無限和の具体的計算（草稿）

笠井剛

Thursday 20th August, 2020

目次

第 1 章

積分による級数の和の計算

1.1　核となる積分

定義 1.1.1 正の整数 m, p, n と $0 < r < 1$ なる実数 r に対して次の積分を定義します：

$$J^n_{m,p} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^{np})}{1-x^p}dx, \qquad J^\infty_{m,p}(r) = \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx,$$
$$K^n_{m,p} = \int_0^1 \frac{x^{m-1}\left\{1-(-1)^n x^{np}\right\}}{1+x^p}dx, \quad K^\infty_{m,p}(r) = \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1+x^p}dx.$$

右辺の積分の中の

$$\frac{1-x^{np}}{1-x^p}$$

などの部分は、等比級数の有限和の公式から

$$\frac{1-x^{np}}{1-x^p} = 1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(n-1)p}$$

となっている事に注意します。従ってここに挙げた４つの積分は全て存在しています。また、$K^\infty_{p,m}(r)$ だけは $r=1$ でも存在しています。

命題 1.1.2

$$J^n_{m,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{m+kp}, \quad J^\infty_{m,p}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m+kp} r^{m+kp}.$$

【証明】

$$\begin{aligned}
J^n_{m,p} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}\left(1-x^{np}\right)}{1-x^p}dx \\
&= \int_0^1 x^{m-1}\left\{1 + x^p + x^{2p} + \cdots + x^{(n-1)p}\right\}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 x^{m+kp-1}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{m+kp}
\end{aligned}$$

また、$J^\infty_{m,p}(r)$ については、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-x^p} = 1 + x^p + x^{2p} + \cdots$$

であって、この級数は閉区間 $[0,r]$ で一様収束していますから項別積分が可能であって

$$\begin{aligned} J_{m,p}^{\infty}(r) &= \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1+x^p}dx \\ &= \int_0^r x^{m-1}(1+x^p+x^{2p}+\cdots)dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^r x^{m+kp-1}dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+kp}r^{m+kp} \end{aligned}$$

が成り立ちます。 □

命題 1.1.3

$$K_{m,p}^{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{m+kp}, \quad K_{m,p}^{\infty}(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m+kp}r^{m+kp}.$$

【証明】

$$\begin{aligned} K_{m,p}^{n} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}\left\{1-(-1)^n x^{np}\right\}}{1+x^p}dx \\ &= \int_0^1 x^{m-1}\left\{1-x^p+x^{2p}-\cdots+(-1)^{n-1}x^{(n-1)p}\right\}dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (-1)^k x^{m+kp-1}dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{m+kp} \end{aligned}$$

$$K_{m,p}^{\infty}(r) = \int_0^r \frac{x^{m-1}}{1+x^p}dx$$

ですが、ここで等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1+x^p} = 1-x^p+x^{2p}-\cdots$$

であって、この級数は閉区間 $[0,r]$ で一様収束していますから項別積分が可能であって

$$\begin{aligned} &= \int_0^r x^{m-1}(1-x^p+x^{2p}-\cdots)dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^r (-1)^k x^{m+kp-1}dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m+kp}r^{m+kp} \end{aligned}$$

が得られます。 □

命題 1.1.4

$$\lim_{n\to\infty} K_{m,p}^{n} = K_{m,p}^{\infty}(1)$$

【証明】

$$\begin{aligned} K_{m,p}^{n} &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}\left\{1-(-1)^n x^{np}\right\}}{1+x^p}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1+x^p}dx - (-1)^n\int_0^1 \frac{x^{m+np-1}}{1+x^p}dx \\ &= K_{m,p}^{\infty}(1) - (-1)^n\int_0^1 \frac{x^{m+np-1}}{1+x^p}dx \end{aligned}$$

ですが、

$$\begin{aligned} \left|(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{m+np-1}}{1+x^p}dx\right| &\leq \int_0^1 \left|\frac{x^{m+np-1}}{1+x^p}\right|dx \\ &\leq \int_0^1 x^{m+np-1}dx \\ &= \frac{1}{m+np} \end{aligned}$$

から

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{x^{m+np-1}}{1+x^p}dx=0$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty}K_{m,p}^n=K_{m,p}^\infty(1)$$

です。 □

1.2　逆数の和

まず基本的な事実として、等間隔に取られた正数の逆数の和は収束しません。

事実 1.2.1 任意の正数 m,p に対して次の無限級数は $+\infty$ に発散します：

$$\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{m+kp}.$$

【証明】n を十分大きく取って、$\frac{m}{n}<1$ が成り立つようにすると、第 $n+1$ 項からの連続 n 項の和は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+(n+1)p}+\frac{1}{m+(n+2)p}+\cdots+\frac{1}{m+(n+n)p}\\&\geq\frac{1}{m+(n+n)p}+\frac{1}{m+(n+n)p}+\cdots+\frac{1}{m+(n+n)p}\\&=\frac{n}{m+2np}\\&=\frac{1}{\frac{m}{n}+2p}\\&\geq\frac{1}{1+2p}\end{aligned}$$

が成り立ちますから、部分和の成す数列は収束しません。従って正項級数ですから $+\infty$ に発散するしかありません。 □

しかし、交代和なら収束します：

事実 1.2.2 任意の正数 m,p に対して次の無限級数は収束します：

$$\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{m+kp}.$$

これはより一般的な次の定理から簡単に導かれます：

定理 1.2.3 交代級数 $\sum a_k$ の各項の絶対値は単調減少であって $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ を満たすならこの級数は収束します。

【証明】奇数項が正、偶数項が負とします（逆なら全てにマイナスを掛ければ良い）。$a_{2n+1} + a_{2n+2} \geq 0$ ですから偶数項目までの部分和 $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k$ は単調増加です。また、$a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq 0$ ですから奇数項目までの部分和 $S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} a_k$ は単調減少です。しかも $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n}$ ですから結局

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots S_5 \leq S_3 \leq S_1$$

となっていて２つの極限値 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}, \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ はともに存在する事が分かります（有界な単調列は収束する）。しかも $|S_{2n+1} - S_{2n}| = |a_{2n+1}| \to 0$ なのでその２つの極限値は一致している事も分かり、従って問題の級数は収束する事が分かります。 □

