}{\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}-L-MA^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2=\frac{\begin{array}{c}\left(\frac{(L-MA^2)(-2MA)+N^2A}{\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}}+2MA\right)\left(\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}-L-MA^2\right)\\-\left(\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}+L+MA^2\right)\left(\frac{(L-MA^2)(-2MA)+N^2A}{\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}}-2MA\right)\end{array}}{\left(\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}-L-MA^2\right)^2}$$

ここで $Q=(L-MA^2)^2+N^2A^2$ と置けば

$$\begin{aligned}&=\frac{\begin{array}{c}\left(\frac{(L-MA^2)(-2MA)+N^2A}{\sqrt{Q}}+2MA\right)\left(\sqrt{Q}-L-MA^2\right)\\-\left(\sqrt{Q}+L+MA^2\right)\left(\frac{(L-MA^2)(-2MA)+N^2A}{\sqrt{Q}}-2MA\right)\end{array}}{\left(\sqrt{Q}-L-MA^2\right)^2}\\&=\frac{\begin{array}{c}\left(2MA\sqrt{Q}+\left\{N^2A-2MA(L-MA^2)\right\}\right)\left(-L-MA^2+\sqrt{Q}\right)\\-\left(-2MA\sqrt{Q}+\left\{N^2A-2MA(L-MA^2)\right\}\right)\left(L+MA^2+\sqrt{Q}\right)\end{array}}{\sqrt{Q}\left(\sqrt{Q}-L-MA^2\right)^2}\end{aligned}$$

であって、右辺の分子は

$$\begin{aligned}（分子）&=-2MA(L+MA^2)-N^2A(L+MA^2)+2MA(L^2-M^2A^4)\\&\quad+2MAQ+N^2A\sqrt{Q}-2MA(L-MA^2)\sqrt{Q}\\&\qquad+2MA(L+MA^2)\sqrt{Q}-N^2A(L+MA^2)+2MA(L^2-M^2A^4)\\&\qquad\quad+2MAQ-N^2A\sqrt{Q}+2MA(L-MA^2)\sqrt{Q}\\&=-2N^2A(L+MA^2)+4MA(L^2-M^2A^4)+4MAQ\\&=-2LN^2A-2MN^2A^3+4L^2MA-4M^3A^5+4MA\{(L-MA^2)^2+N^2A^2\}\\&=(4L^2M-2LN^2)A-2MN^2A^3-4M^4A^5\\&\qquad\qquad+4MA(L^2-2LMA^2+M^2A^4+N^2A^2)\\&=(8L^2M-2LN^2)A+(2MN^2-8LM^2)A^3\\&=A\left\{2L(4LM-N^2)+2M(N^2-4LM)A^2\right\}\\&=2(N^2-4LM)A(MA^2-L)\end{aligned}$$

となり、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2=\frac{2(N^2-4LM)A(MA^2-L)}{\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}\left(\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}-L-MA^2\right)^2}$$

です。

今見たように $N^2-4LM>0$ でしたから、$A>0$ の範囲で $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2=0$ となるのは、$M\neq 0$ かつ L, M が同符号の場合に $A=\sqrt{\frac{L}{M}}$ においてのみであることが分かります。これは先に見たように $\xi=\frac{\pi}{4}$ に相当します。

この時の離心率は

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\sqrt{\frac{L}{M}}\right)^2 &= 1+\frac{\sqrt{\left(L-M\frac{L}{M}\right)^2+N^2\frac{L}{M}}+L+M\frac{L}{M}}{\sqrt{\left(L-M\frac{L}{M}\right)^2+N^2\frac{L}{M}}-L-M\frac{L}{M}}\\ &= \frac{N\sqrt{\frac{L}{M}}+2L}{N\sqrt{\frac{L}{M}}-2L}\\ &= \frac{N+2\sqrt{LM}}{N-2\sqrt{LM}}\end{aligned}$$

です。また、

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\frac{L}{M}\right)^2 &= 1+\frac{\sqrt{\left(L-\frac{L^2}{M}\right)^2+N^2\frac{L^2}{M^2}}+L+\frac{L^2}{M}}{\sqrt{\left(L-\frac{L^2}{M}\right)^2+N^2\frac{L^2}{M^2}}-L-\frac{L^2}{M}}\\ &= 1+\frac{\sqrt{(L-M)^2+N^2}+L+M}{\sqrt{(L-M)^2+N^2}-L-M}\\ &= \epsilon(1)^2\\ &= 1+\frac{b^2}{a^2}=\epsilon^2\end{aligned}$$

にも注意します。

$M=0$ の場合には $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2\neq 0$ です。どうやら L, M の符号によって場合分けが生じるようですので、ここをきちんと見ておかなくてはなりません。

4.6.1　L, M の符号・大小

情報をまとめておきましょう：

$$L=\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2},\qquad M=\frac{\sin^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\theta}{b^2},\qquad N=\sin 2\theta\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$N^2-4LM=\frac{4}{a^2b^2}>0$$

であり、角度 α, β を

$$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{b}{a},\quad \beta=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{a}{b}$$

によって定めれば、

$$L\gtreqqless 0 \iff \alpha\gtreqqless\theta,\qquad M\gtreqqless 0\iff\theta\gtreqqless\beta,\qquad L\gtreqqless M\iff\frac{\pi}{4}\gtreqqless\theta$$

です。

4.6.2　極限値

また

$$\begin{aligned}\epsilon(A)^2 &= 1+\frac{\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}+L+MA^2}{\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}-L-MA^2}\\ &= 1+\frac{\left(\sqrt{(L-MA^2)^2+N^2A^2}+L+MA^2\right)^2}{A^2(N^2-4LM)}\end{aligned}$$

