

無限和の具体的計算（オリジナル版／草稿）

笠井剛

Wednesday 10th October, 2018

目次

第 1 章	整数の逆数の和 べきを含まない場合	1
1.1	正整数の逆数の和	1
1.2	連続 2 数の積の逆数の和	6
1.3	連続 3 数の積の逆数の和	11
第 2 章	負べきの和とその仲間たち	37
2.1	負べきの和	37
2.2	解の負べきの和と係数の関係	51
2.3	Fourier 級数	55
2.4	留数計算	58
第 3 章	その他の級数	61
3.1	η 関数など	61
3.2	Ramanujan の公式	67
3.3	Bell 数	70
3.4	cosecant	71
3.5	Inverse tangent integral	72
3.6	べきを付加して調和数を収束させたもの	72
3.7	Digamma 関数の有理数での値を使った表示	73
3.8	$\sin$ の和と digamma	73

第 1 章

整数の逆数の和 べきを含まない場合

1.1 正整数の逆数の和

正整数・正奇数の逆数の和・交代和

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty \quad (1.1)$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty \quad (1.2)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2 \quad (1.3)$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4} \quad (1.4)$$

(1) 【N.Oresme の方法】 $n+1$ 項目から連続 n 項の和は

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

となっており、どんな n に対しても

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

ですから収束しません。

(2) 【N.Oresme の方法】 同様に

$$\frac{1}{2(n+1)-1} + \frac{1}{2(n+2)-1} + \cdots + \frac{1}{2(2n)-1} > \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$$

ですからこれも収束しません。

(3) 【区分求積法】

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\
&= \log 2
\end{aligned}$$

なので、収束するならばその値は $\log 2$ であることが分かります。

しかし単調減少な交代級数は項の絶対値が 0 に収束していれば収束します。実際、

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \log 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

によれば $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \log 2$ が分かります。従って S_n は $\log 2$ に収束します。

(4) 【Taylor 展開を利用する方法】等比級数の和の公式から $|t| < 1$ の範囲で

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$$

ですが、 $|x| < 1$ のとき両辺積分すれば

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \cdots \\
\tan^{-1} x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots
\end{aligned}$$

である事が分かります。このままではこの級数展開式は $|x| < 1$ の範囲でのみ正当化されているわけですが、詳しい計算（以下の Abel の定理）によれば実はこの等式は $x = 1$ でも成立している事が分かります。これは即ち両辺で $x = 1$ と置けば

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

が得られると云う事です。

定理 1.1.1 [Abel の定理]

前提条件： (i) べき級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径は 1 である。

(ii) この級数は $x = 1$ でも収束している。

主張内容： (iii) このべき級数は $[0, 1]$ で一様収束します。

(iv) 関数 $f(x) = \sum a_n x^n$ は $(-1, 1]$ で連続関数になります。

$\sum a_k x^k$ の部分 and を $T_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 、 $\sum a_k$ の部分 and を $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と書くことにします。
 $\sum a_n$ は収束しますから、任意の正数 $d > 0$ に対してある正の整数 N で、 $N < m < n$ なる任意の m, n について

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < d$$

が成立するようなものが存在します。すると、

$$\begin{aligned} |T_n - T_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n a_k x^k \right| \\ &= \left| \sum_{k=m+1}^n (S_k - S_{k-1}) x^k \right| \\ &= \left| \sum_{k=m+1}^n (S_k - S_m - S_{k-1} + S_m) x^k \right| \end{aligned}$$

と変形できるので

$$\begin{aligned} |T_n - T_m| &= |(S_{m+1} - S_m)x^{m+1} + (S_{m+2} - S_m - S_{m+1} + S_m)x^{m+2} + \\ &\quad \cdots + (S_n - S_m - S_{n-1} + S_m)x^n| \\ &= |(S_{m+1} - S_m)(x^{m+1} - x^{m+2}) + (S_{m+2} - S_m)(x^{m+2} - x^{m+3}) + \\ &\quad \cdots + (S_{n-1} - S_m)(x^{n-1} - x^n) + (S_n - S_m)x^n| \end{aligned}$$

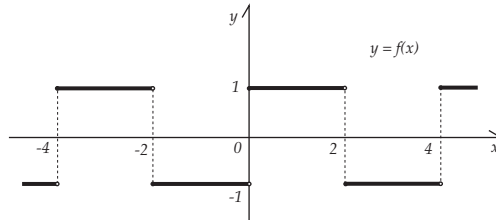
であって $0 \leq x \leq 1$ の範囲では

$$\begin{aligned} &\leq |(S_{m+1} - S_m)(x^{m+1} - x^{m+2})| + |(S_{m+2} - S_m)(x^{m+2} - x^{m+3})| + \\ &\quad \cdots + |(S_{n-1} - S_m)(x^{n-1} - x^n)| + |(S_n - S_m)x^n| \\ &= |S_{m+1} - S_m| (x^{m+1} - x^{m+2}) + |S_{m+2} - S_m| (x^{m+2} - x^{m+3}) + \\ &\quad \cdots + |S_{n-1} - S_m| (x^{n-1} - x^n) + |S_n - S_m| x^n \\ &\leq d \{ (x^{m+1} - x^{m+2}) + (x^{m+2} - x^{m+3}) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) + x^n \} \\ &= dx^{m+1} \\ &\leq d \end{aligned}$$

が成り立っているため数列 $\{T_n\}$ は $[0, 1]$ 上で一様収束します。従って $f(x)$ は $[0, 1]$ 上で連続関数である事になり、元々収束半径の内部の任意の閉区間で一様収束していて従って連続関数であった事と合わせれば、 $f(x)$ は $(-1, 1]$ で連続関数である事が分かります。

【Fourier 級数を利用する方法】 まずは次の周期 4 の周期関数 $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-2 \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < 2) \\ f(x+4) = f(x) & \text{for all } x \end{cases}$$



の Fourier 係数、Fourier 級数を求めましょう。

まず C_0 ですが $f(x)$ は奇関数（正確には有限個の点で破綻しているが、積分には影響しない）ですから

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = 0$$

です。また、 $f(x)$ に偶関数である $\cos \frac{n\pi}{2}x$ を掛けた関数も奇関数ですので、 $n \neq 0$ の時も同様に $C_n = 0$ となります。

次に D_n ですが、 $\sin \frac{n\pi}{2}x$ は奇関数なので、奇関数 $f(x)$ と掛けると偶関数になります。

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2}x dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2}x dx \\ &= \int_0^2 \sin \frac{n\pi}{2}x dx \\ &= \left[-\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}x \right]_0^2 \\ &= -\frac{2}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \end{aligned}$$

以上により、 $f(x)$ の Fourier 級数は、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \sin \frac{n\pi}{2} x \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} x + \cdots \right) \end{aligned}$$

となります。

$x = 1$ では元の関数とその Fourier 級数は一致していますから（連続点なので）、

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \cdots \right) \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \end{aligned}$$

が得られます。

1.2 連続 2 数の積の逆数の和

連続 2 数の積の逆数の和・交代和

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1 \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots = \log 2 \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots = 1 - \log 2 \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \cdots = 2 \log 2 - 1 \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \cdots = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \log 2 \quad (1.10)$$

連続 2 奇数の積の逆数の和・交代和

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2} \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots = \frac{\pi}{8} \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \cdots = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} - \cdots = \frac{\coth^{-1} \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \left(= -\frac{\sqrt{2}}{8} \log(3 - 2\sqrt{2}) \right) \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \cdots = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \quad (1.16)$$

(5) Telescopic.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

(6) Taylor 展開。 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$

(7) これは (5) - (6)。

(8) これは (5) - 2 (7)。

(9) Taylor 展開。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \cdots &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \cdots \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

(10) Taylor 展開。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \cdots &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \right) - 1 \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots \right) - 1 \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \right) - 1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2 - 1 \end{aligned}$$

(11) Telescopic. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots \right) = \frac{1}{2}$

(12) Taylor 展開。 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \right) = \frac{\pi}{8}$

(13) これは (11) - (12)。

(14) Taylor 展開。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \cdots &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \cdots \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(15) 【Taylor 展開を使った計算】

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

によれば、

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}(e^{ix}) &= e^{ix} + \frac{1}{3} e^{i3x} + \frac{1}{5} e^{i5x} + \cdots \\ \tanh^{-1}(e^{-ix}) &= e^{-ix} + \frac{1}{3} e^{-i3x} + \frac{1}{5} e^{-i5x} + \cdots \\ \frac{\tanh^{-1}(e^{ix}) + \tanh^{-1}(e^{-ix})}{2} &= \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \cdots \end{aligned}$$

なので、両辺 $x = \frac{\pi}{4}$ のときの値を比較すれば

$$\begin{aligned} \frac{\tanh^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}) + \tanh^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}})}{2} &= \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{4} + \cdots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} - \cdots \right) \\ \frac{\tanh^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}) + \tanh^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}})}{2\sqrt{2}} &= \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} - \cdots \end{aligned}$$

ですが、 $\tanh$ の加法定理から

$$\tanh \{ \tanh^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}) + \tanh^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}}) \} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

なので、

$$\tanh^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}) + \tanh^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \coth^{-1} \sqrt{2}$$

となって題意を得ます。

(16) 【Taylor 展開を使った計算】

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

によれば、

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}(e^{ix}) &= e^{ix} + \frac{1}{3}e^{i3x} + \frac{1}{5}e^{i5x} + \cdots \\ \tanh^{-1}(e^{-ix}) &= e^{-ix} + \frac{1}{3}e^{-i3x} + \frac{1}{5}e^{-i5x} + \cdots \\ \frac{\tanh^{-1}(e^{ix}) - \tanh^{-1}(e^{-ix})}{2i} &= \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots \end{aligned}$$

なので、両辺 $x = \frac{\pi}{4}$ のときの値を比較すれば

$$\begin{aligned} \frac{\tanh^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}) - \tanh^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}})}{2i} &= \sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\sin \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{5}\sin \frac{5\pi}{4} + \cdots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3 \cdot 5} - \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{11 \cdot 13} - \cdots \right) \\ \frac{\tanh^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}) - \tanh^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}})}{2\sqrt{2}i} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \cdots \end{aligned}$$

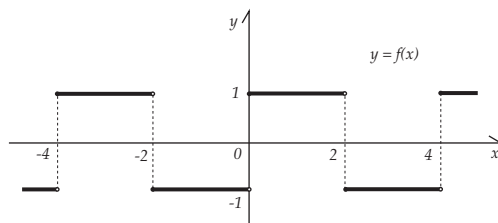
ですが、

$$\tanh^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}) - \tanh^{-1}(e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{2} \log(-1) = \frac{\pi}{2}i$$

なので題意を得ます。

【Fourier 級数を使った計算】先の計算により、周期 4 の周期関数 $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-2 \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < 2) \\ f(x+4) = f(x) & \text{for all } x \end{cases}$$



の Fourier 級数は、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \sin \frac{n\pi}{2} x \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} x + \cdots \right) \end{aligned}$$