1.3　２数の積の逆数の和

まず部分分数分解：

補題 1.3.1 $m_1 < m_2$ のとき

$$\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)} = \frac{1}{m_2-m_1}\left\{\frac{1}{m_1+kp} - \frac{1}{m_2+kp}\right\}.$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)} \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{m_1+kp} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{m_2+kp}\right\} \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\left(J^n_{m_1,p} - J^n_{m_2,p}\right) \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1 \left(x^{m_1-1} - x^{m_2-1}\right)\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx
\end{aligned}$$

ですが、ここで $m_2 - m_1$ と p が正の整数であれば

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)} - \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{\left(x^{m_1-1}-x^{m_2-1}\right)x^{np}}{1-x^p}dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}\left(1-x^{m_2-m_1}\right)x^{np}}{1-x^p}dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{\left(x^{m_1-1}+x^{m_1}+\cdots+x^{m_2-2}\right)x^{np}}{1+x+\cdots+x^{p-1}}dx\right| \\
&\leq \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\left(x^{m_1+np-1}+x^{m_1+np}+\cdots+x^{m_2+np-2}\right)dx \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{1}{m_1+np}+\frac{1}{m_1+np+1}+\cdots+\frac{1}{m_2+np-1}\right) \\
&\to 0 \quad (\text{ as } n\to\infty\ )
\end{aligned}$$

となりますから次の事実が得られます：

定理 1.3.2 m_1, m_2, p が正の整数で $m_1 < m_2$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)} = \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx.$$

> $m_2 - m_1$ さえ整数であれば m_1, m_2 自体が整数である必要はありません。もっと言えば、後に書きますが、$m_2 - m_1$ も整数である必要はありません。

1.3.1　簡単な場合の具体的計算

【$m_2 = m_1 + p$ のとき】右辺の積分は

$$\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_1+p-1}}{1-x^p}dx = \frac{1}{p}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}\left(1-x^p\right)}{1-x^p}dx = \frac{1}{p}\int_0^1 x^{m_1-1}dx = \frac{1}{m_1p}$$

ですが、左辺の級数も

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_1+p+kp)} &= \frac{1}{m_1(m_1+p)}+\frac{1}{(m_1+p)(m_1+2p)}+\cdots \\ &= \frac{1}{p}\left\{\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_1+p}+\frac{1}{m_1+p}-\frac{1}{m_1+2p}+\cdots\right\} \\ &= \frac{1}{m_1p}\end{aligned}$$

となっている事がすぐにわかります。

【$m_2-m_1=2p$ のとき】この場合は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2p}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_1+2p-1}}{1-x^p}dx &= \frac{1}{2p}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}\left(1-x^{2p}\right)}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{2p}\int_0^1 x^{m_1-1}(1+x^p)dx \\ &= \frac{1}{2p}\int_0^1(x^{m_1-1}+x^{m_1+p-1})dx \\ &= \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}\right)\end{aligned}$$

ですが、左辺の級数も

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_1+2p+kp)} \\ &= \frac{1}{m_1(m_1+2p)}+\frac{1}{(m_1+p)(m_1+3p)}+\cdots \\ &= \frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_1+2p}+\frac{1}{m_1+p}-\frac{1}{m_1+3p}+\cdots\right\} \\ &= \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}\right)\end{aligned}$$

となっている事がすぐにわかります。

【$m_2-m_1=lp$ のとき】この場合も次の様に計算されます：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(kp+m_1)(kp+m_1+lp)} \\ &= \frac{1}{lp}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_1+lp-1}}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{lp}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}(1-x^{lp})}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{lp}\int_0^1 x^{m_1-1}(1+x^p+x^{2p}+\cdots+x^{(l-1)p})dx \\ &= \frac{1}{lp}\left[\frac{1}{m_1}x^{m_1}+\frac{1}{m_1+p}x^{m_1+p}+\cdots+\frac{1}{m_1+(l-1)p}x^{m_1+(l-1)p}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{lp}\left\{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}+\cdots+\frac{1}{m_1+(l-1)p}\right\}.\end{aligned}$$

従って次が成り立ちます：

事実 1.3.3 m_1,p,l が正の整数のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(kp+m_1)(kp+m_1+lp)}=\frac{1}{lp}\left\{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}+\cdots+\frac{1}{m_1+(l-1)p}\right\}.$$

1.3.2　その他の具体的な計算

幾つか具体的に計算できるものを挙げておきます。

事実 1.3.4

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+3)(3k+7)}=\frac{1}{144}(45-2\sqrt{3}\pi-18\log 3)$$

定理 1.3.1 から

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+3)(3k+7)} &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2-x^6}{1-x^3}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2(1-x)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1+x+x^2)}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2+x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2}dx\end{aligned}$$

であり、部分分数分解によって

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2} &= x^3+1-\frac{1+x}{1+x+x^2} \\ &= x^3+1-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= x^3+1-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{1+x+x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+1}\end{aligned}$$

ですから

$$\int \frac{x^2+x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2}dx = \frac{1}{4}x^4+x-\frac{1}{2}\log(1+x+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

が得られ、従って

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\int \frac{x^2+x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2}dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4+x-\frac{1}{2}\log(1+x+x^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{144}\left(45-18\log 3-2\sqrt{3}\pi\right)\end{aligned}$$

が分かります。 □

事実 1.3.5

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)} = 1-\frac{3}{4}\log 2-\frac{\pi}{8}$$

定理 1.3.2 によれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)} &= \int_0^1 \frac{x^3-x^4}{1-x^4}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{1+x+x^2+x^3}dx\end{aligned}$$

です。そこで原始関数を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{1+x+x^2+x^3} &= 1-\frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3} \\ &= 1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \\ &= \left\{x-\frac{1}{2}\log|1+x|-\frac{1}{4}\log(1+x^2)-\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x\right\}'\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)} &= \left[x-\frac{1}{2}\log|1+x|-\frac{1}{4}\log(1+x^2)-\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1 \\ &= 1-\frac{3}{4}\log 2-\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

が得られます。 □

事実 1.3.6

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+6)} = \frac{1}{4}(1-\log 2)$$

定理 1.3.2 によれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+6)} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3-x^5}{1-x^4}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3+x^4}{1+x+x^2+x^3}dx\end{aligned}$$

ですから原始関数を計算すると

$$\frac{x^3+x^4}{1+x+x^2+x^3} = \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2} = \left\{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\}'$$

ですから

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+6)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left\{x^2-\log(1+x^2)\right\}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1-\log 2)$$

が得られます。 □

事実 1.3.7

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+7)} = \frac{1}{72}(8+3\pi-18\log 2)$$