なので、

$$\lim_{A\to+0}\epsilon(A)^2=\begin{cases}+\infty & L>0\\ 2 & L=0\\ 1 & L<0\end{cases},\qquad \lim_{A\to+\infty}\epsilon(A)^2=\begin{cases}+\infty & M>0\\ 2 & M=0\\ 1 & M<0\end{cases}$$

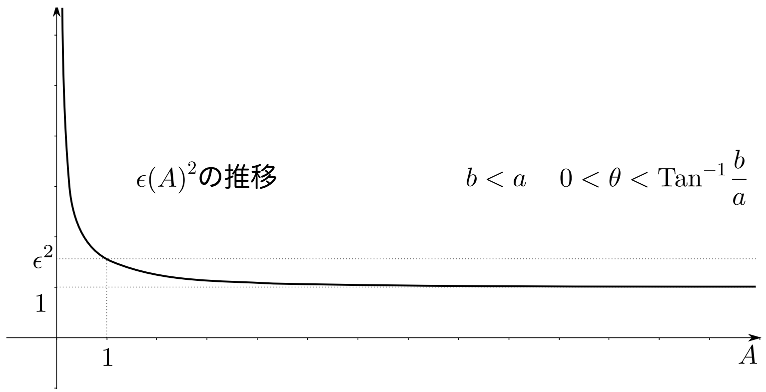
です。

4.6.3　$a>b$ の場合

この場合 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$ です。

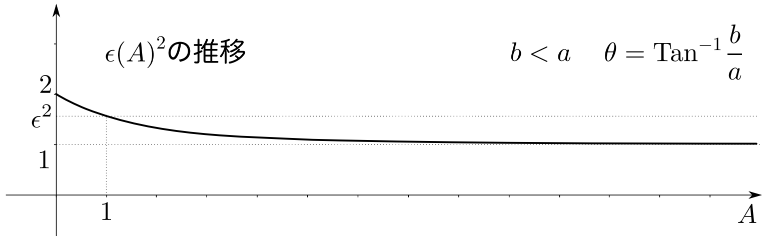
【$0<\theta<\alpha$】このとき $M<0<L$ であって（異符号）、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2<0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$			
$\epsilon(A)^2$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\searrow$	1



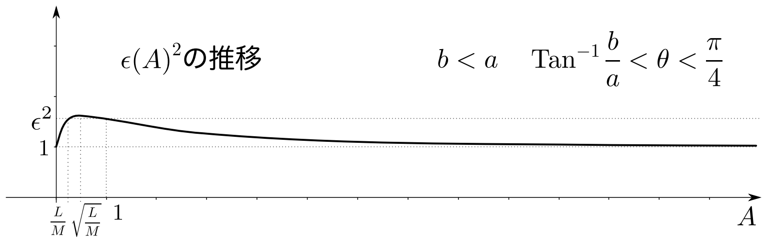
【$\theta=\alpha$】このとき $M<0=L$ であって、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2<0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$			
$\epsilon(A)^2$	2	$\searrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\searrow$	1



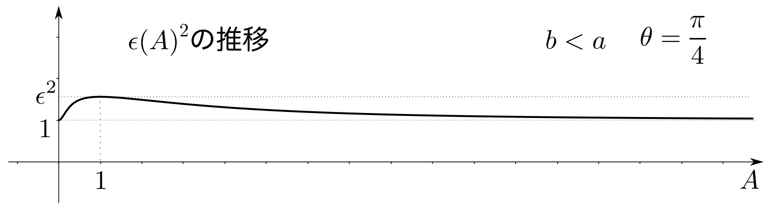
【$\alpha<\theta<\frac{\pi}{4}$】このとき $M<L<0$ であって（同符号）、$A=\sqrt{\frac{L}{M}}>1$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2=0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{\frac{L}{M}}$	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$			0	$-$	
$\epsilon(A)^2$	1	$\nearrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$		$\searrow$	1



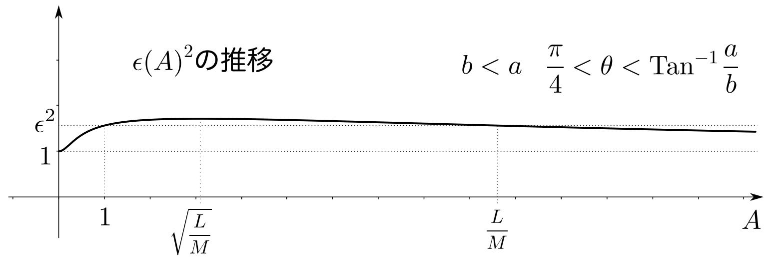
【$\theta=\frac{\pi}{4}$】このとき $M=L<0$ であって (同符号)、$A=\sqrt{\frac{L}{M}}=1$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2=0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$	0	$-$	
$\epsilon(A)^2$	1	$\nearrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\searrow$	1



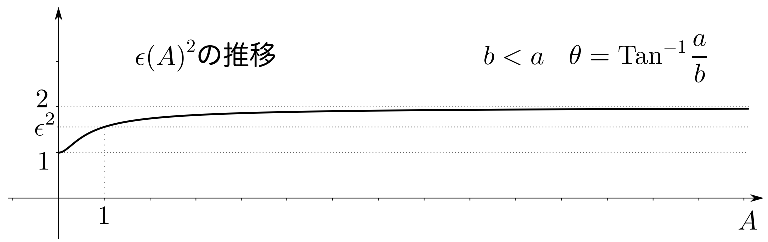
【$\frac{\pi}{4}<\theta<\beta$】このとき $L<M<0$ であって（同符号）、$A=\sqrt{\frac{L}{M}}<1$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2=0$ です：

A	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{L}{M}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$	0	$-$			
$\epsilon(A)^2$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\searrow$	1