となりました。

$x = \frac{1}{2}$ では元の関数とその Fourier 級数は一致していますから（連続点なので）、

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{4} + \cdots \right) \\ \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots \end{aligned}$$

が得られます。従って

$$\begin{aligned} 1 + 2 \left(\frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \cdots \right) &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

から題意を得る事が出来ます。

1.3 連続3数の積の逆数の和

連続3数の積の逆数の和

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots = \frac{1}{4} \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots = \log 2 - \frac{1}{2} \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{4} \log 3 \quad (1.19)$$

連続3奇数の積の逆数の和

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots = \frac{1}{12} \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \cdots = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15 \cdot 17} + \cdots = \frac{1}{16} \log 3 \quad (1.22)$$

最初がずれているもの

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots = \frac{3}{4} - \log 2 \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \cdots = \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \cdots = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13 \cdot 15} + \cdots = \frac{5}{24} - \frac{\pi}{16} \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{1}{15 \cdot 17 \cdot 19} + \cdots = -\frac{1}{8} - \frac{1}{32} \log 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{32} \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19 \cdot 21} + \cdots = \frac{5}{24} - \frac{1}{32} \log 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{32} \quad (1.28)$$

(17) Telescopic.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{1}{N(N+1)} + \frac{1}{N(N+1)} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right\} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \\
&\rightarrow \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(18) 既知。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} (2 \log 2 - 1) \\
&= \log 2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(20) Telescopic.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots - \frac{1}{(2\{N-1\}+1)(2\{N-1\}+3)} + \frac{1}{(2N-1)(2N+1)} - \frac{1}{(2N+1)(2N+3)} \right\} \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{(2N+1)(2N+3)} \\
&\rightarrow \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(2.1) 既知。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(4n+5)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} - \frac{1}{(4n+3)(4n+5)} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \cdots \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

(2.6) 既知。

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+1)(4n+3)} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} - \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} - \cdots \right) \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \cdots \right) + \frac{1}{12} \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12} \\
 &= \frac{5}{24} - \frac{\pi}{16}
 \end{aligned}$$

(23) 既知。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right)\end{aligned}$$

と部分分数分解出来るので元の級数の第 N 項までの部分 and S_N は

$$\begin{aligned}2S_N &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \cdots + \frac{2}{2N} - \frac{2}{2N+1} + \frac{1}{2N+2} \\ &= -2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N+1} \right) + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2N+2} \\ &\rightarrow -2 \log 2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

と収束する事が判ります。従って

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)} = \frac{3}{4} - \log 2$$

です。

次の問題は一見奇妙な和ですが、よくよく考えれば今見た級数と同じものです。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = 18 - 24 \log 2$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} &= \frac{1}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{24}{2n(2n+1)(2n+2)}\end{aligned}$$

なのでこれは (23) の 24 倍です。

(19) 積分。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} - \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{2}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} \right)\end{aligned}$$

ですが（この題意の和を S とします）、次の積分 $J_{p,m}^n$:

$$\begin{aligned}J_{p,m}^n &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} \{1 - x^{pn}\}}{1 - x^p} dx \\ &= \int_0^1 x^{m-1} (1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{p(n-1)}) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^{pk+m-1} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{pk+m}\end{aligned}$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned}2S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{2}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ J_{3,1}^n - 2J_{3,2}^n + J_{3,3}^n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(1-2x+x^2) \{1-x^{3n}\}}{1-x^3} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(1-x) \{1-x^{3n}\}}{1+x+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} [\log |x^2+x+1|]_0^1 + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ S &= -\frac{1}{4} \log 3 + \int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2 + 1} dx\end{aligned}$$

となりますからここで $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) = y$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ &= -\frac{1}{4} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} [\operatorname{Tan}^{-1} y]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{4} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{4} \log 3 \end{aligned}$$

となって和が求まりました。

(2.2) 積分。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6n+1)(6n+3)(6n+5)} &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(6n+1)(6n+3)} - \frac{1}{(6n+3)(6n+5)} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6n+1} - \frac{2}{6n+3} + \frac{1}{6n+5} \right) \end{aligned}$$

ですが（この題意の和を S とします）、さっきの積分 $J_{6,m}^n$ を使えば、

$$\begin{aligned} 8S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6k+1} - \frac{2}{6k+3} + \frac{1}{6k+5} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ J_{6,1}^n - 2J_{6,3}^n + J_{6,5}^n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(1-2x^2+x^4)\{1-x^{6n}\}}{1-x^6} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(1-x^2)\{1-x^{6n}\}}{1+x^2+x^4} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \\ S &= \frac{1}{16} [\log |x^2+x+1|]_0^1 - \frac{1}{16} [\log |x^2-x+1|]_0^1 \\ &= \frac{1}{16} \log 3 \end{aligned}$$

となって和が求まりました。

(2.4) 積分。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(3n+2)(3n+3)} - \frac{1}{(3n+3)(3n+4)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \right)\end{aligned}$$

ですが（この題意の和を S とします）、さっきの積分 $J_{3,m}^n$ を使えば、

$$\begin{aligned}2S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3k+2} - \frac{2}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ J_{3,2}^n - 2J_{3,3}^n + J_{3,4}^n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(x - 2x^2 + x^3) \{1 - x^{3n}\}}{1 - x^3} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x(1-x)^2 \{1 - x^{3n}\}}{(1-x)(1+x+x^2)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(1-x)}{1+x+x^2} dx \\ &= -1 + \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= -1 + [\log |x^2+x+1|]_0^1 \\ S &= \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となって和が求まりました。

(25) 積分。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+3)(3n+4)(3n+5)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(3n+3)(3n+4)} - \frac{1}{(3n+4)(3n+5)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+3} - \frac{2}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} \right)\end{aligned}$$

ですが（この題意の和を S とします）、さっきの積分 $J_{3,m}^n$ を使えば、

$$\begin{aligned}2S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3k+3} - \frac{2}{3k+4} + \frac{1}{3k+5} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ J_{3,3}^n - 2J_{3,4}^n + J_{3,5}^n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(x^2 - 2x^3 + x^4) \{1 - x^{3n}\}}{1 - x^3} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2 \{1 - x^{3n}\}}{(1-x)(1+x+x^2)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{1+x+x^2} dx \\ &= \int_0^1 (-x+2) dx - \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1} dx \\ &= \int_0^1 (-x+2) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 - \frac{1}{2} [\log |x^2+x+1|]_0^1 - \frac{3}{2} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \\ S &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となって和が求まりました。

(27) 積分。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6n+3)(6n+5)(6n+7)} &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(6n+3)(6n+5)} - \frac{1}{(6n+5)(6n+7)} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6n+3} - \frac{2}{6n+5} + \frac{1}{6n+7} \right)\end{aligned}$$

ですが（この題意の和を S とします）、さっきの積分 $J_{6,m}^n$ を使えば、

$$\begin{aligned}8S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6k+3} - \frac{2}{6k+5} + \frac{1}{6k+7} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ J_{6,3}^n - 2J_{6,5}^n + J_{6,7}^n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(x^2 - 2x^4 + x^6) \{1 - x^{6n}\}}{1 - x^6} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)^2 \{1 - x^{6n}\}}{(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)}{1 + x^2 + x^4} dx \\ &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right) dx \\ &= -1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - x}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} dx \\ &= -1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \\ &= -1 - \frac{1}{4} [\log |x^2 + x + 1|]_0^1 + \frac{1}{4} [\log |x^2 - x + 1|]_0^1 \\ &\quad + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= -1 - \frac{1}{4} \log 3 + \int_0^1 \frac{1}{\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{1}{\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + 1} dx\end{aligned}$$

となるので、変数変換すれば

$$\begin{aligned}8S &= -1 - \frac{1}{4} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2 + 1} dy + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{y^2 + 1} dy \\&= -1 - \frac{1}{4} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{Tan}^{-1} y]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\&= -1 - \frac{1}{4} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \\&= -1 - \frac{1}{4} \log 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \\S &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{32} \log 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{32}\end{aligned}$$

となって和が求まりました。

(28) 積分。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6n+5)(6n+7)(6n+9)} &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(6n+5)(6n+7)} - \frac{1}{(6n+7)(6n+9)} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6n+5} - \frac{2}{6n+7} + \frac{1}{6n+9} \right)\end{aligned}$$

ですが（この題意の和を S とします）、さっきの積分 $J_{6,m}^n$ を使えば、

$$\begin{aligned}8S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6k+5} - \frac{2}{6k+7} + \frac{1}{6k+9} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ J_{6,5}^n - 2J_{6,7}^n + J_{6,9}^n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(x^4 - 2x^6 + x^8) \{1 - x^{6n}\}}{1 - x^6} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^4(1-x^2)^2 \{1 - x^{6n}\}}{(1-x^2)(1+x^2+x^4)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^4(1-x^2)}{1+x^2+x^4} dx \\ &= \int_0^1 \left(-x^2 + 2 + \frac{-x^2-2}{x^4+x^2+1} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-x-2}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{4} [\log|x^2+x+1|]_0^1 + \frac{1}{4} [\log|x^2-x+1|]_0^1 \\ &\quad - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx - \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \log 3 - \int_0^1 \frac{1}{\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 + 1} dx\end{aligned}$$

となるので、変数変換すれば

$$\begin{aligned}
8S &= \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{y^2 + 1} dy - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{y^2 + 1} dy \\
&= \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} [\text{Tan}^{-1} y]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \log 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \\
S &= \frac{5}{24} - \frac{1}{32} \log 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{32}
\end{aligned}$$

となって和が求まりました。

1.3.1 BBP formula

π の計算に用いられるいわゆる BBP formulae で用いられる積分を使うと多くの級数の和を具体的に計算する事が出来るようになります。

ただし、積分区間が $[0, 1]$ の場合はそのままでは上手く無限和と積分の交換が出来ませんので有限和に直してあとで極限をとる必要があります。

定義 1.3.1 任意の正の整数 p, m, n 、任意の実数 $0 < r < 1$ に対して

$$\begin{aligned} J_{p,m}(r) &= \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1-x^p} dx & J_{p,m}^n &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^{pn})}{1-x^p} dx \\ K_{p,m}(r) &= \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx & K_{p,m}^n &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}\{1-(-1)^n x^{pn}\}}{1+x^p} dx \end{aligned}$$

と云う積分を考えます¹⁾。

¹⁾ 記号 J, K の使い方は一般的なものではなく、本稿独自のものです。

すると、

$$\begin{aligned}
 J_{p,m}(r) &= \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1-x^p} dx \\
 &= \int_0^r x^{m-1} (1+x^p+x^{2p}+\cdots) dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^r x^{pk+m-1} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{pk+m} r^{pk+m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{p,m}^n &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} (1-x^{pn})}{1-x^p} dx \\
 &= \int_0^1 x^{m-1} \left\{ 1+x^p+x^{2p}+\cdots+x^{(n-1)p} \right\} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^{pk+m-1} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{pk+m}
 \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}
 K_{p,m}(r) &= \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx \\
 &= \int_0^r x^{m-1} (1-x^p+x^{2p}-\cdots) dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^r (-1)^k x^{pk+m-1} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{pk+m} r^{pk+m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{p,m}^n &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} \{1 - (-1)^n x^{pn}\}}{1+x^p} dx \\
 &= \int_0^1 x^{m-1} \left\{ 1-x^p+x^{2p}-\cdots+(-1)^{n-1} x^{(n-1)p} \right\} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-1)^k x^{pk+m-1} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{pk+m}
 \end{aligned}$$