やはりまず定理 1.3.2 によれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+7)} &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3-x^6}{1-x^4}dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3(1-x^3)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3(1+x+x^2)}{1+x+x^2+x^3}dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2+x^3}dx\end{aligned}$$

です。そこで原始関数を計算すると、まず部分分数分解して

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2+x^3} &= x^2 - \frac{x^2}{(1+x)(1+x^2)} \\ &= x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} - \frac{1}{4}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2+x^3}dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x$$

ですから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+7)} &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \frac{1}{72}(8-18\log 2+3\pi)\end{aligned}$$

が得られます。 □

事実 1.3.8

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+9)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+1-\frac{3}{4}\log 2-\frac{\pi}{8}\right)$$

定理 1.3.2 によれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+9)} &= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^3-x^8}{1-x^4}dx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^3(1-x^5)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}dx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^3(1+x+x^2+x^3+x^4)}{1+x+x^2+x^3}dx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}{1+x+x^2+x^3}dx\end{aligned}$$

です。そこで原始関数を計算するために部分分数分解しますが

$$\frac{x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}{1+x+x^2+x^3} = x^4 + \frac{x^3}{1+x+x^2+x^3}$$

となってこの第 2 項は先ほど $\dfrac{1}{(4k+4)(4k+5)}$ のときに出て来たものと同じですから

$$\begin{aligned}&= x^4+1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\\ \int\frac{x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}{1+x+x^2+x^3}dx &= \frac{1}{5}x^5+x-\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{4}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x\end{aligned}$$

であって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+9)} &= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}x^5+1-\frac{1}{4}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+1-\frac{3}{4}\log 2-\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

が得られます。 □

1.3.3　特別な関係にある 2 つの無限和

今の計算に出て来た奇妙な一致は何でしょうか？　具体的に書いてみると

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{12\cdot 13}+\cdots &= \frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\cdots\\ \frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{8\cdot 13}+\frac{1}{12\cdot 17}+\cdots &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{8}-\frac{1}{13}+\frac{1}{12}-\frac{1}{17}+\cdots\right)\end{aligned}$$

ですから確かに下を 5 倍して $\frac{1}{5}$ を引けば上になっていますね。

また、有限和を積分の形で比較すれば

$$\begin{aligned}5(J^n_{4,4}-J^n_{4,9})-(J^n_{4,4}-J^n_{4,5}) &= \int_0^1\frac{(x^3-x^8)(1-x^{4n})}{1-x^4}dx-\int_0^1\frac{(x^3-x^4)(1-x^{4n})}{1-x^4}dx\\ &= \int_0^1\frac{(x^4-x^8)(1-x^{4n})}{1-x^4}dx\\ &= \int_0^1 x^4(1-x^{4n})dx\\ &= \left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4n+5}x^{4n+5}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{5}-\frac{1}{4n+5}\end{aligned}$$

です。確かに極限をとればその様になっていますね。これは一般化出来そうです。

項のレヴェルでも

$$\begin{aligned}\frac{5}{(4k+4)(4k+9)}-\frac{1}{(4k+4)(4k+5)} &= \frac{5(4k+5)-(4k+9)}{(4k+4)(4k+5)(4k+9)}\\ &= \frac{16k+16}{(4k+4)(4k+5)(4k+9)}\\ &= \frac{4}{(4k+5)(4k+9)}\end{aligned}$$

となっていて上手く $4k+4$ がキャンセルして消えてくれます。残ったものは $4k+5$ と $4k+9$ であって、$9-5=4$ なのでこれは先ほど 1.3.1 節で見た簡単なケースで、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+5)(4k+9)}=\frac{1}{4\cdot 5}$$

でしたから、やはり

$$5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+9)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)}=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+5)(4k+9)}=\frac{1}{5}$$

が得られます。

> 課題 **1.3.9**　2 つの和：
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+lp+m_2)},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}$$
>
> の間の関係式を見いだそう。あるいはより一般に
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+l_1p+m_1)(pk+l_2p+m_2)},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}$$
>
> の間の関係式を見いだそう。ただしこれは本質的には前者に帰着されるであろう。

まず前者を見て行きましょう。さっきの経験から

$$\frac{A}{(pk+m_1)(pk+lp+m_2)}-\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}=\frac{B}{(pk+lp+m_2)(pk+m_2)}$$

となるような A を探せば良いわけですが、通分して分子を比較すれば

$$\begin{aligned} A(pk+m_2)-(pk+lp+m_2) &= B(pk+m_1) \\ (A-1)pk+m_2(A-1)-lp &= B(pk+m_1) \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} m_2(A-1)-lp &= (A-1)m_1 \\ (m_2-m_1)A &= lp+m_2-m_1 \\ A &= \frac{lp+m_2-m_1}{m_2-m_1} \end{aligned}$$

であれば良く、このとき $B=A-1=\frac{lp}{m_2-m_1}$ です。従って

$$\begin{aligned} &\frac{lp+m_2-m_1}{m_2-m_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+lp+m_2)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)} \\ &=\frac{lp}{m_2-m_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_2)(pk+lp+m_2)} \\ &=\frac{1}{m_2-m_1}\left\{\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_2+p}+\cdots+\frac{1}{m_2+(l-1)p}\right\} \end{aligned}$$

となって有限和に帰着されます。

一般に次の様になっていて：

事実 1.3.10 任意の a,b,c,p,k に対して

$$\frac{c-a}{(pk+a)(pk+c)}-\frac{b-a}{(pk+a)(pk+b)}=\frac{c-b}{(pk+b)(pk+c)}.$$

b と c が $c=b+lp$ と云う特別な関係にある場合は 1.3.1 節の結果から有限和に帰着されます。

更に言えば、部分分数分解には次のような著しい性質があって：

事実 1.3.11 任意の $a_1,\ldots,a_n$ に対して、

$$\frac{a_1-a_2}{(x+a_1)(x+a_2)}+\frac{a_2-a_3}{(x+a_2)(x+a_3)}+\cdots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(x+a_{n-1})(x+a_n)}+\frac{a_n-a_1}{(x+a_n)(x+a_1)}=0$$

特に

$$\frac{a-b}{(pk+a)(pk+b)}+\frac{b-c}{(pk+b)(pk+c)}+\frac{c-d}{(pk+c)(pk+d)}+\frac{d-a}{(pk+d)(pk+a)}=0$$