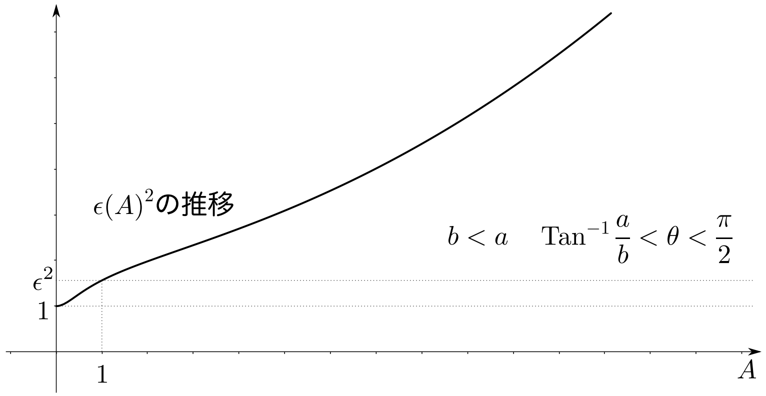
【$\theta=\beta$】このとき $L<0=M$ であって、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2>0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$			
$\epsilon(A)^2$	1	$\nearrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$	2



【$\beta < \theta < \frac{\pi}{2}$】このとき $L < 0 < M$ であって（異符号）、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 > 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$			
$\epsilon(A)^2$	1	$\nearrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

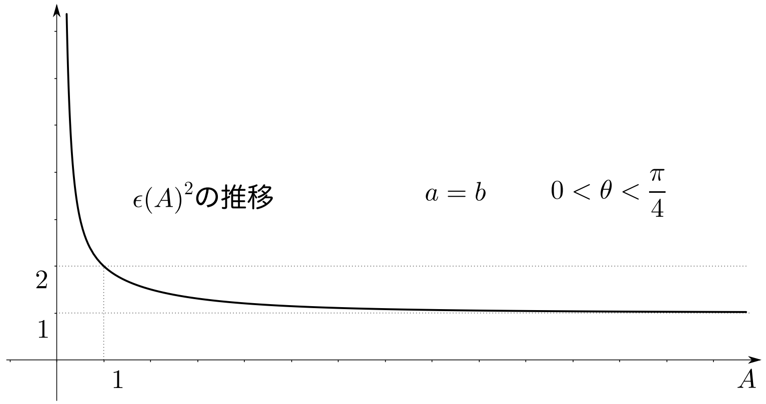


4.6.4　$a = b$ の場合

この場合、$0 < \alpha = \frac{\pi}{4} = \beta < \frac{\pi}{2}$ です。

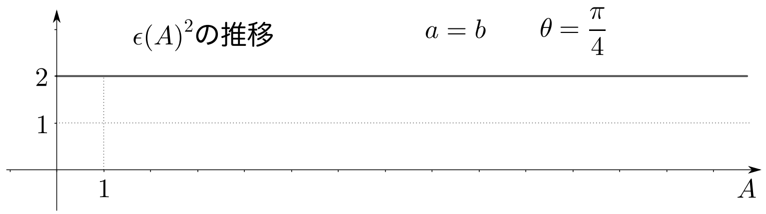
【$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$】このとき $M < 0 < L$ であって（異符号）、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 < 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$			
$\epsilon(A)^2$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	1



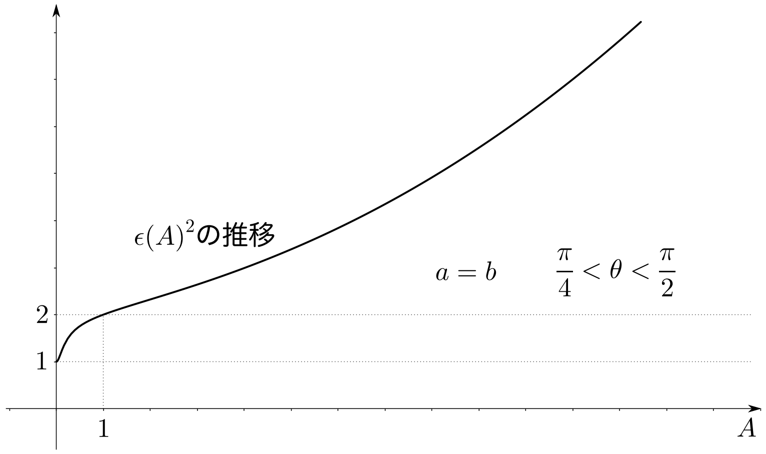
【$\theta = \frac{\pi}{4}$】このとき $L = M = 0$ であって、$\epsilon(A)^2 = 2$（定数関数）です。

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		0			
$\epsilon(A)^2$	2	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	2



【$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$】このとき $L < 0 < M$ であって（異符号）、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 > 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$			
$\epsilon(A)^2$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