となっていて、級数の和の計算に利用することができます。

ただし、このままでは $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{p,m}^n = J_{p,m}(1)$ とはならないので注意が必要です。
 しかし、交替和の方は $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{p,m}^n = K_{p,m}(1)$ が言えます。

$$\begin{aligned} K_{p,m}^n &= \int_0^1 \frac{x^{m-1} \{1 - (-1)^n x^{pn}\}}{1 + x^p} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1 + x^p} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{pn+m-1}}{1 + x^p} dx \\ &= K_{p,m}(1) - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{pn+m-1}}{1 + x^p} dx \end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned} \left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{pn+m-1}}{1 + x^p} dx \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{x^{pn+m-1}}{1 + x^p} \right| dx \\ &\leq \int_0^1 x^{pn+m-1} dx \\ &= \frac{1}{pn + m} \end{aligned}$$

から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{pn+m-1}}{1 + x^p} dx = 0$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{p,m}^n = K_{p,m}(1)$$

1.3.2 定数のべきを加えたもの

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \cdots = \log 2 \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{w \cdot 1} + \frac{1}{w^2 \cdot 2} + \frac{1}{w^3 \cdot 3} + \cdots = \log \frac{w}{w-1}, \quad (1 < w) \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} - \cdots = \log \frac{3}{2} \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{w \cdot 1} - \frac{1}{w^2 \cdot 2} + \frac{1}{w^3 \cdot 3} - \cdots = \log \frac{w+1}{w}, \quad (1 < w) \quad (1.32)$$

$$\frac{1}{3^0 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \cdots = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{w \cdot 1} - \frac{1}{w^3 \cdot 3} + \frac{1}{w^5 \cdot 5} - \cdots = \tan^{-1} \frac{1}{w}, \quad (1 < w) \quad (1.34)$$

(29)、(30)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^{k+1}(k+1)} = \frac{1}{w \cdot 1} + \frac{1}{w^2 \cdot 2} + \frac{1}{w^3 \cdot 3} + \frac{1}{w^4 \cdot 4} + \cdots$$

ですから先の $J_{p,m}(r)$ において $p=1, m=1, r=\frac{1}{w}$ の場合を考えれば

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{w}\right)^{k+1} &= J_{1,1} \left(\frac{1}{w}\right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{1}{1-x} dx \\ &= [-\log(1-x)]_0^{\frac{1}{w}} \\ &= -\log \left(1 - \frac{1}{w}\right) \\ &= \log \frac{w}{w-1} \end{aligned}$$

となることが分かりました。特に $w=2$ の時が (29) です。

(3 1)、(3 2)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{w \cdot 1} - \frac{1}{w^2 \cdot 2} + \frac{1}{w^3 \cdot 3} - \cdots \\
&= \left(\frac{1}{w \cdot 1} + \frac{1}{w^2 \cdot 2} + \frac{1}{w^3 \cdot 3} + \cdots \right) - 2 \left(\frac{1}{w^2 \cdot 2} + \frac{1}{w^4 \cdot 4} + \frac{1}{w^6 \cdot 6} + \cdots \right) \\
&= \log \frac{w}{w-1} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2} \left(\frac{1}{w} \right)^{2k+2} \\
&= \log \frac{w}{w-1} - 2J_{2,2} \left(\frac{1}{w} \right) \\
&= \log \frac{w}{w-1} - 2 \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{x}{1-x^2} dx \\
&= \log \frac{w}{w-1} + \int_0^{\frac{1}{w}} \{ \log(1-x^2) \}' dx \\
&= \log \frac{w}{w-1} + \log \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) \\
&= \log \frac{w+1}{w}
\end{aligned}$$

であり、特に $w=2$ の時が (3 1) です。

ちなみに、 $w=1$ の時は

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2$$

となって成り立っています。

あるいは、 $K_{p,m}(r)$ を使えば直接、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w \cdot 1} - \frac{1}{w^2 \cdot 2} + \frac{1}{w^3 \cdot 3} - \cdots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{1}{w} \right)^{k+1} \\
&= K_{1,1} \left(\frac{1}{w} \right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{1}{1+x} dx \\
&= \log \left(1 + \frac{1}{w} \right)
\end{aligned}$$

と計算することもできます。

(3.3) $K_{p,m}(r)$ を使って直接計算すれば

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3^0 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \cdots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k} \\
 &= \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} \\
 &= \sqrt{3} K_{2,1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
 &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \sqrt{3} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

です。

あるいは $J_{p,m}(r)$ で計算するなら、これは

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{3^0 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots \\
 &= \left(\frac{1}{3^0 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} + \cdots \right) - 2 \left(\frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^5 \cdot 11} + \cdots \right)
 \end{aligned}$$

と分解できますので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3^0 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} + \cdots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k} \\
&= \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} \\
&= \sqrt{3} J_{2,1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^2} dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\log \frac{1+x}{1-x} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^5 \cdot 11} + \cdots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k+3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} \\
&= \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k+3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4k+3} \\
&= \sqrt{3} J_{4,3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2}{1-x^4} dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} [\tan^{-1} x]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}\pi}{12}
\end{aligned}$$

となって結局、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3^0 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots \\
 &= \left(\frac{1}{3^0 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} + \cdots \right) - 2 \left(\frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^5 \cdot 11} + \cdots \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \right) \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

です。上手いこと $\log$ の項が消えてくれますね。

(34)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w \cdot 1} - \frac{1}{w^3 \cdot 3} + \frac{1}{w^5 \cdot 5} - \cdots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{w}\right)^{2k+1} \\
&= K_{2,1} \left(\frac{1}{w}\right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \text{Tan}^{-1} \frac{1}{w}
\end{aligned}$$

です。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{w \cdot 1} - \frac{1}{w^3 \cdot 3} + \frac{1}{w^5 \cdot 5} - \frac{1}{w^7 \cdot 7} + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{w \cdot 1} + \frac{1}{w^3 \cdot 3} + \frac{1}{w^5 \cdot 5} + \cdots \right) - 2 \left(\frac{1}{w^3 \cdot 3} + \frac{1}{w^7 \cdot 7} + \frac{1}{w^{11} \cdot 11} + \cdots \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^{2k+1}(2k+1)} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^{4k+3}(4k+3)} \\
&= J_{2,1} \left(\frac{1}{w}\right) - 2J_{4,3} \left(\frac{1}{w}\right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{1}{1-x^2} dx - 2 \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{x^2}{1-x^4} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{1}{1-x^2} dx - \int_0^{\frac{1}{w}} \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{w}} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= [\text{Tan}^{-1} x]_0^{\frac{1}{w}} \\
&= \text{Tan}^{-1} \frac{1}{w}
\end{aligned}$$

もちろん、 $\text{Tan}^{-1} x$ の Taylor 展開で $x = \frac{1}{w}$ とすれば得られますが。

Bailey-Borwein-Plouffe formula (1995)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \frac{1}{16^k} = \pi$$

先ず次の積分の計算に注意します：

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{m-1}}{1-x^8} dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{m-1+8k} dx \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \frac{1}{8k+m} \\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2^{\frac{m}{2}} x^{m-1}}{1-x^8} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \frac{1}{8k+m} \end{aligned}$$

すると題意の和は

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \frac{1}{16^k} \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} dx \\ &= \int_0^1 \frac{16y-16}{y^4-2y^3+4y-4} dy \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる事が分かります。

BBP-formula に類似した公式：

Victor Adamchik and Stan Wagon の公式 (1997)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right)$$

Fabrice Bellard の公式 (1997)

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1024^k} \left(-\frac{32}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} + \frac{256}{10k+1} - \frac{64}{10k+3} - \frac{4}{10k+5} - \frac{4}{10k+7} + \frac{1}{10k+9} \right)$$

1.3.3 Polylog 関数に関連した級数

$$Li_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k^2} = \frac{1}{2^1 \cdot 1^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-xy} dx dy &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} (xy)^j dx dy \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (xy)^j dx dy \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^j dx \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^j dy \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{j+1} x^{j+1} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right\}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-xy} dx dy &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[-\frac{1}{y} \log(1-xy) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \\ &= - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\log\left(1 - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)}{y} dy \end{aligned}$$

あるいは、 $\frac{y}{\sqrt{2}} = z$ と変数変換すれば

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-z)}{z} dz$$

しかし内側の積分で $xy = z$ なる変数変換を施せば

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-xy} dx dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{y}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-z} \frac{1}{y} dz dy$$

であり、ここで積分順序を交換すれば

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-z} \int_{\sqrt{2}z}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{y} dy dz \\
&= - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2z)}{1-z} dz \\
&= - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log z}{1-z} dz - \log 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-z} dz \\
&= - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1-x)}{x} (-1) dx - \log 2 [-\log(1-z)]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx - (\log 2)^2
\end{aligned}$$

が得られるため、

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-xy} dx dy &= - \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx - (\log 2)^2 \\
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-xy} dx dy &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx - \frac{1}{2} (\log 2)^2
\end{aligned}$$

となっている事が分かります。

ここで右辺の積分は

$$- \int_0^1 \frac{\log(1-z)}{z} dz = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ですが、これは2重積分で

$$v = \frac{x+y}{2}, \quad w = \frac{-x+y}{2}$$

と置けば、 $v+w=y$, $v-w=x$ であって、この変換の Jacobian は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

であって、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy &= \iint_D \frac{2}{1-v^2+w^2} dv dw \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-v}^v \frac{2}{1-v^2+w^2} dw dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{v-1}^{-v+1} \frac{2}{1-v^2+w^2} dw dv \\
&= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^v \frac{1}{1-v^2+w^2} dw dv + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{-v+1} \frac{1}{1-v^2+w^2} dw dv
\end{aligned}$$

ですが、ここで

$$\left(\operatorname{Tan}^{-1} \frac{w}{\sqrt{1-v^2}}\right)_w = \frac{1}{1+\frac{w^2}{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{1-v^2+w^2} \sqrt{1-v^2}$$

すなわち、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{w}{\sqrt{1-v^2}}\right)_w = \frac{1}{1-v^2+w^2}$$

によれば

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{w}{\sqrt{1-v^2}} \right]_0^v dv \\ &\quad + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{w}{\sqrt{1-v^2}} \right]_0^{-v+1} dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} dv \\ &\quad + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} dv \end{aligned}$$

が分かります。ここで更に

$$\operatorname{Tan}^{-1} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \operatorname{Sin}^{-1} v$$

であることと、

$$\frac{1}{\cos^2 \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}}} = 1 + \left(\frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \right)^2 = 1 + \frac{1-v}{1+v} = \frac{2}{1+v}$$

$$2 \cos^2 \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} - 1 = v$$

$$\cos 2 \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} = v$$

$$2 \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} = \operatorname{Cos}^{-1} v$$

$$\operatorname{Tan}^{-1} \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{Cos}^{-1} v$$