すなわち

$$\frac{a-b}{(pk+a)(pk+b)}+\frac{c-d}{(pk+c)(pk+d)}=\frac{a-d}{(pk+d)(pk+a)}+\frac{c-b}{(pk+b)(pk+c)}$$

ですから、a,d、b,c の間にそれぞれ $d=a+lp$、$c=b+pn$ と云う特別な関係があれば右辺の無限和は有限和に帰着される事になります。

従って $a=m_1,b=m_2$、$d=m_1+l_1p,c=m_2+l_2p$ ならば

$$\begin{aligned} &\frac{m_1-m_2}{(pk+m_1)(pk+m_2)}+\frac{m_2-m_1+(l_2-l_1)p}{(pk+m_2+l_2p)(pk+m_1+l_1p)} \\ &\qquad=\frac{-l_1p}{(pk+m_1+l_1p)(pk+m_1)}+\frac{l_2p}{(pk+m_2)(pk+m_2+l_2p)} \end{aligned}$$

であって、

$$\begin{aligned} &\{m_2-m_1+(l_2-l_1)p\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1+l_1p)(pk+m_2+l_2p)} \\ &\qquad-(m_2-m_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)} \\ &=l_2p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_2)(pk+m_2+l_2p)}-l_1p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_1+l_1p)} \\ &=\left\{\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_2+p}+\cdots+\frac{1}{m_2+p(l_2-1)}\right\} \\ &\qquad-\left\{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}+\cdots+\frac{1}{m_1+p(l_1-1)}\right\} \end{aligned}$$

が得られます。

事実 1.3.12 任意の正の整数 p, m_1, m_2, l_1, l_2 に対して

$$\begin{aligned}&\{m_2-m_1+(l_2-l_1)p\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1+l_1p)(pk+m_2+l_2p)}\\&\qquad -(m_2-m_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}\\&=\left\{\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_2+p}+\cdots+\frac{1}{m_2+p(l_2-1)}\right\}\\&\qquad -\left\{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}+\cdots+\frac{1}{m_1+p(l_1-1)}\right\}.\end{aligned}$$

ただし、$l_1=0$ あるいは $l_2=0$ の場合も、右辺の相当項を 0 として成立します。

【別証明】積分を使って見てみましょう。$m_1 \le m_2$ の場合で考えます。

$$\begin{aligned}&\frac{x^{m_1+l_1p-1}-x^{m_2+l_2p-1}}{1-x^p}\\&=\frac{x^{m_1+l_1p-1}-x^{m_1-1}+x^{m_1-1}-x^{m_2-1}+x^{m_2-1}-x^{m_2+l_2p-1}}{1-x^p}\\&=-\frac{x^{m_1-1}-x^{m_1+l_1p-1}}{1-x^p}+\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}+\frac{x^{m_2-1}-x^{m_2+l_2p-1}}{1-x^p}\end{aligned}$$

ですから、積分して

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{x^{m_1+l_1p-1}-x^{m_2+l_2p-1}}{1-x^p}dx\\&=-\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_1+l_1p-1}}{1-x^p}dx+\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx+\int_0^1\frac{x^{m_2-1}-x^{m_2+l_2p-1}}{1-x^p}dx\\&\int_0^1\frac{x^{m_1+l_1p-1}-x^{m_2+l_2p-1}}{1-x^p}dx-\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx\\&=\int_0^1\frac{x^{m_2-1}-x^{m_2+l_2p-1}}{1-x^p}dx-\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_1+l_1p-1}}{1-x^p}dx\\&=\int_0^1\frac{x^{m_2-1}(1-x^{l_2p})}{1-x^p}dx-\int_0^1\frac{x^{m_1-1}(1-x^{l_1p})}{1-x^p}dx\\&=\int_0^1 x^{m_2-1}(1+x^p+\cdots+x^{(l_2-1)p})dx-\int_0^1 x^{m_1-1}(1+x^p+\cdots+x^{(l_1-1)p})dx\\&=\left\{\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_2+p}+\cdots+\frac{1}{m_2+p(l_2-1)}\right\}-\left\{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}+\cdots+\frac{1}{m_1+p(l_1-1)}\right\}\end{aligned}$$

が得られます（$m_2 < m_1$ の場合も同様）。 □

要するに多項式 $x^{m_2+l_2p-1}-x^{m_1+l_1p-1}-x^{m_2-1}+x^{m_1-1}$ が x^p-1 で割り切れて多項式の積分になると云う事ですが、以下の例でそこを直接見てみましょう：

例 1.3.13

$$3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+12)(4k+9)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)}=\frac{7}{40}$$

$m_1=4, m_2=5, l_1=2, l_2=1, p=4$ の場合と考えて計算します。

$$\begin{aligned}&-3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+12)(4k+9)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)}\\&=-\int_0^1\frac{x^8-x^{11}}{1-x^4}dx-\int_0^1\frac{x^3-x^4}{1-x^4}dx\\&=\int_0^1\frac{x^{11}-x^8+x^4-x^3}{1-x^4}dx\\&=-\int_0^1(x^7-x^4+x^3)dx\\&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\\&=-\frac{7}{40}\end{aligned}$$

□

例 1.3.14

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}-7\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+4)(3k+11)}=\frac{7}{40}$$

$m_1=1, m_2=2, l_1=1, l_2=3, p=3$ の場合と考えて計算します。

$$\begin{aligned}
&7\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+4)(3k+11)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}\\
&=\int_0^1\frac{x^3-x^{10}}{1-x^3}dx-\int_0^1\frac{x^0-x^1}{1-x^3}dx\\
&=\int_0^1\frac{x^{10}-x^3-x+1}{x^3-1}dx\\
&=\int_0^1(x^7+x^4+x-1)dx\\
&=\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1\\
&=-\frac{7}{40}
\end{aligned}$$

□

課題 1.3.15 この他にも $x^{n_1}-x^{n_2}+x^{n_3}-x^{n_4}$ あるいは $x^{n_1}-x^{n_2}-x^{n_3}+x^{n_4}$ が x^p-1 で割り切れる事はあるのでしょうか？

また、今は有理数だけ残しましたが、$\log$ だけ、あるいは π だけが残る様にするにはどうしたら良いでしょうか。

特に和が π になるようなものを探せば、今見た結果から

$$S_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)}=1-\frac{3}{4}\log 2-\frac{\pi}{8} \tag{1.1}$$

$$S_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+6)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\log 2 \tag{1.2}$$

$$S_3=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+7)}=\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{24} \tag{1.3}$$