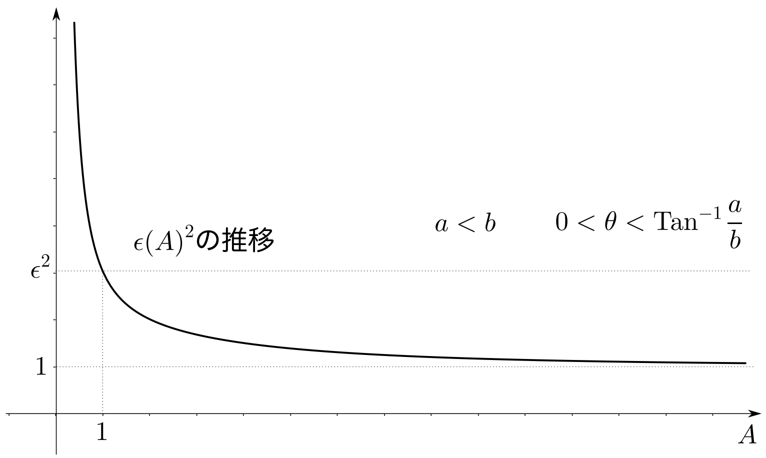


4.6.5　$a < b$ の場合

この場合 $0 < \beta < \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ です。

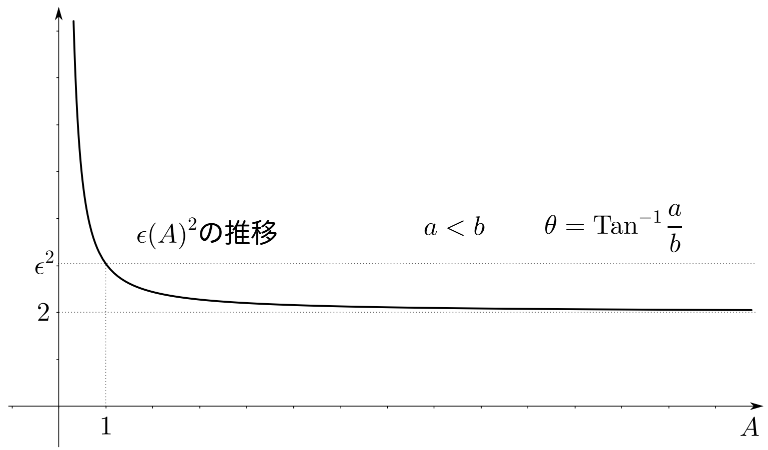
【$0 < \theta < \beta$】このとき $M < 0 < L$ であって（異符号)、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 < 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$			
$\epsilon(A)^2$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\searrow$	1



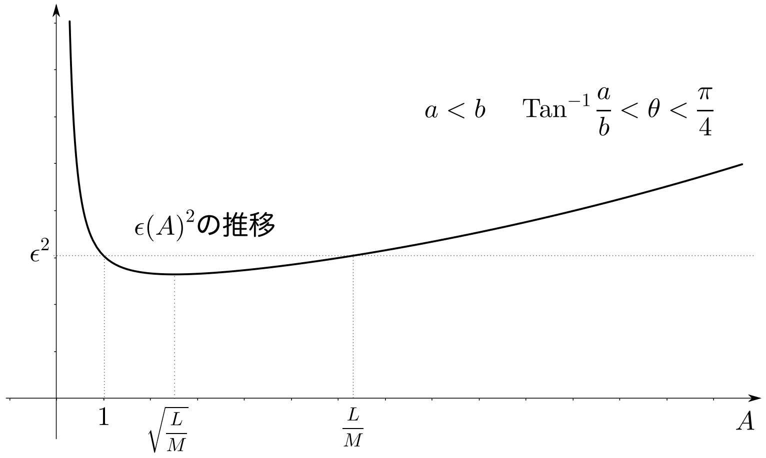
【$\theta = \beta$】このとき $M = 0 < L$ であって、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 < 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$			
$\epsilon(A)^2$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\searrow$	2



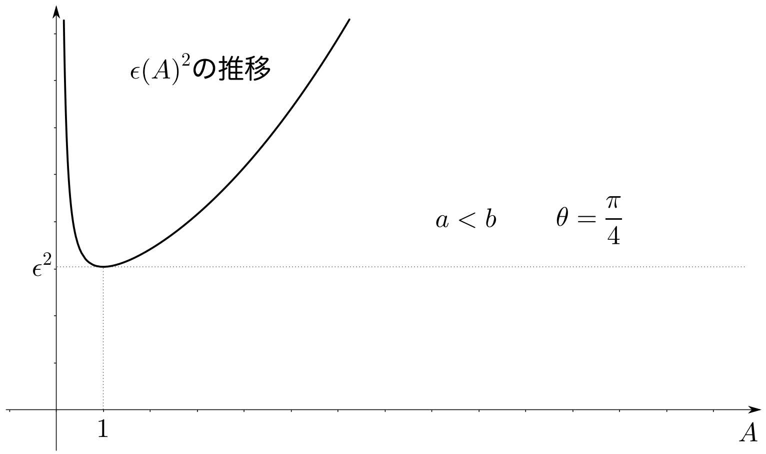
【$\beta < \theta < \frac{\pi}{4}$】このとき $0 < M < L$ であって（同符号)、$A = \sqrt{\frac{L}{M}} > 1$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 = 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{\frac{L}{M}}$	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$			0	$+$	
$\epsilon(A)^2$	$+\infty$	$\searrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$



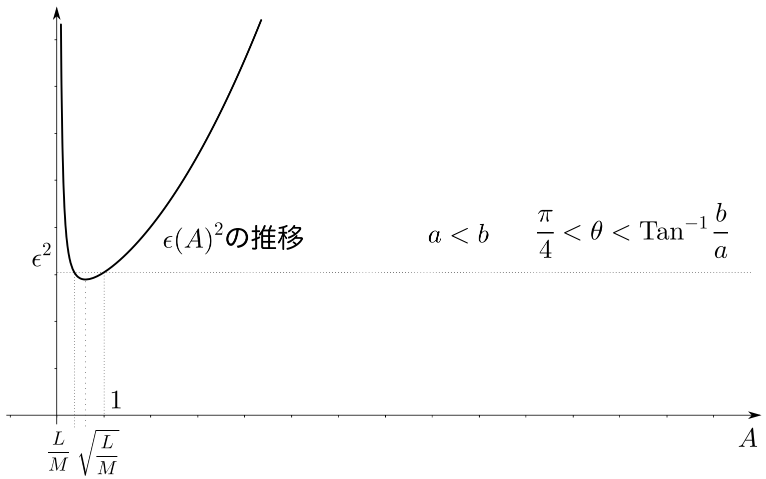
【$\theta = \frac{\pi}{4}$】このとき $0 < M = L$ であって (同符号)、$A = \sqrt{\frac{L}{M}} = 1$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 = 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$	0	$+$	
$\epsilon(A)^2$	$+\infty$	$\searrow$	$1 + \frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$