である事によれば

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1} v}{\sqrt{1-v^2}} dv + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\cos^{-1} v}{\sqrt{1-v^2}} dv \\
 &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\sin^{-1} v}{\sqrt{1-v^2}} dv - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-2\cos^{-1} v}{\sqrt{1-v^2}} dv \\
 &= 2 \left[(\sin^{-1} v)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[(\cos^{-1} v)^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= 2 \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 - 0 - \left\{ 0 - \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

が得られます。従って

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

です。

これを戻せば結局、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-xy} dx dy &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx - \frac{1}{2} (\log 2)^2 \\
 &= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2
 \end{aligned}$$

が得られた事になります。やれやれ。

第2章

負べきの和とその仲間たち

2.1 負べきの和

自乗の逆数の和・交替和

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12} \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = G \quad \text{Catalan's constant} \quad (2.4)$$

3乗の逆数の交替和

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32} \quad (2.5)$$

4乗の逆数の和・交替和

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96} \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \cdots = \frac{7\pi^4}{720} \quad (2.8)$$

6乗の逆数の和・交替和

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945} \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{1^6} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots = \frac{31\pi^6}{30240} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{1^6} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} - \cdots = ? \quad (2.12)$$

2.1.1 解の逆数の和と係数の関係

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(kn-1)(kn+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 n^2 - 1} \\
&= \frac{1}{(k-1)(k+1)} + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(3k-1)(3k+1)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2k} \cot \frac{\pi}{k}, \quad k = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{x^2 - 1 - (k-1)(k+1)\} \{x^2 - 1 - (2k-1)(2k+1)\} \\
& \quad \{x^2 - 1 - (3k-1)(3k+1)\} \cdots \{x^2 - 1 - (kn-1)(kn+1)\} \cdots \\
&= (x^2 - k^2) \{x^2 - (2k)^2\} \{x^2 - (3k)^2\} \cdots \\
&= (x+k)(x-k)(x+2k)(x-2k)(x+3k)(x-3k) \cdots \\
&= \frac{1}{x} \{x(x+k)(x-k)(x+2k)(x-2k)(x+3k)(x-3k) \cdots\}
\end{aligned}$$

ですが、この中括弧の中は全ての k の倍数で 0 になる関数 $Q \sin \frac{\pi}{k} x$ です (Q は定数) :

$$\begin{aligned}
&= Q \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{k} x \\
&= Q \frac{1}{x} \left\{ \frac{\pi}{k} x - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{k} x \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{k} x \right)^5 - \cdots \right\} \\
&= Q \left\{ \frac{\pi}{k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{k} \right)^3 x^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{k} \right)^5 x^4 - \cdots \right\}
\end{aligned}$$

そこで $x^2 - 1 = t$ と置く事にすれば

$$\begin{aligned}
& (t - (k-1)(k+1))(t - (2k-1)(2k+1))(t - (3k-1)(3k+1)) \cdots \\
&= Q \left\{ \frac{\pi}{k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{k} \right)^3 (t+1) + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{k} \right)^5 (t+1)^2 - \cdots \right\}
\end{aligned}$$

となります。従って

$$\frac{\pi}{k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{k} \right)^3 (t+1) + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{k} \right)^5 (t+1)^2 - \cdots = 0 \quad \cdots (*)$$

の解は $(k-1)(k+1), (2k-1)(2k+1), (3k-1)(3k+1), \dots$ であることが判り、多項式の解の逆数の和は常に

$$(\text{解の逆数の和}) = -\frac{(\text{1次の係数})}{(\text{定数項})}$$

となっている事に注目してこれが無限次の多項式にも応用出来ると考えます。そこで $(t+1)^n$ を展開して(*)の定数項と1次の係数を求めてみましょう。

まず定数項は

$$(\text{定数項}) = \frac{\pi}{k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{k}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{k}\right)^5 - \dots = \sin \frac{\pi}{k}$$

です。一方1次の係数は(*)の左辺の関数が $\frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{k} x$ において $x^2 - 1 = t$ すなわち $x = \sqrt{t+1}$ とした $\frac{1}{\sqrt{t+1}} \sin \frac{\pi}{k} \sqrt{t+1}$ であることに注意すれば、これを微分して $t=0$ とすれば1次の係数が求められる事から

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t+1}} \sin \frac{\pi}{k} \sqrt{t+1} \right\}' &= -\frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{\pi}{k} \sqrt{t+1} + \frac{1}{\sqrt{t+1}} \left(\cos \frac{\pi}{k} \sqrt{t+1} \right) \frac{\pi}{k} \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \\ (\text{1次の係数}) &= -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{2k} \cos \frac{\pi}{k} \end{aligned}$$

です。これらのことから展開式は

$$\begin{aligned} \{t - (k-1)(k+1)\} \{t - (2k-1)(2k+1)\} \{t - (3k-1)(3k+1)\} \dots \\ = \sin \frac{\pi}{k} + \left(\frac{\pi}{2k} \cos \frac{\pi}{k} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{k} \right) t + \dots \end{aligned}$$

となっているわけですから、この(無限次多項式) = 0 の解の逆数の和、すなわち題意の級数の和は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k-1)(k+1)} + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(3k-1)(3k+1)} + \dots \\ &= -\frac{(\text{1次の係数})}{(\text{定数項})} \\ &= -\frac{\frac{\pi}{2k} \cos \frac{\pi}{k} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{k}}{\sin \frac{\pi}{k}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2k} \cot \frac{\pi}{k} \end{aligned}$$

となる事が判ります。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+1)} = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 10} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1 - 2 \cdot 4)(x^2 - 1 - 5 \cdot 7)(x^2 - 1 - 8 \cdot 10) \cdots \{x^2 - 1 - (3n-1)(3n+1)\} \cdots \\ &= (x^2 - 9)(x^2 - 36)(x^2 - 81) \cdots \\ &= (x+3)(x-3)(x+6)(x-6)(x+9)(x-9) \cdots \\ &= \frac{1}{x} \{x(x+3)(x-3)(x+6)(x-6)(x+9)(x-9) \cdots\} \end{aligned}$$

ですが、この中括弧の中味は全ての3の倍数で0になる関数ですから $Q \sin \frac{\pi}{3}x$ です (Q は定数)。

$$= Q \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{3}x$$

すると Taylor 展開により

$$\begin{aligned} &= Q \frac{1}{x} \left\{ \frac{\pi}{3}x - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{3}x\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{3}x\right)^5 - \cdots \right\} \\ &= Q \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 x^2 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^5 x^4 - \cdots \right\} \end{aligned}$$

そこで $x^2 - 1 = t$ と置く事にすれば

$$\begin{aligned} & (t - 2 \cdot 4)(t - 5 \cdot 7)(t - 8 \cdot 10) \cdots \\ &= Q \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 (t+1) + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^5 (t+1)^2 - \cdots \right\} \end{aligned}$$

となります。従って

$$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 (t+1) + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^5 (t+1)^2 - \cdots = 0 \quad \cdots (*)$$

の解は $2 \cdot 4, 5 \cdot 7, 8 \cdot 10, \cdots$ であることが判り、多項式の解の逆数の和は常に

$$(\text{解の逆数の和}) = -\frac{(\text{1次の係数})}{(\text{定数項})}$$

となっている事に注目してこれが無限次の多項式にも応用出来ると考えます。そこで $(t+1)^n$ を展開して (*) の定数項と1次の係数を求めてみましょう。

先ず定数項は

$$(\text{定数項}) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^5 - \cdots = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

です。

一方1次の係数は(*)の左辺の関数が $\frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{3} x$ において $x^2 - 1 = t$ すなわち $x = \sqrt{t+1}$ とした $\frac{1}{\sqrt{t+1}} \sin \frac{\pi}{3} \sqrt{t+1}$ であることに注意すれば、これを微分して $t=0$ とすれば1次の係数が求められる事から

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{t+1}} \sin \frac{\pi}{3} \sqrt{t+1} \right\}' = -\frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{\pi}{3} \sqrt{t+1} + \frac{1}{\sqrt{t+1}} \left(\cos \frac{\pi}{3} \sqrt{t+1} \right) \frac{\pi}{3} \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$$

$$(\text{1 次 の 係 数}) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

が得られます。

これらのことから展開式は

$$(t-2 \cdot 4)(t-5 \cdot 7)(t-8 \cdot 10) \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) t + \cdots$$

となっているわけですから、この(無限次多項式) $=0$ の解の逆数の和、すなわち題意の級数の和は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 10} + \cdots &= -\frac{(\text{1 次 の 係 数})}{(\text{定 数 項})} \\ &= -\frac{\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる事が判ります。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$(3n+1)(3n+2) = \left(3n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(3n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{3}{2}(2n+1)\right\}^2 - \frac{1}{4}$$

ですが、 $n = 0, 1, 2, \dots$ のときに $\pm(3n + \frac{3}{2})$ を考えれば

$$\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{15}{2}, \dots$$

となって周期3の数列が原点对称に並ぶ事になります。ここで全ての $\pm(3n + \frac{3}{2})$ で0になる関数と考えれば

$$\cos\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} x\right) = \cos \frac{\pi}{3} x$$

であることに注意しておきます。すると

$$\begin{aligned} & \left(x^2 - \frac{1}{4} - 1 \cdot 2\right) \left(x^2 - \frac{1}{4} - 4 \cdot 5\right) \left(x^2 - \frac{1}{4} - 7 \cdot 8\right) \cdots \\ &= \left\{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} \left\{x^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2\right\} \left\{x^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2\right\} \cdots \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{9}{2}\right) \left(x + \frac{9}{2}\right) \left(x - \frac{15}{2}\right) \left(x + \frac{15}{2}\right) \cdots \\ &= Q \cos \frac{\pi}{3} x \\ &= Q \left\{1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{3} x\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{3} x\right)^4 - \cdots\right\} \end{aligned}$$

なので (Q は定数)、ここで最初の左辺と最後の右辺において $x^2 - \frac{1}{4} = t$ とおけば、

$$(t - 1 \cdot 2)(t - 4 \cdot 5)(t - 7 \cdot 8) \cdots = Q \left\{1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(t + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \cdots\right\}$$

が得られますから、

$$1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(t + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \cdots = 0$$

の解は $t = 1 \cdot 2, 4 \cdot 5, 7 \cdot 8, \dots$ であることが分かります。左辺の定数項と1次の係数が分かれば解の逆数の和を計算する事が出来ますので (解と係数の関係)、先ずはその2つを計算しましょう。

定数項はそのまま取り出せば

$$\begin{aligned}
 (\text{定数項}) &= 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \cdots \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^4 - \cdots \\
 &= \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

です。

一方1次の係数は、これが $\cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{t+\frac{1}{4}}\right)$ だった事を考えればこれを微分して $t=0$ とすれば良く、

$$\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{t+\frac{1}{4}}\right) \right\}' = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{t+\frac{1}{4}}\right) \cdot \frac{\pi}{3} \frac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{4}}}$$