なので、これを解けば

$$-20S_1+96S_2-36S_3=\pi$$

である事が分かります。従って次式が得られます：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{16}{4k+4}+\frac{20}{4k+5}-\frac{48}{4k+6}+\frac{12}{4k+7}\right)=\pi.$$

1.3.4　$p=4$ の場合の全てを網羅する

まず事実 1.3.12 から

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+m_1)(4k+m_2)},\quad m_1<m_2$$

は、m_1, m_2 共に $1,2,3,4$ の場合のみ考えれば良く、

$$(m_1,m_2)=(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$$

だけ計算すれば良い事が分かります。

このうち $(1,4),(2,4),(3,4)$ はそれぞれ $(4,5),(4,6),(4,7)$ として既に計算済みです：

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)}-3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+4)}=-1$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+4)}&=\frac{1}{3}\left\{1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+5)}\right\}\\
&=\frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{24}.
\end{aligned}$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+6)}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+4)}=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+4)}&=\frac{1}{4}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+6)}\\
&=\frac{1}{4}\log 2.
\end{aligned}$$

$$-3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+7)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+3)(4k+4)}=-\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+3)(4k+4)}&=\frac{1}{3}-3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+4)(4k+7)}\\
&=\frac{3}{4}\log 2-\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

残りも計算しておきましょう：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+2)} &= \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^4}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+3)} &= \int_0^1 \frac{x-x^2}{1-x^4}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8} \\ &= -\frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

事実 1.3.16

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+2)} &= \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8} \\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)} &= \frac{\pi}{8} \\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+4)} &= \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{24} \\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+3)} &= -\frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8} \\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+4)} &= \frac{1}{4}\log 2 \\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+3)(4k+4)} &= \frac{3}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

それ以外のものは以下の変換公式によって計算されます：
任意の正の整数 p, m_1, m_2, l_1, l_2 に対して

$$\begin{aligned}&\{(m_2+l_2p)-(m_1+l_1p)\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1+l_1p)(pk+m_2+l_2p)} \\ &\qquad - (m_2-m_1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)} \\ &= \left\{\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_2+p}+\cdots+\frac{1}{m_2+p(l_2-1)}\right\} \\ &\qquad - \left\{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1+p}+\cdots+\frac{1}{m_1+p(l_1-1)}\right\}.\end{aligned}$$

ただし、$l_1=0$ あるいは $l_2=0$ の場合も、右辺の相当項を 0 として成立します。

この基本となる６つのケースを覚えてしまうと云うのであればともかく、これらに帰着させて計算しても計算がそれほど簡単になるわけでもなく、結局直接計算した方が速いですね。

1.3.5　別の方向から　〜一般論を目論んで〜

$p=4$ の場合、積分の分母は $1-x^4$ あるいは $1+x+x^2+x^3$ となりますが、これは $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$ と簡単に因数分解され、$m_1<m_2$ のとき

$$\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}=\frac{x^{m_1-1}(1-x^{m_2-m_1})}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=\frac{x^{m_1-1}+\cdots+x^{m_2-2}}{(1+x)(1+x^2)}$$

ですので部分分数分解すれば

$$\frac{x^k}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{(-1)^k}{2}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0^k\right)\frac{2x}{1+x^2}+\left(0^k-\frac{(-1)^k}{2}\right)\frac{1}{1+x^2}$$

あるいは個別にして書けば

$$\frac{x^k}{(1+x)(1+x^2)}=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} & k=2\\ -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} & k=1\\ \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} & k=0\end{cases}$$

ですから、$2\le m_1<m_2\le 4$ ならば

$$\begin{aligned}&\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}\\&=\frac{x^{m_1-1}+\cdots+x^{m_2-2}}{(1+x)(1+x^2)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=m_1-1}^{m_2-2}(-1)^k\frac{1}{1+x}+\frac{m_2-m_1}{4}\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\sum_{k=m_1-1}^{m_2-2}(-1)^k\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}dx\\&=\frac{1}{2(m_2-m_1)}\sum_{k=m_1-1}^{m_2-2}(-1)^k\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\&\qquad+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2(m_2-m_1)}\sum_{k=m_1-1}^{m_2-2}(-1)^k\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\frac{1}{2(m_2-m_1)}\left(\log 2-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=m_1-1}^{m_2-2}(-1)^k+\frac{1}{4}\log 2\end{aligned}$$

です。このシグマの部分は m_1,m_2 によって $0,\pm 1$ いずれかの値をとります。$m_1=1$ の時はちょっと表記が複雑になってしまいますね。

m_1,m_2 が 4 を超えるような場合にも、$m_2-m_1=1$ の場合は

$$\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}=\frac{x^{m_1-1}}{(1+x)(1+x^2)}=x^{m_1-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)$$

であり、$m_2-m_1=2$ の場合は

$$\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}=\frac{x^{m_1-1}}{1+x^2}$$

$m_2-m_1=3$ の場合は

$$\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}=\frac{x^{m_1-1}(1+x+x^2)}{1+x+x^2+x^3}=x^{m_1-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)$$

ですから、

$$J_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx,\quad K_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$$

の形の積分計算になります。

ちなみに $m_2-m_1=4$ の場合は

$$\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}=x^{m_1-1}$$

ですからそう云った面倒は出て来ず、結果は有理数となって出てきます。

一般には $m_2-m_1=4k+l$ の場合（$l=0,1,2,3$）、

$$\begin{aligned}\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^4}&=\frac{x^{m_1-1}(1-x^{4k+l})}{1-x^4}\\&=x^{m_1-1}\left\{x^{4(k-1)+l}+x^{4(k-2)+l}+\cdots+x^l+\frac{1-x^l}{1-x^4}\right\}\end{aligned}$$

であって、結局上の 4 つの場合に帰着されます。

まず J_n ですがこれは計算出来て

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{(x+1-1)^n}{x+1}dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+1)^k(-1)^{n-k}dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+1)^{k-1}(-1)^{n-k}dx \\
&= \int_0^1 \frac{(-1)^n}{x+1}dx + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\int_0^1 (x+1)^{k-1}dx \\
&= (-1)^n\log 2 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{1}{k}(2^k-1)
\end{aligned}$$