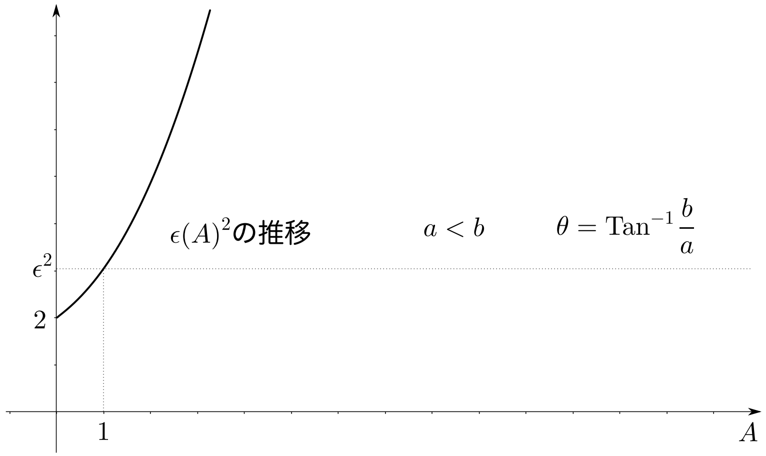
【$\frac{\pi}{4} < \theta < \alpha$】このとき $0 < L < M$ であって (同符号)、$A = \sqrt{\frac{L}{M}} < 1$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 = 0$ です：

A	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{L}{M}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$-$	0		$+$		
$\epsilon(A)^2$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$1 + \frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$



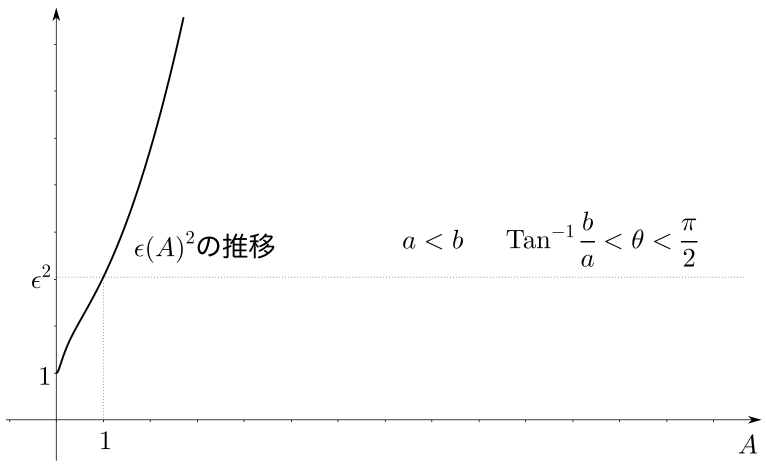
【$\theta = \alpha$】このとき $L = 0 < M$ であって、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 > 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$			
$\epsilon(A)^2$	2	$\nearrow$	$1 + \frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$



【$\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$】このとき $L < 0 < M$ であって（異符号）、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2 > 0$ です：

A	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\epsilon(A)^2$		$+$			
$\epsilon(A)^2$	1	$\nearrow$	$1+\frac{b^2}{a^2}$	$\nearrow$	$+\infty$



5 放物線はどうか

5.1 問題定式化

放物線 $P_1 : x = y^2$ を原点中心に角度 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だけ回転した放物線 C_1 は

$$C_1 : \quad \cos\theta x + \sin\theta y = (-\sin\theta x + \cos\theta y)^2$$

であり、これを x 軸方向に $A > 0$ 倍すると曲線 C_2：

$$C_2 : \quad \cos\theta\frac{x}{A} + \sin\theta y = \left(-\sin\theta\frac{x}{A} + \cos\theta y\right)^2$$

となります。

また、放物線 $P_2 : Kx = y^2$ を $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ だけ回転させ、$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ だけ並行移動した曲線 C_3 は：

$$C_3 : \quad K\cos\xi(x-v) + K\sin\xi(y-w) = \{-\sin\xi(x-v) + \cos\xi(y-w)\}^2$$

で表されますから、C_2 と C_3 が一致するように K, ξ, v, w を決定できるかどうかを見てみましょう。

研究課題 11 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ が与えられたときに、放物線 $P_1 : x = y^2$ を原点中心に角度 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $A > 0$ 倍した曲線 C_2：

$$C_2 : \quad \cos\theta\frac{x}{A} + \sin\theta y = \left(-\sin\theta\frac{x}{A} + \cos\theta y\right)^2$$

が、放物線 $P_2 : Kx = y^2$ を $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ だけ回転させ、更に $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ だけ並行移動した曲線 C_3：

$$C_3 : \quad K\cos\xi(x-v) + K\sin\xi(y-w) = \{-\sin\xi(x-v) + \cos\xi(y-w)\}^2$$

と一致するように K, ξ, v, w を決定できるでしょうか？

C_2 の方程式は、展開すると

$$\sin^2\theta x^2 + A^2\cos^2\theta y^2 - 2A\sin\theta\cos\theta xy - A\cos\theta x - A^2\sin\theta y = 0$$