から

$$(\text{1 次 の 係 数}) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{1}{4}}\right) \cdot \frac{\pi}{3} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = -\frac{\pi}{6}$$

が得られます。

従って、解と係数の関係から

$$(\text{解の逆数の和}) = -\frac{(\text{1 次 の 係 数})}{(\text{定数項})} = -\frac{-\frac{\pi}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

となって

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

が得られました。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}(1 + \pi \coth \pi)$$

$1+n^2 (n=0,1,2,\dots)$ を解に持つ無限多項式

$$P(x) = (x-1)(x-1-1^2)(x-1-2^2)(x-1-3^2)\cdots$$

を考え $X^2 = x-1$ と置けば

$$X^2(X^2-1^2)(X^2-2^2)(X^2-3^2)\cdots = X \cdot X(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)\cdots$$

ですが、 $X(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)\cdots$ の部分は全ての整数を解に持つ（重複度1）ので $\sin \pi X$ と考えられますのでその Taylor 展開：

$$\sin \pi X = \pi X - \frac{1}{3!}(\pi X)^3 + \frac{1}{5!}(\pi X)^5 - \cdots$$

を使って

$$P(x) = X \sin \pi X = \pi X^2 - \frac{\pi^3 X^4}{3!} + \frac{\pi^5 X^6}{5!} - \cdots$$

となり、ここで $X^2 = x-1$ だったので戻してやれば

$$P(x) = \pi(x-1) - \frac{\pi^3}{3!}(x-1)^2 + \frac{\pi^5}{5!}(x-1)^3$$

が分かります。この無限次多項式の定数項と1次の係数はそれぞれ

$$(\text{定数項}) : \quad -\pi - \frac{\pi^3}{3!} - \frac{\pi^5}{5!} - \cdots = -\sinh \pi$$

$$(\text{1次の係数}) : \quad \pi + \frac{2}{3!}\pi^3 + \frac{3}{5!}\pi^5 + \cdots$$

となっています。

多項式の解の逆数の和は

$$(\text{解の逆数の和}) = -\frac{(\text{1次の係数})}{(\text{定数項})}$$

を満たしますので、これが無限次多項式でも成り立つと（勝手に）考えれば

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} &= -\frac{\pi + \frac{2}{3!}\pi^3 + \frac{3}{5!}\pi^5 + \cdots}{-\pi - \frac{\pi^3}{3!} - \frac{\pi^5}{5!} - \cdots} \\ &= \frac{\pi + \frac{2}{3!}\pi^3 + \frac{3}{5!}\pi^5 + \cdots}{\pi + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \cdots} \end{aligned}$$

です。

一方、 $\cosh x, \sinh x$ の Taylor 展開に依れば

$$\begin{aligned} 1 + \pi \coth \pi &= 1 + \frac{\pi + \frac{\pi^3}{2!} + \frac{\pi^5}{4!} + \cdots}{\pi + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \cdots} \\ &= \frac{2\pi + \pi^3 \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \right) + \pi^5 \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \right) + \cdots}{\pi + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \cdots} \\ &= \frac{2\pi + \pi^3 \frac{4}{3!} + \pi^5 \frac{6}{5!} + \cdots}{\pi + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \cdots} \end{aligned}$$

であり、従って

$$\frac{1}{2}(1 + \pi \coth \pi) = \frac{\pi + \pi^3 \frac{2}{3!} + \pi^5 \frac{3}{5!} + \cdots}{\pi + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \cdots}$$

が得られ、これはさっき求めた $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ に一致しています。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a), \quad a > 0$$

$a^2 + n^2 (n = 0, 1, 2, \dots)$ を解に持つ無限多項式

$$P(x) = (x - a^2)(x - a^2 - 1^2)(x - a^2 - 2^2)(x - a^2 - 3^2) \cdots$$

を考え $X^2 = x - a^2$ と置けば

$$X^2(X^2 - 1^2)(X^2 - 2^2)(X^2 - 3^2) \cdots = X \cdot X(X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2) \cdots$$

ですが、 $X(X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2) \cdots$ の部分は全ての整数を解に持つ（重複度 1）ので $\sin \pi X$ と考えられますのでその Taylor 展開：

$$\sin \pi X = \pi X - \frac{1}{3!}(\pi X)^3 + \frac{1}{5!}(\pi X)^5 - \cdots$$

を使って

$$P(x) = X \sin \pi X = \pi X^2 - \frac{\pi^3 X^4}{3!} + \frac{\pi^5 X^6}{5!} - \cdots$$

となり、ここで $X^2 = x - a^2$ だったので戻してやれば

$$P(x) = \sqrt{x - a^2} \sin \pi \sqrt{x - a^2} = \pi(x - a^2) - \frac{\pi^3}{3!}(x - a^2)^2 + \frac{\pi^5}{5!}(x - a^2)^3 - \cdots$$

が分かります。この無限次多項式の定数項と 1 次の係数はそれぞれ

$$(\text{定数項}) : P(0) = \sqrt{-a^2} \sin \pi \sqrt{-a^2} = -a \sinh \pi a$$

$$(\text{1 次の係数}) : P'(0) = \frac{\sin \pi \sqrt{-a^2}}{2\sqrt{-a^2}} + \frac{\pi}{2} \cos \pi \sqrt{-a^2}$$

となっています。多項式の解の逆数の和は

$$(\text{解の逆数の和}) = -\frac{(\text{1 次の係数})}{(\text{定数項})}$$

を満たしますので、これが無限次多項式でも成り立つと（勝手に）考えれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = -\frac{\frac{\sin \pi \sqrt{-a^2}}{2\sqrt{-a^2}} + \frac{\pi}{2} \cos \pi \sqrt{-a^2}}{\sqrt{-a^2} \sin \pi \sqrt{-a^2}} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth \pi a$$

です。

ちなみにここで $a \rightarrow 0$ の極限をとるとちゃんと $\frac{\pi^2}{6}$ になります。

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\left(1 - \frac{x^4}{1^4}\right) \left(1 - \frac{x^4}{2^4}\right) \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right) \cdots$$

である事と、三角関数の無限積表示／Taylor 展開：

$$\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \cdots = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{1}{3!} \pi^2 x^2 + \frac{1}{5!} \pi^4 x^4 - \cdots$$

およびこの式において $x \rightarrow ix$ と置き換えて得られる双曲線関数の無限積表示／Taylor 展開：

$$\left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right) \cdots = \frac{\sinh \pi x}{\pi x} = 1 + \frac{1}{3!} \pi^2 x^2 + \frac{1}{5!} \pi^4 x^4 + \cdots$$

から

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{x^4}{1^4}\right) \left(1 - \frac{x^4}{2^4}\right) \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right) \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{3!} \pi^2 x^2 + \frac{1}{5!} \pi^4 x^4 + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{3!} \pi^2 x^2 + \frac{1}{5!} \pi^4 x^4 + \cdots\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{3!} \pi^2 x^2 - \frac{1}{3!} \pi^2 x^2\right) + \left(\frac{2}{5!} \pi^4 x^4 - \frac{1}{3!3!} \pi^4 x^4\right) + \left(\frac{1}{3!5!} \pi^6 x^6 - \frac{1}{3!5!} \pi^6 x^6\right) + \cdots \\ &= 1 - \frac{\pi^4}{90} x^4 + \cdots \end{aligned}$$

となって右辺には x^{4n} の項しか現れない事が分かる。そこで両辺において $x^4 = X$ とすれば

$$\left(1 - \frac{X}{1^4}\right) \left(1 - \frac{X}{2^4}\right) \cdots = 1 - \frac{\pi^4}{90} X + \cdots$$

となるため、解の逆数の和と係数の関係により題意の級数の値が求まった：

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = -\frac{-\frac{\pi^6}{90}}{\pi^2} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^4} = \frac{1}{4a^2} \left(\pi \sqrt[4]{-a^2} \left\{ \cot(\pi \sqrt[4]{-a^2}) + \coth(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \right\} - 2 \right)$$

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots \\ \sin \pi z &= \pi z - \frac{1}{3!}\pi^3 z^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 z^5 - \dots \\ \frac{\sin \pi z}{\pi z} &= 1 - \frac{1}{3!}\pi^2 z^2 + \frac{1}{5!}\pi^4 z^4 - \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \\ \sinh z &= z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \dots \\ \sinh \pi z &= \pi z + \frac{1}{3!}\pi^3 z^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 z^5 + \dots \\ \frac{\sinh \pi z}{\pi z} &= 1 + \frac{1}{3!}\pi^2 z^2 + \frac{1}{5!}\pi^4 z^4 + \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin(\pi z) \cdot \sinh(\pi z)}{\pi^2 z^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{n^4} \right)$$

ここで $z^4 = w - a^2$ と置けば $z = \sqrt[4]{w - a^2}$ であって

$$\frac{\sin(\pi \sqrt[4]{w - a^2}) \cdot \sinh(\pi \sqrt[4]{w - a^2})}{\pi^2 \sqrt[4]{w - a^2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w - a^2}{n^4} \right)$$

ですが、この両辺は任意の正の整数 n に対して $w = a^2 + n^4$ で 0 になる関数（しかも全て重複度 1）です。そこで

$$f(w) = \frac{\sin(\pi \sqrt[4]{w - a^2}) \cdot \sinh(\pi \sqrt[4]{w - a^2})}{\pi^2 \sqrt[4]{w - a^2}}$$

と置いてこれを級数展開してやって定数項と 1 次の係数を計算すれば解の逆数の和が求まります。

まず $f(0)$ は、

$$f(0) = \frac{\sin(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{-a^2})}{\pi^2 \sqrt[4]{-a^2}}$$

ですからこれが展開時の定数項になります。

次に1次の係数を求めるためにまずは $f'(w)$ を求めておきましょう。

$$\begin{aligned}
 & f'(w) \\
 &= \frac{\left\{ \sin(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \right\}' \sqrt{w-a^2} - \left\{ \sin(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \right\} (\sqrt{w-a^2})' }{\pi^2(w-a^2)} \\
 &= \frac{\left\{ \cos(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) + \sin(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \cosh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \right\} \frac{\pi}{4\sqrt[4]{w-a^2}} - \left\{ \sin(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \right\} \frac{1}{2\sqrt{w-a^2}} }{\pi^2(w-a^2)} \\
 &= \frac{\pi \left\{ \cos(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) + \sin(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \cosh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \right\} \sqrt[4]{w-a^2} - 2 \sin(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{w-a^2}) }{4\pi^2 \sqrt{w-a^2}^3}
 \end{aligned}$$

従って1次の係数即ち $f'(0)$ は

$$\begin{aligned}
 & f'(0) \\
 &= \frac{\pi \left\{ \cos(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{-a^2}) + \sin(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \cosh(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \right\} \sqrt[4]{-a^2} - 2 \sin(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \sinh(\pi \sqrt[4]{-a^2}) }{4\pi^2 \sqrt{-a^2}^3}
 \end{aligned}$$

