２次元一次変換と曲線

1 λ_1^n, λ_2^n を x_n, y_n で表すこと　その１　強引な直接計算

1.1 A^n を A, E で表す

２次正方行列 A が２つの異なる固有値 λ_1, λ_2 をもつとき、

$$A^n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} A + \frac{\lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E$$

となるので、点 (x_0, y_0) から出発して次々に A で移して行った点を (x_n, y_n) とすると

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_1^n \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

となっています。これを変形すると

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \lambda_1^n \left\{ A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} + \lambda_2^n \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left((A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり、右辺の行列は

$$\begin{aligned} &\left| (A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| + \left| A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad -A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| \\ &\qquad + \left| -\lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| + \left| -\lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad -A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| + \left| -\lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad -A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| + \left| A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad -\lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 - \lambda_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \left| A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

となりますから、$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ が A の固有ヴェクターでない限り正則です。

固有ヴェクターである場合は点の動きは自明になりますので、ここでは出発点の位置ヴェクターは固有ヴェクターでない場合のみ考えます。すると

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2) \left((A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と云う風に解くことが出来ます。そこでこの逆行列を実際に求めてみましょう。

1.2 逆行列の一般的な形

一般に $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ が平行でない場合に行列 $M = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみましょう。

a_j をそれぞれ $\frac{\pi}{2}$ 回転したヴェクター

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_j$$

は a_j と直交するので、試しに計算してみると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \right\} \\ {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 \right\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \right\} \mathrm{a}_1 & 0 \\ 0 & {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 \right\} \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{a}_2 \, {}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{a}_1 \, {}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{a}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 & 0 \\ 0 & {}^t\mathrm{a}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となっていますが、一般に

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{pmatrix} a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

つまり

事実 1.1

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix} = {}^t\mathrm{a}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 .$$

であることによれば

$$\mathrm{a}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_1 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{a}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix}$$

ですから、

$$\begin{pmatrix} {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \right\} \\ {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 \right\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_1 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

となっていることになり、修正して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -{}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \right\} \\ {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 \right\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_1 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix} E \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} -{}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \right\} \\ {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 \right\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix} = E$$

を得ます。

事実 1.2 $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ が平行でないとき、次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} -{}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_2 \right\} \\ {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{a}_1 \right\} \end{pmatrix} .$$

すると、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} & (\lambda_1 E - A)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} (A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} & (\lambda_1 E - A)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} -{}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} \\ {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (A-\lambda_2 E) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって逆行列が求められます。しかも先に見た計算（＊）によれば分母の行列式は少し簡単になって

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} & (\lambda_1 E - A)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)\begin{vmatrix} A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} -{}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} \\ {}^t\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (A-\lambda_2 E) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

です。

1.3 結論

いま求めた逆行列を使えば、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\lambda_1^n\\ \lambda_2^n\end{pmatrix} &= (\lambda_1-\lambda_2)\left((A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (\lambda_1E-A)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\left|A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\begin{pmatrix} -{}^t\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}(\lambda_1E-A)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right\}\\ {}^t\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}(A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right\}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\left|A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\begin{pmatrix} {}^t\left\{(A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}\\ {}^t\left\{(A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\left|A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\begin{pmatrix} {}^t\left\{(A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\\ {}^t\left\{(A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ですが、事実 (1.1) によれば

$$= \frac{1}{\left|A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\begin{pmatrix}\left|(A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\right|\\ \left|(A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\right|\end{pmatrix}$$

と書けることが分かります。

これは行列式の性質からもう少し変形することが出来て、

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^n\\ \lambda_2^n\end{pmatrix} = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\begin{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|\\ \left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|\end{pmatrix}$$

あるいは対称性を重視して

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^n\\ \lambda_2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\\[2ex] \dfrac{\left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\end{pmatrix}$$