であり、C_3 は

$$\begin{aligned}
0 &= \{-\sin\xi(x-v)+\cos\xi(y-w)\}^2 - K\cos\xi(x-v) - K\sin\xi(y-w)\\
&= \sin^2\xi(x-v)^2+\cos^2\xi(y-w)^2\\
&\qquad -2\sin\xi\cos\xi(x-v)(y-w) - K\cos\xi(x-v) - K\sin\xi(y-w)\\
&= \sin^2\xi x^2+\cos^2\xi y^2 - 2\sin\xi\cos\xi xy\\
&\qquad -(2v\sin^2\xi-2w\sin\xi\cos\xi+K\cos\xi)x-(2w\cos^2\xi-2v\sin\xi\cos\xi+K\sin\xi)y\\
&\qquad\quad + v^2\sin^2\xi+w^2\cos^2\xi-2vw\sin\xi\cos\xi+Kv\cos\xi+Kw\sin\xi
\end{aligned}$$

ですから、これらが一致する条件は連立方程式：

$$\begin{cases}
T\sin^2\theta = \sin^2\xi & (5.1)\\
TA^2\cos^2\theta = \cos^2\xi & (5.2)\\
TA\sin\theta\cos\theta = \sin\xi\cos\xi & (5.3)\\
TA\cos\theta = 2v\sin^2\xi - 2w\sin\xi\cos\xi + K\cos\xi & (5.4)\\
TA^2\sin\theta = 2w\cos^2\xi - 2v\sin\xi\cos\xi + K\sin\xi & (5.5)\\
0 = v^2\sin^2\xi+w^2\cos^2\xi-2vw\sin\xi\cos\xi+Kv\cos\xi+Kw\sin\xi & (5.6)
\end{cases}$$

を満たす T, K, ξ, v, w が存在することとなります。

まず $(5.1), (5.2)$ から

$$T(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta) = 1, \quad \text{すなわち} \quad T = \frac{1}{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}$$

が分かります。従って

$$\sin^2\xi = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta},$$

すなわち

$$\sin\xi = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}}, \quad \cos\xi = \frac{A\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}}$$

です。この時点で (5.3) は自動的に満たされています。

残る未知数は K, v, w ですが、(5.4),(5.5) から

$$\begin{pmatrix} 2\sin^2\xi & \cos\xi \\ -2\sin\xi\cos\xi & \sin\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w\sin\xi\cos\xi + TA\cos\theta \\ -2w\cos^2\xi + TA^2\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v \\ K \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\sin^2\xi & \cos\xi \\ -2\sin\xi\cos\xi & \sin\xi \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2w\sin\xi\cos\xi + TA\cos\theta \\ -2w\cos^2\xi + TA^2\sin\theta \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sin\xi}\begin{pmatrix} \sin\xi & -\cos\xi \\ 2\sin\xi\cos\xi & 2\sin^2\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2w\sin\xi\cos\xi + TA\cos\theta \\ -2w\cos^2\xi + TA^2\sin\theta \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sin\xi}\begin{pmatrix} 2w\cos\xi + TA\sin\xi\cos\theta - TA^2\cos\xi\sin\theta \\ 2TA\sin\xi\cos\xi\cos\theta + 2TA^2\sin^2\xi\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

がわかり、特に

$$\begin{aligned}
K &= TA(\cos\xi\cos\theta + A\sin\xi\sin\theta)\\
&= TA\left(\frac{A\cos^2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}} + \frac{A\sin^2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}}\right)\\
&= \frac{TA^2}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}}\\
&= \frac{A^2}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}^3}
\end{aligned}$$

が得られます。

最後に v, w ですが、残りの２式：

$$\begin{cases}
2v\sin\xi = 2w\cos\xi + TA\sin\xi\cos\theta - TA^2\cos\xi\sin\theta & (5.7)\\
0 = v^2\sin^2\xi+w^2\cos^2\xi-2vw\sin\xi\cos\xi+Kv\cos\xi+Kw\sin\xi & (5.8)
\end{cases}$$

から求められるか見てみましょう。

(5.7) は、整理すると

$$\begin{aligned}
2v\sin\xi &= 2w\cos\xi + TA\sin\xi\cos\theta - TA^2\cos\xi\sin\theta\\
&= 2w\cos\xi + \frac{TA\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}} - \frac{TA^3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}}\\
2v\sin\xi - 2w\cos\xi &= TA(1-A^2)\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}}\\
&= A(1-A^2)\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}^3}
\end{aligned}$$

であって、(5.8) は変形すると

$$\begin{aligned}
(v\sin\xi - w\cos\xi)^2 &= -K(v\cos\xi + w\sin\xi)\\
&= -\frac{A^2}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}^3}(v\cos\xi+w\sin\xi)
\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

と置けば、(5.7)、(5.8) は

$$\begin{cases} W = \dfrac{A(A^2-1)}{2} \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3} & (5.9) \\ W^2 = -\dfrac{A^2}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3} V & (5.10) \end{cases}$$

と書けるので

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3}{A^2} W^2 \\ &= -\frac{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3}{A^2} \left\{ \frac{A(A^2-1)}{2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3} \right\}^2 \\ &= -\frac{(A^2-1)^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{4\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3} \end{aligned}$$

となります。従って

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} A\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & A\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} A\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & A\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{(A^2-1)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{4\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}^3} \\ \frac{A(A^2-1)}{2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}^3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(A^2-1)\sin\theta\cos\theta}{4(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)^2} \begin{pmatrix} A\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & A\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(A^2-1)\sin\theta\cos\theta \\ 2A \end{pmatrix} \\ &= \frac{(A^2-1)\sin\theta\cos\theta}{4(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)^2} \begin{pmatrix} -A(A^2-1)\sin\theta\cos^2\theta - 2A\sin\theta \\ -(A^2-1)\sin^2\theta\cos\theta + 2A^2\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり必ず v, w が求まります。 □