となる事が分かります。

以上から、

$$-\frac{(\text{1次の係数})}{(\text{定数項})} = \frac{1}{4a^2} \left(\pi \sqrt[4]{-a^2} \left\{ \cot(\pi \sqrt[4]{-a^2}) + \coth(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \right\} - 2 \right)$$

により、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^4} = \frac{1}{4a^2} \left(\pi \sqrt[4]{-a^2} \left\{ \cot(\pi \sqrt[4]{-a^2}) + \coth(\pi \sqrt[4]{-a^2}) \right\} - 2 \right)$$

が分かりました。

2.2 解の負べきの和と係数の関係

2.2.1 解の -2 乗の和と方程式の係数

n 次方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

の解が重複度も込めて $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ であって、これら全てが 0 でないとき、

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^2} = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2}$$

すなわち、

$$(\text{根の } -2 \text{ 乗の和}) = \frac{(\text{1 次の係数})^2 - 2(\text{定数項})(\text{2 次の係数})}{(\text{定数項})^2}$$

です。

例えば 4 次の場合に計算してみましょう。方程式： $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$ の解が $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ であり、これらは全て 0 でないします。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} + \frac{1}{\alpha_4^2} \\ &= \frac{(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2 + (\alpha_3\alpha_4\alpha_1)^2 + (\alpha_4\alpha_1\alpha_2)^2 + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2} \\ &= \frac{(\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4 - 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4 - 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2 - 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4^2}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2} \\ &= \frac{(\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{a_1}{a_4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a_0}{a_4} \cdot \frac{a_2}{a_4}}{\left(\frac{a_0}{a_4}\right)^2} \\ &= \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2} \end{aligned}$$

2.2.2 計算例

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$\sin x$ の Taylor 展開と無限積表示から

$$\begin{aligned} \frac{\sin \pi x}{\pi x} &= 1 - \frac{1}{3!} \pi^2 x^2 + \frac{1}{5!} \pi^4 x^4 - \dots \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

です。ここで (右辺) = 0 の解は $x = \pm 1, \pm 2, \dots$ ですから解の -2 乗の和と係数の関係を使えば

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{0^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\pi^2}{3!} \right)}{1^2} \\ &= \frac{\pi^2}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

が得られます。また、(37) で $x^2 = t$ と置けば

$$1 - \frac{1}{3!} \pi^2 t + \frac{1}{5!} \pi^4 t^2 - \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n^2} \right)$$

が分かりますから再び解と係数の関係から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\left(-\frac{\pi^2}{3!} \right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^4}{5!}}{1^2} \\ &= \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{60} \\ &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

です。

2.2.3 解の -3 乗の和と方程式の係数 n 次方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

の解が重複度も込めて $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ であって、これら全てが 0 でないとき、

$$\frac{1}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_2^3} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^3} = \frac{3a_0a_1a_2 - a_1^3 - 3a_0^2a_3}{a_0^3}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} & 3(\text{定数項})(1\text{次の係数})(2\text{次の係数}) \\ (\text{根の } -3 \text{ 乗の和}) &= \frac{-(1\text{次の係数})^3 - 3(\text{定数項})^2(3\text{次の係数})}{(\text{定数項})^3} \end{aligned}$$

です。

例えば 4 次の場合に計算してみましょう。方程式: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$ の解が $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ であり、これらは全て 0 でないとします。

実際に根の 3 乗の逆数の和を計算して行けば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_2^3} + \frac{1}{\alpha_3^3} + \frac{1}{\alpha_4^3} \\ &= \frac{(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^3 + (\alpha_3\alpha_4\alpha_1)^3 + (\alpha_4\alpha_1\alpha_2)^3 + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^3}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^3} \\ & \quad (\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3) \\ & \quad \left\{ (\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 - 3\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4 - 3\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4 \right. \\ & \quad \left. - 3\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2 - 3\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4 - 3\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4^2 \right\} \\ &= \frac{+ 3\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2 + 3\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_3^2\alpha_4^2 + 3\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^3\alpha_4^2 + 3\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^3}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^3} \\ & \quad (\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3) \\ & \quad \left\{ (\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 \right. \\ & \quad \left. - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4) \right\} \\ &= \frac{+ 3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^3} \end{aligned}$$

となっている事が分かります。

従って

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_2^3} + \frac{1}{\alpha_3^3} + \frac{1}{\alpha_4^3} &= \frac{-\frac{a_1}{a_4} \left\{ \left(-\frac{a_1}{a_4} \right)^2 - 3 \cdot \frac{a_0}{a_4} \cdot \frac{a_2}{a_4} \right\} + \left(\frac{a_0}{a_4} \right)^2 \left(-\frac{a_3}{a_4} \right)}{\left(\frac{a_0}{a_4} \right)^3} \\ &= \frac{3a_0a_1a_2 - a_1^3 - 3a_0^2a_3}{a_0^3}\end{aligned}$$

となりますね。

2.2.4 計算例

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$\sin x$ の Taylor 展開と無限積表示から

$$\begin{aligned}\frac{\sin \pi x}{\pi x} &= 1 - \frac{1}{3!} \pi^2 x^2 + \frac{1}{5!} \pi^4 x^4 - \frac{1}{7!} \pi^6 x^6 + \cdots \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)\end{aligned}$$

です。ここで $x^2 = t$ と置けば

$$1 - \frac{1}{3!} \pi^2 t + \frac{1}{5!} \pi^4 t^2 - \frac{1}{7!} \pi^6 t^3 + \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n^2} \right)$$

が分かりますから解と係数の関係から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} &= \frac{3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\pi^2}{3!} \right) \frac{\pi^4}{5!} - \left(-\frac{\pi^2}{3!} \right)^3 - 3 \cdot 1^2 \left(-\frac{\pi^6}{7!} \right)}{1^3} \\ &= \frac{\pi^6}{945}\end{aligned}$$

です。

2.3 Fourier 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^6} = \frac{31\pi^6}{30240}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^6 & (-\pi \leq x < \pi) \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases}$$

に対して Fourier 係数：

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad D_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を求めます（偶関数なので $D_n = 0$ ）。すると、 $n \geq 1$ で

$$C_n = \left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6} \right) \cos(n\pi)$$

です。ここで、 $\frac{1}{n^6}$ だけ取り出したいので上手く $\frac{1}{n^4}$ 等の項をキャンセルさせたい。そこで同様に x^4 の Fourier 係数を計算すると

$$f(x) = x^4 \quad C_n = \left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4} \right) \cos(n\pi)$$

なので、 $-5\pi^2$ を掛けてやれば丁度 $\frac{1}{n^4}$ の項がキャンセルします：

$$f(x) = -5\pi^2 x^4 \quad C_n = \left(-\frac{40\pi^4}{n^2} + \frac{240\pi^2}{n^4} \right) \cos(n\pi)$$

これでもまだ $\frac{1}{n^2}$ の項が残るのでこれをキャンセルさせるために x^2 の Fourier 係数を見ると、

$$f(x) = x^2 \quad C_n = \frac{4}{n^2} \cos(n\pi)$$

なのでこれの $7\pi^4$ 倍で良さそうです：

$$f(x) = 7\pi^4 x^2 \quad C_n = \frac{28\pi^4}{n^2} \cos(n\pi)$$

以上から、 $f(x) = 7\pi^4 x^2 - 5\pi^2 x^4 + x^6$ の Fourier 係数は

$$C_n = \frac{1440}{n^6} \cos(n\pi), \quad C_0 = \frac{62\pi^6}{21}$$

であることが分かり、級数展開式は：

$$7\pi^4 x^2 - 5\pi^2 x^4 + x^6 = \frac{31\pi^6}{21} - 1440 \left(\frac{1}{1^6} \cos x - \frac{1}{2^6} \cos 2x + \frac{1}{3^6} \cos 3x - \cdots \right)$$

となります ($-\pi < x < \pi$)。ここで両辺 $x = 0$ での値を比較すれば

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{31\pi^6}{21} - 1440 \left(\frac{1}{1^6} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots \right) \\ \frac{31\pi^6}{30240} &= \frac{1}{1^6} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots \end{aligned}$$

が得られます。

また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^6} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots &= \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right) - 2 \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \cdots \right) \\ &= \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right) - \frac{1}{2^5} \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right) \\ &= \frac{2^5 - 1}{2^5} \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right) \\ \frac{31\pi^6}{30240} &= \frac{31}{32} \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right) \\ \frac{\pi^6}{945} &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots \end{aligned}$$

も分かります。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \pi^2 x & (-\pi \leq x < \pi) \\ f(x+2\pi) = f(x) & \end{cases}$$

の Fourier 展開は

$$C_0 = 0, \quad C_n = \frac{12}{n^3} \cos(n\pi), \quad D_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

から

$$x^3 - \pi^2 x = -12 \left(\frac{1}{1^3} \sin x - \frac{1}{2^3} \sin 2x + \frac{1}{3^3} \sin 3x - \dots \right)$$

となり、両辺で $x = \frac{\pi}{2}$ と置けば

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\pi^3}{2} &= -12 \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \right) \\ \frac{\pi^3}{32} &= \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \end{aligned}$$

が得られます。

2.4 留数計算

無限和を留数定理によって証明するやり方。

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2} \sum_{m=0, \pm 1, \dots} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{i}{4} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{e^{\frac{iz\pi}{2}}}{e^{i\pi z} + 1} dz$$

式の形をみると、 $z = 2m + 1$ (m : 整数) が積分閉路の中に入っていればよさそうです。

そうすると、特異点は、 $z = 2m + 1$ (m : 整数) で全部1位の極です。 $z = 2m + 1$ の留数は、

$$\text{Res} = (-1)^m / (2m + 1) / 4\pi i$$

なので留数定理より、中辺と右辺の等号がなりたちます。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a), \quad a > 0$$

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + a^2}$$

とおき、4 点 $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ を頂点にもつ正方形を C_n (向きは反時計回り) とし、 $\int_{C_n} f(z) dz$ を考えます。

留数定理により、積分の値は

$$2\pi i \{f(z) \text{ の } C_n \text{ 内の極における留数の和}\}$$

ですね。計算全体はかなりの量になるので、方針を示すのみにして大幅に省略します。

$f(z)$ の極は $\frac{1}{z^2 + a^2}$ から来る $z = \pm ai$ と、 $\cot(\pi z)$ の分母の $\sin(\pi z)$ から来る $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ です (C_n 内にあるのはここまで)。

$$\text{Res}(f; \pm ai) = -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a)$$

$$\text{Res}(f; k) = \frac{1}{k^2 + a^2}$$

従って

$$\begin{aligned} \int_{C_n} f(z) dz &= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) \times 2 + \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k^2 + a^2} \\ &= -\frac{\pi}{a} \coth(\pi a) + \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + a^2} \end{aligned}$$

次に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} f(z) dz = 0$ を示す。

そのために、 C_n 上、 $|\cot(\pi z)| \leq M$ (有界ということ) を示す。

方針は C_n を $y > \frac{1}{2}$ の部分、 $y < -\frac{1}{2}$ の部分、 $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ の部分に分ける。