です：

n	J_n	n	J_n
0	$\log 2$		
1	$1-\log 2$	6	$-\frac{37}{60}+\log 2$
2	$-\frac{1}{2}+\log 2$	7	$\frac{319}{420}-\log 2$
3	$\frac{5}{6}-\log 2$	8	$-\frac{533}{840}+\log 2$
4	$-\frac{7}{12}+\log 2$	9	$\frac{1879}{2520}-\log 2$
5	$\frac{47}{60}-\log 2$	10	$-\frac{1627}{2520}+\log 2$

また K_n は数値計算してみると

n	K_n	n	K_n
0	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{1}{2}\log 2$
2	$1-\frac{\pi}{4}$	3	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2$
4	$-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$	5	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2$
6	$\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$	7	$\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\log 2$
8	$-\frac{76}{105}+\frac{\pi}{4}$	9	$-\frac{7}{24}+\frac{1}{2}\log 2$

となっており、n が奇数のときと偶数のときで様子が異なります。

$n=2k+1$ の場合は変数変換によって

$$K_{2k+1} = \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^k}{1+y}dy = \frac{1}{2}J_k$$

に帰着され、$n=2k$ のときは

$$\begin{aligned}
K_{2k} &= \int_0^1 \frac{x^{2k}}{1+x^2}dx \\
&= \int_0^1 \left\{x^{2k-2} - x^{2k-4} + \cdots + (-1)^j x^{2k-2-2j} + \cdots + (-1)^{k-1} + \frac{(-1)^k}{1+x^2}\right\}dx \\
&= \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \cdots + (-1)^{k-2}\frac{1}{3} + (-1)^{k-1} + (-1)^k\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

です。

1.3.6　和の範囲の変更

よく観察すると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+3)} &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{6\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(4k+2)(4k+3)} + \cdots \\
&= \frac{1}{(2-4)(1-4)} + \frac{1}{(2-8)(1-8)} + \cdots + \frac{1}{(2-4k)\}\{(1-4k)\}} + \cdots \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(4k+1)(4k+2)}
\end{aligned}$$

となっていますから、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+2)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+2)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+3)} \\
&= \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

となっている事が分かります。全く同様に（対称に）

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)(4k+3)} = \frac{\pi}{4}$$

でもあります。他はどうでしょうか。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)} &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \frac{\pi}{8} \\
\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)} &= \frac{1}{(-3)(-1)} + \frac{1}{(-7)(-5)} + \cdots \\
&= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

によれば

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{\pi}{4}$$

は同様です（自分自身との対称性ですが）。

しかし他のものは和の範囲を拡大すると $k=-1$ の項が発散してしまいます。

では $k=-1$ の項だけ除外した和はどうなっているでしょうか？　まず

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{1}{(4k+1)(4k+4)} &= \frac{1}{(-7)(-4)} + \frac{1}{(-11)(-8)} + \frac{1}{(-15)(-12)} + \cdots \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7\cdot 8} + \frac{1}{11\cdot 12} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k+4)} \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}\right) \\
&= \frac{1}{9} - \frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{24}
\end{aligned}$$

によれば

$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(4k+1)(4k+4)} = \frac{1}{9} + \frac{\pi}{12}$$

であり、これと全く対称に

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{1}{(4k+3)(4k+4)} &= \frac{1}{(-5)(-4)} + \frac{1}{(-9)(-8)} + \frac{1}{(-13)(-12)} + \cdots \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \cdots \\
&= \frac{1}{4} - 3\left(\frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{9\cdot 12} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{4} - 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+4)} \\
&= \frac{1}{4} - 3\left(\frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4}\right) \\
&= 1 - \frac{3}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

から

$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(4k+3)(4k+4)} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

が分かります。また、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{1}{(4k+2)(4k+4)} &= \frac{1}{(-6)(-4)} + \frac{1}{(-10)(-8)} + \frac{1}{(-14)(-12)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{6\cdot 8} + \frac{1}{10\cdot 12} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)(4k+4)} \\
&= \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{8}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log 2
\end{aligned}$$

から

$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(4k+2)(4k+4)} = \frac{1}{4}$$

が得られます。これは両辺に 4 を掛ければ

$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 1$$

とも書く事が出来ますが、

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1$$

と同じ事です。

和の範囲をマイナスにまで広げると $\log$ の項が全く消えてしまうのは興味深い点です。

$\sum_{k=0}^{\infty}$ と $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$、どちらが自然なのか？　何とも言えないですね。

今は分母が 2 項だからマイナスとマイナスで打ち消し合ってプラスになっていますが、奇数項だとそうは行きませんからね。いや、むしろ上手くそのマイナスが打ち消す様に働いてくれるかもしれないし・・・

事実 1.3.17

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)} = \frac{\pi}{4}$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)(4k+3)} = \frac{\pi}{4}$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(4k+1)(4k+4)} = \frac{1}{9} + \frac{\pi}{12}$$
$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(4k+2)(4k+4)} = \frac{1}{4}$$
$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(4k+3)(4k+4)} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

これはちょっと面白い結果ですね。π しか出てきません（あとは有理数です）。他の p の場合に見てみると（$p=5$ は面倒になるので・・・）、

事実 1.3.18 [数値計算結果]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+1)(6k+2)} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+1)(6k+3)} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+1)(6k+4)} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+1)(6k+5)} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+2)(6k+3)} = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+2)(6k+4)} = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+2)(6k+5)} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+3)(6k+4)} = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+3)(6k+5)} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(6k+4)(6k+5)} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(6k+1)(6k+6)} = \frac{1}{25} + \frac{\sqrt{3}}{30}\pi$$
$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(6k+2)(6k+6)} = \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{72}\pi$$
$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(6k+3)(6k+6)} = \frac{1}{9}$$
$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(6k+4)(6k+6)} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$
$$\sum_{k\neq -1} \frac{1}{(6k+5)(6k+6)} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

わぉ！　これは何かありそうですね。

1.3.7　交代和の場合

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+2kp)(m_2+2kp)}$$

ですから

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)}\\&=\frac{2}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^{2p}}dx-\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^{p}}dx\\&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1(x^{m_1-1}-x^{m_2-1})\left(\frac{2}{1-x^{2p}}-\frac{1}{1-x^p}\right)dx\\&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^{p}}dx\end{aligned}$$

が分かります。

事実 1.3.19 任意の正の整数 p と $m_1<m_2$ であるような正の整数 m_1,m_2 に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)}=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^{p}}dx.$$