とも書くことが出来ます。

2 ２つの異なる正の固有値をもつ場合

$\lambda_j > 0$ の場合、

$$\lambda_j^n = (\mathrm{e}^n)^{\log\lambda_j}$$

に注意すれば、任意の n に対して

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\frac{1}{\log\lambda_1}} = \left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\frac{1}{\log\lambda_2}}$$

従って

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1}$$

が成り立っていますから、点列 $\{(x_n, y_n)\}_n$ は方程式：

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1}$$

の表す曲線上にあることが分かります。

では実際にこの曲線が行列 A の表す一次変換の不動曲線であることを示してみましょう。

異なる２つの実固有値をもつ行列 A は対角化可能ですので、対角化を

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

とします。するとこの行列 P を使って

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\left| A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2} \\
&= \left\{ \frac{|P^{-1}|\left| A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{|P^{-1}|\left| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2} \\
&= \left\{ \frac{\left| P^{-1}APP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P^{-1}(A-\lambda_1 E)PP^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad P^{-1}(A-\lambda_1 E)PP^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2} \\
&= \left\{ \frac{\left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2}
\end{aligned}$$

と変形できることになりますが、ここで分子の行列式をよく見ると、右のヴェクターは最終的に $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}$ が掛けられていますから、このヴェクターの第１成分は 0 です。従って行列式で言えば $(1,2)$-成分が 0 であることが分かります。

今度は左のヴェクターですが、最後に対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ が掛けられていますが、この掛け算は第１成分を λ_1 倍、第２成分を λ_2 倍することです。

行列式全体を見れば、左のヴェクターの第２成分は行列式の計算の時に右のヴェクターの第１成分と掛け合わされる運命にあるわけで、そこはさっき見た様に 0 でしたから、この部分（左のヴェクターの第２成分）は結局どんな値であろうとも行列式の計算には影響を与えません。従って λ_2 の部分が仮に λ_1 であったとしても、行列式の値は変わりません。従って

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\left| A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2} \\
&= \left\{ \frac{\left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2} \\
&= \left\{ \frac{\left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2} \\
&= \left\{ \frac{\lambda_1\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2} \\
&= (\lambda_1)^{\log\lambda_2}\left\{ \frac{\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|}{\left| P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right|} \right\}^{\log\lambda_2}
\end{aligned}$$

となります。すると今度はさっきと逆の変形をしていけば

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda_1)^{\log\lambda_2}\left\{\frac{\left|P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad P^{-1}(A-\lambda_1E)PP^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|P^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad P^{-1}(A-\lambda_1E)PP^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_2} \\
&= (\lambda_1)^{\log\lambda_2}\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_2}
\end{aligned}
$$

の形に変形出来ます。全く同様に、

$$
\left\{\frac{\left|A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1} = (\lambda_2)^{\log\lambda_1}\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1}
$$

とも変形されますが、

$$
(\lambda_1)^{\lambda_2} = \left(\mathrm{e}^{\lambda_1}\right)^{\lambda_2} = \mathrm{e}^{\lambda_1\lambda_2} = \left(\mathrm{e}^{\lambda_2}\right)^{\lambda_1} = (\lambda_2)^{\lambda_1}
$$

であり、点 (x, y) が件の曲線上にあったことによれば

$$
\left\{\frac{\left|A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1}
$$

が分かりますから、結局点 (x, y) を A で移した点も同じ曲線上に乗っていることが分かります。従って不動曲線であることが分かります。

事実 2.1 A が２つの異なる正の固有値 λ_1, λ_2 をもち、点 (x_0, y_0) の位置ヴェクターが固有ヴェクターでないとき、この点を通って一次変換 A で自分自身に移る曲線は以下の通り：

$$
\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1}.
$$

点 (x_0, y_0) の位置ヴェクターが固有ヴェクターである場合は、点 (x_0, y_0) と原点を通る直線が不動曲線になります。

点 (x_0, y_0) を固有ヴェクター $\mathbb{v}_j$ を使って

$$
\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = r_1\mathbb{v}_1 + r_2\mathbb{v}_2
$$