$y > \frac{1}{2}$ の部分、 $y < -\frac{1}{2}$ の部分では、

$$|\cot(\pi z)| \leq \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1}$$

が成り立つ。

C_n の $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ の部分では、 $z = \pm(n + \frac{1}{2}) + iy$ において

$$|\cot(\pi z)| \leq \left| \cot\left(\frac{\pi}{2} + \pi iy\right) \right| \leq |\tanh(\pi y)| \leq \tanh \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。よって、 C_n 上で有界。

一方、

$$\left| \frac{1}{z^2 + a^2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2 - a^2} \leq \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - a^2} \leq \frac{1}{n^2 - a^2}$$

$$\int_{C_n} |dz| = 4(2n + 1)$$

従って

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{n^2 - a^2} \int_{C_n} |dz| = 4M \frac{2n + 1}{n^2 - a^2} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって、

$$-\frac{\pi}{a} \coth(\pi a) + \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = 0$$

すなわち、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a)$$

ちなみに和を $n = 0$ からにすれば

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a)$$

です。

第3章

その他の級数

3.1 η 関数など

$$\frac{1}{\sinh \pi} + \frac{1}{3 \sinh 3\pi} + \frac{1}{5 \sinh 5\pi} + \cdots = \frac{\log 2}{8}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sinh \pi} + \frac{1}{3 \sinh 3\pi} + \frac{1}{5 \sinh 5\pi} + \cdots \\ &= 2 \cdot \frac{1}{e^\pi - e^{-\pi}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{e^{5\pi} - e^{-5\pi}} + \cdots \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \cdot \frac{1}{e^\pi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - e^{-6\pi}} \cdot \frac{1}{e^{3\pi}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 - e^{-10\pi}} \cdot \frac{1}{e^{5\pi}} + \cdots \\ &= 2(1 + e^{-2\pi} + e^{-4\pi} + \cdots)e^{-\pi} + \frac{2}{3}(1 + e^{-6\pi} + e^{-12\pi} + \cdots)e^{-3\pi} \\ & \quad + \frac{2}{5}(1 + e^{-10\pi} + e^{-20\pi} + \cdots)e^{-5\pi} + \cdots \\ &= 2(e^{-\pi} + e^{-3\pi} + e^{-5\pi} + \cdots) + \frac{2}{3}(e^{-3\pi} + e^{-9\pi} + e^{-15\pi} + \cdots) \\ & \quad + \frac{2}{5}(e^{-5\pi} + e^{-15\pi} + e^{-25\pi} + \cdots) + \cdots \end{aligned}$$

ですが、これを $e^{-n\pi}$ でまとめると、丁度 n の約数が問題となり、

$$\begin{aligned} &= 2e^{-\pi} + 2\left(1 + \frac{1}{3}\right)e^{-3\pi} + 2\left(1 + \frac{1}{5}\right)e^{-5\pi} \\ & \quad + 2\left(1 + \frac{1}{7}\right)e^{-7\pi} + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)e^{-9\pi} + \cdots \\ &= 2 \sum_{n: \text{odd}} (n \text{ の約数の逆数の総和})e^{-n\pi} \end{aligned}$$

となりますが、 n の約数の総和を $\sigma(n)$ と書けば

$$(n \text{ の約数の逆数の総和}) = \frac{\sigma(n)}{n}$$

なので、

$$= 2 \sum_{n: \text{odd}} \sigma(n) \frac{e^{-n\pi}}{n}$$

が分かります。ここで更に総和 $\sigma(n)$ の和の中に 3 を含むものは n が 3 の倍数（奇数倍のみですが）の時なので、そのような感じで全て分類し分けると

$$\begin{aligned} &= 2 \left\{ \left(1 \cdot \frac{e^{-\pi}}{1} + 1 \cdot \frac{e^{-3\pi}}{3} + 1 \cdot \frac{e^{-5\pi}}{5} + \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(3 \cdot \frac{e^{-3\pi}}{3} + 3 \cdot \frac{e^{-9\pi}}{9} + 3 \cdot \frac{e^{-15\pi}}{15} + \cdots \right) + \cdots \right\} \\ &= 2 \sum_{n: \text{odd}} n \sum_{m: \text{odd}} \frac{1}{mn} e^{-mn\pi} \\ &= 2 \sum_{n: \text{odd}} \sum_{m: \text{odd}} \frac{1}{m} e^{-mn\pi} \\ &= 2 \sum_{n: \text{odd}} \left(e^{-n\pi} + \frac{1}{3} e^{-3n\pi} + \frac{1}{5} e^{-5n\pi} + \cdots \right) \\ &= 2 \sum_{n: \text{odd}} \tanh^{-1} e^{-n\pi} \\ &= \sum_{n: \text{odd}} \log \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - e^{-n\pi}} \\ &= \log \prod_{n: \text{odd}} \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - e^{-n\pi}} \end{aligned}$$

まで変形出来ます。

同じ事を別の計算で。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sinh \pi} + \frac{1}{3 \sinh 3\pi} + \frac{1}{5 \sinh 5\pi} + \cdots \\
 &= 2 \sum_{n: \text{ odd}} \sigma(n) \frac{e^{-n\pi}}{n} \\
 &= \sum_{n: \text{ all}} \sigma(n) \frac{(e^{-\pi})^n - (-e^{-\pi})^n}{n} \\
 &= \sum_{n: \text{ all}} \sigma(n) \int_{-e^{-\pi}}^{e^{-\pi}} x^{n-1} dx \\
 &= \int_{-e^{-\pi}}^{e^{-\pi}} \sum_{n: \text{ all}} \sigma(n) x^{n-1} dx
 \end{aligned}$$

ですが、 $\sigma(n)$ の母関数が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mx^m}{1-x^m}$$

であることから、

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-e^{-\pi}}^{e^{-\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mx^{m-1}}{1-x^m} dx \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-e^{-\pi}}^{e^{-\pi}} \frac{mx^{m-1}}{1-x^m} dx \\
 &= \sum_{m: \text{ all}} [-\log(1-x^m)]_{-e^{-\pi}}^{e^{-\pi}} \\
 &= \sum_{m: \text{ all}} \log \frac{1 - (-e^{-\pi})^m}{1 - e^{-m\pi}} \\
 &= \log \prod_{m: \text{ all}} \frac{1 - (-e^{-\pi})^m}{1 - e^{-m\pi}} \\
 &= \log \prod_{m: \text{ odd}} \frac{1 + e^{-m\pi}}{1 - e^{-m\pi}}
 \end{aligned}$$

が得られます。

ここで、

$$\begin{aligned}
 \prod_{n: \text{ odd}} \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - e^{-n\pi}} &= \prod_{n: \text{ odd}} (1 + e^{-n\pi}) \prod_{n: \text{ odd}} \frac{1}{1 - e^{-n\pi}} \\
 &= \prod_{n: \text{ odd}} (1 + e^{-n\pi}) \prod_{n: \text{ all}} \frac{1 - e^{-2n\pi}}{1 - e^{-n\pi}} \\
 &= \prod_{n: \text{ odd}} (1 + e^{-n\pi}) \prod_{n: \text{ all}} \frac{(1 + e^{-n\pi})(1 - e^{-n\pi})}{1 - e^{-n\pi}} \\
 &= \prod_{n: \text{ odd}} (1 + e^{-n\pi}) \prod_{n: \text{ all}} (1 + e^{-n\pi}) \\
 &= \prod_{n: \text{ all}} \frac{(1 + e^{-n\pi})^2}{1 + e^{-2n\pi}}
 \end{aligned}$$

と変形出来ますから更に変形して

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{n: \text{ all}} \frac{(1 - e^{-n\pi})^3 (1 + e^{-n\pi})^2}{(1 - e^{-n\pi})^3 (1 + e^{-2n\pi})} \\
 &= \prod_{n: \text{ all}} \frac{(1 - e^{-n\pi})^3 (1 + e^{-n\pi})^3}{(1 - e^{-n\pi})^3 (1 + e^{-n\pi}) (1 + e^{-2n\pi})} \\
 &= \prod_{n: \text{ all}} \frac{(1 - e^{-2n\pi})^3}{(1 - e^{-n\pi})^2 (1 - e^{-2n\pi}) (1 + e^{-2n\pi})} \\
 &= \prod_{n: \text{ all}} \frac{(1 - e^{-2n\pi})^3}{(1 - e^{-n\pi})^2 (1 - e^{-4n\pi})}
 \end{aligned}$$

であり、エータ関数を

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

で定義すれば

$$\eta\left(\frac{i}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\pi}), \quad \eta(i) = e^{-\frac{2\pi}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2n\pi}), \quad \eta(2i) = e^{-\frac{4\pi}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-4n\pi})$$

から

$$\prod_{n: \text{ odd}} \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - e^{-n\pi}} = \frac{\eta(i)^3}{\eta\left(\frac{i}{2}\right)^2 \eta(2i)}$$

であり、更に Lerch-Chowla-Selberg から

$$\eta(i) = 2^{-1} \pi^{-\frac{3}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \quad \eta\left(\frac{i}{2}\right) = 2^{-\frac{7}{8}} \pi^{-\frac{3}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

後者と保型性から

$$\eta(2i) = 2^{-\frac{11}{8}} \pi^{-\frac{3}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

とのこと（堀江・加納）ですので、結局、

$$\prod_{n: \text{ odd}} \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - e^{-n\pi}} = \frac{2^{-3}}{2^{-\frac{7}{4}} 2^{-\frac{11}{8}}} = 2^{\frac{1}{8}}$$

$$\log \prod_{n: \text{ odd}} \frac{1 + e^{-n\pi}}{1 - e^{-n\pi}} = \frac{1}{8} \log 2$$

$$\frac{1}{\sinh \pi} + \frac{1}{3 \sinh 3\pi} + \frac{1}{5 \sinh 5\pi} + \cdots = \frac{1}{8} \log 2$$

となります。

あるいは、別の変形で

$$= \log \prod_{m: \text{ all}} \frac{1 - (-e^{-\pi})^m}{1 - e^{-m\pi}}$$

ですが、ここで $-1 = e^{-i\pi}$ なので

$$= \sum_{m: \text{ all}} \log \frac{1 - e^{-(1+i)m\pi}}{1 - e^{-m\pi}}$$

$$= \log \prod_{m: \text{ all}} \frac{1 - e^{-(1+i)m\pi}}{1 - e^{-m\pi}}$$

$$= \log \frac{\left| \eta\left(\frac{1+i}{2}\right) \right|}{\eta\left(\frac{i}{2}\right)}$$

ですが、保形関数の変換公式から

$$\left| \eta\left(\frac{1+i}{2}\right) \right| = 2^{\frac{1}{4}} \eta(i)$$

であり、また Selberg から

$$\eta\left(\frac{i}{2}\right) = 2^{\frac{1}{8}} \eta(i)$$

であることも分かるらしいので同じ結果を得ます。

3.1.1 課題

これって

$$\frac{\pi}{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{q^n - 1} - \frac{4}{q^{2n} - 1} + \frac{1}{q^{4n} - 1} \right), \quad q = e^{\pi}$$