> ただし、正確には m_2-m_1 が整数であれば m_1,m_2 自体が整数である必要はありません。

1.3.8　公差が異なる場合

まず、級数の和の積分表示式の形式を変数変換によって変更しておきます。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^{p}}dx\\&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{y^{\frac{m_1-1}{p}}-y^{\frac{m_2-1}{p}}}{1-y}\frac{1}{p}y^{\frac{1}{p}-1}dy\\\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^2}{(m_1+kp)(m_2+kp)}&=\frac{1}{\frac{m_2}{p}-\frac{m_1}{p}}\int_0^1\frac{y^{\frac{m_1}{p}-1}-y^{\frac{m_2}{p}-1}}{1-y}dy\end{aligned}$$

事実 1.3.20 $m_1\neq m_2$ であるとき

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{m_1}{p}\right)\left(k+\frac{m_2}{p}\right)}=\frac{1}{\frac{m_2}{p}-\frac{m_1}{p}}\int_0^1\frac{x^{\frac{m_1}{p}-1}-x^{\frac{m_2}{p}-1}}{1-x}dx.$$

その上で、級数の分母の公差が異なる場合を考えますが、適当な定数を掛けてやれば公差が等しい場合に帰着できます。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp_1)(m_2+kp_2)}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_1p_2}{(m_1p_2+kp_1p_2)(m_2p_1+kp_1p_2)}\\&=\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m_1p_2}{p_1p_2}+k\right)\left(\frac{m_2p_1}{p_1p_2}+k\right)}\\&=\frac{1}{\left(\frac{m_2p_1}{p_1p_2}-\frac{m_1p_2}{p_1p_2}\right)p_1p_2}\int_0^1\frac{y^{\frac{m_1p_2}{p_1p_2}-1}-y^{\frac{m_2p_1}{p_1p_2}-1}}{1-y}dy\\&=\frac{1}{\left(\frac{m_2}{p_2}-\frac{m_1}{p_1}\right)p_1p_2}\int_0^1\frac{y^{\frac{m_1}{p_1}-1}-y^{\frac{m_2}{p_2}-1}}{1-y}dy\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m_1}{p_1}+k\right)\left(\frac{m_2}{p_2}+k\right)}=\frac{1}{\frac{m_2}{p_2}-\frac{m_1}{p_1}}\int_0^1\frac{y^{\frac{m_1}{p_1}-1}-y^{\frac{m_2}{p_2}-1}}{1-y}dy$$

交対和の場合にも全く同様にして

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m_1+kp_1)(m_2+kp_2)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p_1p_2}{(m_1p_2+kp_1p_2)(m_2p_1+kp_1p_2)} \\
&= \frac{p_1p_2}{m_2p_1-m_1p_2}\int_0^1 \frac{x^{m_1p_2-1}-x^{m_2p_1-1}}{1+x^{p_1p_2}}dy \\
&= \frac{p_1p_2}{m_2p_1-m_1p_2}\int_0^1 \frac{y^{\frac{m_1p_2-1}{p_1p_2}}-y^{\frac{m_2p_1-1}{p_1p_2}}}{1+y}\frac{1}{p_1p_2}y^{\frac{1}{p_1p_2}-1}dy \\
&= \frac{1}{m_2p_1-m_1p_2}\int_0^1 \frac{y^{\frac{m_1}{p_1}-1}-y^{\frac{m_2}{p_2}-1}}{1+y}dy
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(\frac{m_1}{p_1}+k\right)\left(\frac{m_2}{p_2}+k\right)} = \frac{1}{\frac{m_2}{p_2}-\frac{m_1}{p_1}}\int_0^1 \frac{y^{\frac{m_1}{p_1}-1}-y^{\frac{m_2}{p_2}-1}}{1+y}dy$$

となります。

以上から次が得られました：

事実 1.3.21 任意の異なる正の有理数 q_1, q_2 に対し、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+q_1)(k+q_2)} = \frac{1}{q_2-q_1}\int_0^1 \frac{x^{q_1-1}-x^{q_2-1}}{1-x}dx,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+q_1)(k+q_2)} = \frac{1}{q_2-q_1}\int_0^1 \frac{x^{q_1-1}-x^{q_2-1}}{1+x}dx,$$

が成り立ちます。

これは

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+q_1}-\frac{1}{k+q_2}\right) = \int_0^1 \frac{x^{q_1-1}-x^{q_2-1}}{1-x}dx,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k}{k+q_1}-\frac{(-1)^k}{k+q_2}\right\} = \int_0^1 \frac{x^{q_1-1}-x^{q_2-1}}{1+x}dx$$

とも書けます。

1.4　３数の積の逆数の和

まずやはり部分分数分解を見ておきましょう：

補題 1.4.1 $m_1 < m_2 < m_3$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)(m_3+kp)} \\
&= \frac{1}{(m_3-m_2)(m_3-m_1)(m_2-m_1)}\left(\frac{m_3-m_2}{m_1+kp}-\frac{m_3-m_1}{m_2+kp}+\frac{m_2-m_1}{m_3+kp}\right).
\end{aligned}$$

1.4.1　等間隔な場合

一般にこれをやっても複雑すぎるので、まずは特に現実的に想定している場合のみを考えます。つまり、$m_3-m_2=m_2-m_1=d$ であるような場合です。

補題 1.4.2

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+2d+kp)} \\
&= \frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{m+kp}-\frac{2}{m+d+kp}+\frac{1}{m+2d+kp}\right).
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+2d+kp)} \\
&= \frac{1}{2d^2}\left(J_{m,p}^n - 2J_{m+d,p}^n + J_{m+2d,p}^n\right) \\
&= \frac{1}{2d^2}\int_0^1 \left(x^{m-1} - 2x^{m+d-1} + x^{m+2d-1}\right)\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx \\
&= \frac{1}{2d^2}\int_0^1 x^{m-1}\left(1-2x^d+x^{2d}\right)\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx \\
&= \frac{1}{2d^2}\int_0^1 x^{m-1}(1-x^d)^2\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx
\end{aligned}$$

であり、d が正の整数であれば

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+2d+kp)} - \frac{1}{2d^2}\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^d)^2}{1-x^p}dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2d^2}\int_0^1 \left|\frac{x^{m-1}(1-x^d)^2x^{np}}{1-x^p}\right|dx \\
&= \frac{1}{2d^2}\int_0^1 x^{m+np-1}\frac{(1+x+\cdots+x^{d-1})(1-x^d)}{1+x+\cdots+x^{p-1}}dx \\
&\leq \frac{1}{2d^2}\int_0^1 dx^{m+np-1}dx \\
&= \frac{1}{2d}\frac{1}{m+np} \\
&\to 0 \quad (\text{ as } n \to \infty\ )
\end{aligned}$$