と分解した場合、

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} &= (A-\lambda_1E)(r_1\mathbb{v}_1 + r_2\mathbb{v}_2) = r_2(\lambda_2-\lambda_1)\mathbb{v}_2 \\
(A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} &= (A-\lambda_2E)(r_1\mathbb{v}_1 + r_2\mathbb{v}_2) = r_1(\lambda_1-\lambda_2)\mathbb{v}_1
\end{aligned}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right| &= \left|r_1\mathbb{v}_1 + r_2\mathbb{v}_2 \quad r_2(\lambda_2-\lambda_1)\mathbb{v}_2\right| = r_1r_2(\lambda_2-\lambda_1)\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right| \\
\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right| &= \left|r_1\mathbb{v}_1 + r_2\mathbb{v}_2 \quad r_1(\lambda_1-\lambda_2)\mathbb{v}_1\right| = r_1r_2(\lambda_2-\lambda_1)\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|
\end{aligned}
$$

となりますから、曲線の方程式は

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_1E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad (A-\lambda_2E)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1}$$

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad r_2(\lambda_2-\lambda_1)\mathbb{v}_2\right|}{r_1r_2(\lambda_2-\lambda_1)\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad r_1(\lambda_1-\lambda_2)\mathbb{v}_1\right|}{r_1r_2(\lambda_2-\lambda_1)\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\right\}^{\log\lambda_1}$$

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \mathbb{v}_2\right|}{r_1\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \mathbb{v}_1\right|}{r_2\left|\mathbb{v}_2 \quad \mathbb{v}_1\right|}\right\}^{\log\lambda_1}$$

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \mathbb{v}_2\right|}{r_1\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\mathbb{v}_1 \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|}{r_2\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\right\}^{\log\lambda_1}$$

$$\left\{\frac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \mathbb{v}_2\right|}{\left|\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \quad \mathbb{v}_2\right|}\right\}^{\log\lambda_2} = \left\{\frac{\left|\mathbb{v}_1 \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|}{\left|\mathbb{v}_1 \quad \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right|}\right\}^{\log\lambda_1}$$

とも変形出来ます。ここで

$$\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1 & \mathbb{v}_2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\begin{pmatrix} -{}^t\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\mathbb{v}_2\right\} \\ {}^t\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\mathbb{v}_1\right\}\end{pmatrix}$$

によれば

$$\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1 & \mathbb{v}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\begin{pmatrix} -{}^t\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\mathbb{v}_2\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ {}^t\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\mathbb{v}_1\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\begin{pmatrix} -{}^t\mathbb{v}_2\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ {}^t\mathbb{v}_1\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

であり、また

$$\left|\mathbb{a}_1 \quad \mathbb{a}_2\right| = {}^t\mathbb{a}_1\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\mathbb{a}_2.$$

に注意すれば

$$\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1 & \mathbb{v}_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\left|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \mathbb{v}_2\right|}{\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|} \\ \dfrac{\left|\mathbb{v}_1 \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|}{\left|\mathbb{v}_1 \quad \mathbb{v}_2\right|}\end{pmatrix}$$

です（クラメルの公式）。

3 λ_1^n, λ_2^n を x_n, y_n で表すこと　その２　対角化による計算

A が異なる２つの固有値 λ_1, λ_2 をもつとき、それぞれの固有値に対応した固有ヴェクターを $\mathbb{v}_j$ として $P = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1 & \mathbb{v}_2 \end{pmatrix}$ と置けば、

$$
\begin{aligned}
AP &= A\begin{pmatrix} \mathbb{v}_1 & \mathbb{v}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A\mathbb{v}_1 & A\mathbb{v}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbb{v}_1 & \lambda_2\mathbb{v}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と対角化されます。これによって

$$
A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}
$$

が分かりますから、

$$
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}
$$