じゃないの？

3.2 Ramanujan の公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (4k+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^3}{(k!)^3} = \frac{2}{\pi}$$

ただし、

$$\text{Pochhammer の記号 : } (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$$

とします。

補題として非負整数 n に対して次を考えます :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (4k+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^2 (-n)_k}{(k!)^2 \left(\frac{3}{2}+n\right)_k} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1)}$$

ここで “ $n = -\frac{1}{2}$ ” とすれば上の Ramanujan の公式になるわけなんですが、まずはこれを証明しておきましょう。

非負整数 k, n に対して

$$F(n, k) = (-1)^k (4k+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^2 (-n)_k}{(k!)^2 \left(\frac{3}{2}+n\right)_k} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}$$

$$G(n, k) = \frac{(2k+1)^2}{(2n+2k+3)(4k+1)} F(n, k)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} F(n+1, k) &= (-1)^k (4k+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^2 (-n-1)_k}{(k!)^2 \left(\frac{3}{2}+n+1\right)_k} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+1\right)} \\ &= (-1)^k (4k+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^2 (-n)_k \frac{-n-1}{-n+k-1}}{(k!)^2 \left(\frac{3}{2}+n\right)_k \frac{\frac{3}{2}+n+1+k-1}{\frac{3}{2}+n}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(n+1)\Gamma(n+1)}{\left(\frac{3}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \\ &= (-1)^k (4k+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^2 (-n)_k}{(k!)^2 \left(\frac{3}{2}+n\right)_k} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \frac{-(n+1)^2}{(-n+k-1)\left(\frac{3}{2}+n+k\right)} \\ &= -F(n, k) \frac{(n+1)^2}{(-n+k-1)\left(\frac{3}{2}+n+k\right)} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
F(n+1, k) - F(n, k) &= \left\{ \frac{2(n+1)^2}{(n-k+1)(3+2n+2k)} - 1 \right\} F(n, k) \\
&= \frac{2k^2 + k - n - 1}{(n-k+1)(2n+2k+3)} F(n, k)
\end{aligned}$$

となっています。

一方、 $k \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
G(n, k-1) &= \frac{(2k-1)^2}{(2n+2k+1)(4k-3)} F(n, k-1) \\
&= \frac{(2k-1)^2}{(2n+2k+1)(4k-3)} \frac{(-1)^{k-1}(4k-3) \left(\frac{1}{2}\right)_{k-1}^2 (-n)_{k-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\{(k-1)!\}^2 \left(\frac{3}{2}+n\right)_{k-1} \Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \\
&= \frac{(2k-1)^2}{(2n+2k+1)(4k-3)} \frac{-(4k-3)k^2 \left(\frac{3}{2}+n+k-1\right)}{(4k+1) \left(\frac{1}{2}+k-1\right)^2 (-n+k-1)} \\
&\quad \frac{(-1)^k (4k+1) \left(\frac{1}{2}\right)_k^2 (-n)_k \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(n+1)}{(k!)^2 \left(\frac{3}{2}+n\right)_k \Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \\
&= \frac{(2k-1)^2}{(2n+2k+1)(4k-3)} \frac{-2(4k-3)k^2(2n+2k+1)}{(4k+1)(2k-1)^2(-n+k-1)} F(n, k) \\
&= \frac{2k^2}{(4k+1)(n-k+1)} F(n, k)
\end{aligned}$$

によれば

$$\begin{aligned}
G(n, k) - G(n, k-1) &= \left\{ \frac{(2k+1)^2}{(2n+2k+3)(4k+1)} - \frac{2k^2}{(4k+1)(n-k+1)} \right\} F(n, k) \\
&= -\frac{2k^2 + k - n - 1}{(n-k+1)(2n+2k+3)} F(n, k)
\end{aligned}$$

ですから、 $n \geq 0, k \geq 1$ に対して

$$F(n+1, k) - F(n, k) = G(n, k-1) - G(n, k)$$

が成り立っている事が分かります。

$k = 0$ の時は

$$\begin{aligned}
 F(n+1, 0) - F(n, 0) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(n+2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n + 1\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)} \\
 &= \left(\frac{n+1}{\frac{3}{2} + n} - 1\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)} \\
 &= \frac{-1}{2n+3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)} \\
 G(n, 0) &= \frac{1}{2n+3} F(n, 0) = \frac{1}{2n+3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)}
 \end{aligned}$$

から

$$F(n+1, 0) - F(n, 0) = -G(n, 0)$$

が成り立っています。

また、 $k = n+1$ のとき、

$$(-n)_k = (-n)_{n+1} = (-n)(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+n-1)(-n+n) = 0$$

となり、 $k \geq n+1$ なら $F(n, k) = 0, G(n, k) = 0$ であることが分かりますから、結局、以上で得られた漸化式を書き出せば

$$\begin{aligned}
 F(n+1, 0) - F(n, 0) &= -G(n, 0) \\
 F(n+1, 1) - F(n, 1) &= G(n, 0) - G(n, 1) \\
 F(n+1, 2) - F(n, 2) &= G(n, 1) - G(n, 2) \\
 &\vdots \\
 F(n+1, n) - F(n, n) &= G(n, n-1) - G(n, n) \\
 F(n+1, n+1) - F(n, n+1) &= G(n, n) \\
 F(n+1, n+2) - F(n, n+2) &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

となりますから、これらの式の両辺を k について足し合わせれば、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{F(n+1, k) - F(n, k)\} = 0$$

であることが分かります。

従って任意の非負整数 n について

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(n+1, k) = \sum_{k=0}^{\infty} F(n, k)$$

ですから、 $\sum_{k=0}^{\infty} F(n, k)$ は n に依らず定数であることが分かります。 $n=0$ のときは

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(0, k) = F(0, 0) = 1$$

ですから結局、任意の非負整数 n に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(n, k) = 1$$

であることが分かりました。これで補題は証明されました。

あとは Carlson の定理を使って整数でない任意の n についても正しいことを言えばおしまい。

定理 3.2.1 [Carlson's Theorem] $f(z)$ は指数型の（制限をもった）正則関数である、つまり、ある定数 $\tau < \infty$ があって

$$f(z) = \mathcal{O}(1)e^{\tau|z|}$$

が成り立っており、また、ある定数 $c < \pi$ に対して

$$f(iy) = \mathcal{O}(1)e^{c|y|}$$

であるとします。

この時、任意の非負整数 n に対して $f(n) = 0$ なら任意の z に対して $f(z) = 0$ です。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (4k+1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k^2 (-z)_k}{(k!)^2 \left(\frac{3}{2}+z\right)_k} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+z\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(z+1)}$$

と置けば、これは上記定理の条件を満たすんだそう！

3.3 Bell 数

$$B_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j, \quad B_0 = 1$$

によって帰納的に得られる数列 $\{B_n\}$ を Bell 数と言います。

3.3.1 無限級数表現

無限級数：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

の和は Napier 数の自然数倍になりますが、その倍数が正に Bell 数です。

3.3.2 e^{e^x} の微分係数

3.4 cosecant

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx = \frac{\pi}{p} \csc \frac{m\pi}{p} \quad (p-m+1 > 1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx}_{J_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx}_{J_2}$$

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{m+kp}$$

$$J_2 = \int_1^0 \frac{y^{1-m}}{1+y^{-p}} (-y^{-2}) dy = \int_0^1 \frac{y^{-m-1}}{1+y^{-p}} dy = \int_0^1 \frac{y^{p-m-1}}{1+y^p} dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p-m+kp}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx + \int_0^1 \frac{x^{p-m-1}}{1+x^p} dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{p-m-1}}{1+x^p} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^{a+b}} dx + \int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^{a+b}} dx = \frac{\pi}{a+b} \csc \frac{a\pi}{a+b} = \frac{\pi}{a+b} \csc \frac{b\pi}{a+b}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{b-1}}{1+x^{a+b}} dx = \frac{\pi}{a+b} \csc \frac{a\pi}{a+b} = \frac{\pi}{a+b} \csc \frac{b\pi}{a+b}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k(a+b)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b+k(a+b)} = \frac{\pi}{a+b} \csc \frac{a\pi}{a+b} = \frac{\pi}{a+b} \csc \frac{b\pi}{a+b}$$

$a = b$ のとき、

$$2 \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^{2a}} dx = \frac{\pi}{2a} \csc \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^{2a}} dx = \frac{\pi}{4a}$$

これは、

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^{2a}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+2ak} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{a} \frac{\pi}{4}$$

である。

3.5 Inverse tangent integral

$$\text{Ti}_2(z) = \int_0^z \frac{\text{Tan}^{-1} x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

3.6 ベきを付加して調和数を収束させたもの

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+kp} r^{m+kp} - \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1+x^p} dx$$

これは ξ を 1 の原始 p 乗根としたときに

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (\xi^a)^j = \begin{cases} 1 & a \equiv 0 \pmod{p} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である事によって

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r^k \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (\xi^{k-m})^j \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \xi^{-mj} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\xi^j r)^k \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \xi^{-mj} \{-\log |1 - \xi^j r|\} \\ &= -\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \xi^{-mj} \log |1 - \xi^j r| \end{aligned}$$

と書けます。右辺の和の $j = 0$ の項は $r \rightarrow 1 - 0$ で発散してしまいますので、このまま極限をとる事は出来ません。

3.7 Digamma 関数の有理数での値を使った表示

2 次式の逆数の和の Digamma 関数による表示 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)} = \frac{1}{(m_2-m_1)p} \left\{ \Psi\left(\frac{m_2}{p}\right) - \Psi\left(\frac{m_1}{p}\right) \right\}$$

と、Digamma 関数の有理数での値に関する Gauß の定理 :

$$\Psi\left(\frac{m}{p}\right) = -\gamma - \log(2p) - \frac{\pi}{2} \cot \frac{m\pi}{p} + 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]-1} \cos \frac{2\pi mk}{p} \log \left(\sin \frac{\pi k}{p} \right)$$

を合わせれば、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)} \\ &= \frac{1}{(m_2-m_1)p} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\cot \frac{m_1\pi}{p} - \cot \frac{m_2\pi}{p} \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]-1} \left(\cos \frac{2\pi m_2 k}{p} - \cos \frac{2\pi m_1 k}{p} \right) \log \left(\sin \frac{\pi k}{p} \right) \right\} \end{aligned}$$

が得られます。

3.8 sin の和と digamma

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi k}{3}}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi 6k}{3}}{(6k)^2} + \frac{\sin \frac{\pi(6k+1)}{3}}{(6k+1)^2} + \frac{\sin \frac{\pi(6k+2)}{3}}{(6k+2)^2} + \frac{\sin \frac{\pi(6k+3)}{3}}{(6k+3)^2} + \frac{\sin \frac{\pi(6k+4)}{3}}{(6k+4)^2} + \frac{\sin \frac{\pi(6k+5)}{3}}{(6k+5)^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(6k+1)^2} + \frac{1}{(6k+2)^2} - \frac{1}{(6k+4)^2} - \frac{1}{(6k+5)^2} \right\} \end{aligned}$$