5.2 簡単な数値の具体的な例

5.2.1 最初の例

$\theta = \frac{\pi}{4}$ の場合を考えましょう。

$$\begin{aligned} K &= \frac{A^2}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3} = \frac{A^2}{\sqrt{\frac{1+A^2}{2}}^3} = \frac{2\sqrt{2}A^2}{\sqrt{1+A^2}^3} \\ v &= \frac{(A^2-1)\sin\theta\cos\theta}{4(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)^2} \left\{ -A(A^2-1)\sin\theta\cos^2\theta - 2A\sin\theta \right\} \\ &= \frac{(A^2-1)}{4\sqrt{2}(1+A^2)^2} \left\{ -A(A^2-1) - 4A \right\} \\ &= -\frac{A(A^2-1)(2\sqrt{2}A^2+3)}{4\sqrt{2}(1+A^2)^2} \\ w &= \frac{(A^2-1)(3A^2+1)}{4\sqrt{2}(1+A^2)^2} \end{aligned}$$

ですから、例えば $A = \sqrt{3}$ の場合は

$$K = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad v = -\frac{3\sqrt{6}}{32}, \quad w = \frac{5\sqrt{2}}{32}$$

であって、ξ は有名角になってくれます：

$$\sin\xi = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{4}{2}}} = \frac{1}{2}, \quad \cos\xi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{4}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

問題 **5.1** 放物線 $P_1 : x = y^2$ を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍した曲線を C_1、放物線 $P_2 : \frac{3\sqrt{2}}{4}x = y^2$ を $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させ、更に $\begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{6}}{32} \\ \frac{5\sqrt{2}}{32} \end{pmatrix}$ だけ平行移動した放物線を C_2 とするとき、C_1 と C_2 は一致することを示してください。

まず P_1 を回転すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \right)^2 \\ \sqrt{2}(x+y) &= (x-y)^2 \end{aligned}$$

となり、更に拡大すると

$$\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+y\right)=\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-y\right)^2$$
$$\sqrt{6}\left(x+\sqrt{3}y\right)=\left(x-\sqrt{3}y\right)^2$$

となります。これが C_1 の方程式です。

次に P_2 を回転すると

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}x+y\right)=\left(x-\sqrt{3}y\right)^2$$

であり、更に平行移動すると

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\left\{\sqrt{3}\left(x+\frac{3\sqrt{6}}{32}\right)+\left(y-\frac{5\sqrt{2}}{32}\right)\right\}=\left\{\left(x+\frac{3\sqrt{6}}{32}\right)-\sqrt{3}\left(y-\frac{5\sqrt{2}}{32}\right)\right\}^2$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}x+y-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)=\left(x-\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}x+y\right)=\left(x-\sqrt{3}y\right)^2+2\frac{\sqrt{6}}{4}\left(x-\sqrt{3}y\right)$$
$$\sqrt{6}x+3\sqrt{2}y=\left(x-\sqrt{3}y\right)^2$$

です。これが C_2 ですが、C_1 と一致していますね。 □

出来れば（平行移動の部分）もう少し簡単な例が欲しいところですね。

5.2.2 別の例

$$\sin\xi=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}}$$
$$K=\frac{A^2}{\sqrt{\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta}^3}$$
$$\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix}=\frac{(A^2-1)\sin\theta\cos\theta}{4(\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta)^2}\begin{pmatrix}-A(A^2-1)\sin\theta\cos^2\theta-2A\sin\theta\\-(A^2-1)\sin^2\theta\cos\theta+2A^2\cos\theta\end{pmatrix}$$

ですから、$\theta=\frac{\pi}{3}$ であれば

$$\sin\xi=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{A^2}{4}}}=\sqrt{\frac{3}{3+A^2}}$$
$$K=\frac{A^2}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{A^2}{4}}^3}=\frac{8A^2}{\sqrt{3+A^2}^3}$$
$$\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix}=\frac{(A^2-1)\frac{\sqrt{3}}{4}}{4\left(\frac{3}{4}+\frac{A^2}{4}\right)^2}\begin{pmatrix}-A(A^2-1)\frac{\sqrt{3}}{8}-2A\frac{\sqrt{3}}{2}\\-(A^2-1)\frac{3}{8}+2A^2\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{3}(A^2-1)}{8(3+A^2)^2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}A(A^2+7)\\5A^2+3\end{pmatrix}$$

です。ここで $A=\sqrt{3}$ とすれば

$$\sin\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$K=\frac{4}{\sqrt{6}}$$
$$v=-\frac{5\sqrt{3}}{24}$$
$$w=\frac{3\sqrt{3}}{24}$$

なる例が得られます。これも平行移動の部分が複雑ですね。

> **問題 5.2** 放物線 $P_1: x=y^2$ を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍した曲線を C_1、放物線 $P_2: \frac{4}{\sqrt{6}}x=y^2$ を $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させ、更に $\begin{pmatrix}-\frac{5\sqrt{3}}{24}\\\frac{3\sqrt{3}}{24}\end{pmatrix}$ だけ平行移動した放物線を C_2 とするとき、C_1 と C_2 は一致することを示してください。

まず P_1 を回転すると

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2$$
$$2\left(x+\sqrt{3}y\right)=\left(\sqrt{3}x-y\right)^2$$

となり、更に拡大すると

$$2\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}y\right)=\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}}-y\right)^2$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}(x+3y)=(x-y)^2$$

となります。これが C_1 の方程式です。

次に P_2 を回転すると

$$\frac{4}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2$$
$$\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y)=(x-y)^2$$

であり、更に平行移動すると

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\left\{\left(x+\frac{5\sqrt{3}}{24}\right)+\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{24}\right)\right\}=\left\{\left(x+\frac{5\sqrt{3}}{24}\right)-\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{24}\right)\right\}^2$$
$$\frac{4}{\sqrt{3}}\left(x+y+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=\left(x-y+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y)=(x-y)^2+\frac{2}{\sqrt{3}}(x-y)$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}x+2\sqrt{3}y=(x-y)^2$$

です。これが C_2 ですが、C_1 と一致していますね。 □

5.2.3 また別の例

同じ角度 $\theta=\frac{\pi}{3}$ で、$A=3$ の場合、

$$\sin\xi=\sqrt{\frac{3}{3+A^2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$K=\frac{8A^2}{\sqrt{3+A^2}^3}=\frac{72}{\sqrt{12}^3}=\sqrt{3}$$
$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{3}(A^2-1)}{8(3+A^2)^2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}A(A^2+7) \\ 5A^2+3 \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{3}\cdot 8}{8\cdot 12^2}\begin{pmatrix} -48\sqrt{3} \\ 48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

です。これはいいですね。

> **問題 5.3** 放物線 $P_1 : x=y^2$ を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、更に x 軸方向に 3 倍した曲線を C_1、放物線 $P_2 : \sqrt{3}x=y^2$ を $\frac{\pi}{6}$ だけ回転させ、更に $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ だけ平行移動した放物線を C_2 とするとき、C_1 と C_2 は一致することを示してください。

まず P_1 を回転すると

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2$$
$$2\left(x+\sqrt{3}y\right)=\left(\sqrt{3}x-y\right)^2$$

となり、更に拡大すると

$$2\left(\frac{x}{3}+\sqrt{3}y\right)=\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}-y\right)^2$$
$$2(x+3\sqrt{3}y)=(x-\sqrt{3}y)^2$$

となります。これが C_1 の方程式です。

次に P_2 を回転すると

$$\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$
$$2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x+y\right)=\left(x-\sqrt{3}y\right)^2$$

であり、更に平行移動すると

$$2\sqrt{3}\left\{\sqrt{3}\,(x+1)+\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}=\left\{(x+1)-\sqrt{3}\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^2$$
$$2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x+y\right)+4=\left(x-\sqrt{3}y+2\right)^2$$
$$2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x+y\right)=\left(x-\sqrt{3}y\right)^2+4\left(x-\sqrt{3}y\right)$$
$$2x+6\sqrt{3}y=\left(x-\sqrt{3}y\right)^2$$

です。これが C_2 ですが、C_1 と一致していますね。 □

5.2.4 ついでにこれも

ってことは、$\theta = \frac{\pi}{6}$ なら $A = \frac{1}{3}$ って事でしょうか。

$$\sin\xi = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}}$$
$$K = \frac{A^2}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3}$$
$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \frac{(A^2-1)\sin\theta\cos\theta}{4(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)^2}\begin{pmatrix} -A(A^2-1)\sin\theta\cos^2\theta - 2A\sin\theta \\ -(A^2-1)\sin^2\theta\cos\theta + 2A^2\cos\theta \end{pmatrix}$$

ですから、$\theta = \frac{\pi}{6}$ であれば

$$\sin\xi = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3A^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1+3A^2}}$$
$$K = \frac{A^2}{\sqrt{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}^3} = \frac{A^2}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3A^2}{4}}^3} = \frac{8A^2}{\sqrt{1+3A^2}^3}$$
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} &= \frac{(A^2-1)\sin\theta\cos\theta}{4(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)^2}\begin{pmatrix} -A(A^2-1)\sin\theta\cos^2\theta - 2A\sin\theta \\ -(A^2-1)\sin^2\theta\cos\theta + 2A^2\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{(A^2-1)\frac{\sqrt{3}}{4}}{4\left(\frac{1}{4} + \frac{3A^2}{4}\right)^2}\begin{pmatrix} -A(A^2-1)\frac{3}{8} - A \\ -(A^2-1)\frac{\sqrt{3}}{8} + \sqrt{3}A^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}(A^2-1)}{(1+3A^2)^2}\begin{pmatrix} -A(A^2-1)\frac{3}{8} - A \\ -(A^2-1)\frac{\sqrt{3}}{8} + \sqrt{3}A^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ですから、更に $A = \frac{1}{3}$ であれば

$$\sin\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$K = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$v = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$
$$w = -\frac{1}{3}$$

で行けそうです。

問題 5.4 放物線 $P_1 : x = y^2$ を原点中心に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転し、更に x 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍した曲線を C_1、放物線 $P_2 : \frac{1}{\sqrt{3}}x = y^2$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させ、更に $\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ だけ平行移動した放物線を C_2 とするとき、C_1 と C_2 は一致することを示してください。

まず P_1 を回転すると

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$
$$2\left(\sqrt{3}x + y\right) = \left(x - \sqrt{3}y\right)^2$$

となり、更に拡大すると

$$2\left(3\sqrt{3}x + y\right) = \left(3x - \sqrt{3}y\right)^2$$

となります。これが C_1 の方程式です。

次に P_2 を回転すると

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{3}y\right) = \left(\sqrt{3}x - y\right)^2$$

であり、更に平行移動すると

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\left(x - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\left(y + \frac{1}{3}\right)\right\} = \left\{\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - \left(y + \frac{1}{3}\right)\right\}^2$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{3}y\right) + \frac{4}{9} = \left(\sqrt{3}x - y - \frac{2}{3}\right)^2$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \sqrt{3}y\right) = \left(\sqrt{3}x - y\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{3}x - y\right)$$
$$2\sqrt{3}x + \frac{2}{3}y = \left(\sqrt{3}x - y\right)^2$$

です。これが C_2 ですが、C_1 と一致していますね。 □