となることから次の事実が分かります：

定理 1.4.3 正の整数 m, d, p に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+2d+kp)} = \frac{1}{2d^2}\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^d)^2}{1-x^p}dx.$$

m 自体は正であれば非整数でも構いません。

ついでに２数の積の逆数の場合もこの書式で書いておきましょう：

定理 1.4.4 正の整数 m, d, p に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)} = \frac{1}{d}\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^d)}{1-x^p}dx.$$

1.4.2　簡単な場合の具体的計算

特に $d = p$ の場合には

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2p^2}\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^p)^2}{1-x^p}dx &= \frac{1}{2p^2}\int_0^1 x^{m-1}(1-x^p)dx \\
&= \frac{1}{2p^2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+p}\right) \\
&= \frac{1}{2pm(m+p)}
\end{aligned}$$

ですが、これは

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)(m+p+kp)(m+2p+kp)} \\
&= \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(m+kp)(m+p+kp)} - \frac{1}{(m+p+kp)(m+2p+kp)}\right\} \\
&= \frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{m(m+p)} - \frac{1}{(m+p)(m+2p)} + \frac{1}{(m+p)(m+2p)} - \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{2pm(m+p)}
\end{aligned}$$

から自明です。

あるいは、$m_2 = m_1 + d\,(d \neq p)$ であっても $m_3 = m_1 + d + p = m_2 + p$ であれば、一

部だけですが簡単になっています：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+d+p+kp)}\\
&=\frac{1}{d+p}\left\{\underbrace{\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)}}_{\text{ここは簡単にはならない}}-\underbrace{\frac{1}{(m+d+kp)(m+d+p+kp)}}_{\text{ここは簡単になる}}\right\}\\
&=\frac{1}{d+p}\left\{\frac{1}{d}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^d)}{1-x^p}dx-\frac{1}{(m+d)p}\right\}.
\end{aligned}$$

1.4.3　一般の場合

部分的な部分分数分解：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)(m_3+kp)}\\
&=\frac{1}{m_3-m_1}\left\{\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}-\frac{1}{(m_2+kp)(m_3+kp)}\right\}
\end{aligned}$$

によれば、

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)(m_3+kp)}\\
&=\frac{1}{m_3-m_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_2+kp)(m_3+kp)}\right\}\\
&=\frac{1}{m_3-m_1}\left\{\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx-\frac{1}{m_3-m_2}\int_0^1\frac{x^{m_2-1}-x^{m_3-1}}{1-x^p}dx\right\}\\
&=\frac{1}{(m_3-m_1)(m_2-m_1)(m_3-m_2)}\\
&\qquad\int_0^1\frac{(m_3-m_2)(x^{m_1-1}-x^{m_2-1})-(m_2-m_1)(x^{m_2-1}-x^{m_3-1})}{1-x^p}dx\\
&=\frac{1}{(m_3-m_1)(m_2-m_1)(m_3-m_2)}\\
&\qquad\int_0^1\frac{(m_3-m_2)x^{m_1-1}-(m_3-m_1)x^{m_2-1}+(m_2-m_1)x^{m_3-1}}{1-x^p}dx
\end{aligned}$$

が得られます。分子が $x-1$ で割り切れる事は分かりますが、それ以上はちょっと・・・

1.5　４数の積の逆数の和

これもやはりまず部分分数分解から、

補題 1.5.1

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+2d+kp)(m+3d+kp)}\\
&\qquad=\frac{1}{6d^3}\left(\frac{1}{m+kp}-\frac{3}{m+d+kp}+\frac{3}{m+2d+kp}-\frac{1}{m+3d+kp}\right)
\end{aligned}$$

なので、これを積分に変換して

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+2d+kp)(m+3d+kp)}\\
&=\frac{1}{6d^3}\left(J^n_{m,p}-3J^n_{m+d,p}+3J^n_{m+2d,p}-J^n_{m+3d,p}\right)\\
&=\frac{1}{6d^3}\int_0^1(x^{m-1}-3x^{m+d-1}+3x^{m+2d-1}-x^{m+3d-1})\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx\\
&=\frac{1}{6d^3}\int_0^1x^{m-1}(1-x^d)^3\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx
\end{aligned}$$

であって、極限を取れば（評価は同様にできる)、

定理 1.5.2 正の整数 m,d,p に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)(m+2d+kp)(m+3d+kp)}=\frac{1}{6d^3}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^d)^3}{1-x^p}dx$$

が示されます。

d, p は正の整数である必要がありますが、m は正の実数で証明出来ています。

1.6　一般の積の逆数の和

以上の計算により、次の命題が予想されます：

予想 1.6.1　正の整数 m, p, d, h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)} = \frac{1}{h!d^h}\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x^d)^h}{1-x^p}dx.$$

まずやはり部分分数分解から。

補題 1.6.2

$$\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)} = \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h}\frac{(-1)^j\binom{h}{j}}{m+jd+kp}$$

$$\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)} = \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h}\frac{A_j}{m+jd+kp}$$

と置けば、右辺を通分して左右辺で分子を比較する事により

$$1 = \sum_{j=0}^{h} A_j \prod_{0\le i\le h, i\ne j}(m+id+kp)$$

ですから、これが任意の実数 k に関して成立する等式と見て係数 A_j を決定して行きます。

一般に $k = -\frac{m+jd}{p}$ のとき、

$$\begin{aligned}
1 &= A_j \prod_{0\le i\le h, i\ne j}(m+id+-m-jd)\\
&= A_j(-j)\{-(j-1)\}\cdots(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(h-j)d^h\\
&= A_j(-1)^j j!(h-j)!\\
A_j &= \frac{(-1)^j}{j!(h-j)!d^h}\\
&= \frac{(-1)^j\binom{h}{j}}{h!d^h}
\end{aligned}$$

となるので補題は証明されました。

そこでこの分解式の両辺の有限和を取って右辺を積分表現すれば

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)} &= \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h}(-1)^j\binom{h}{j}J^n_{m+jd,p}\\
&= \frac{1}{h!d^h}\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{h}(-1)^j\binom{h}{j}x^{m+jd-1}\right)\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx\\
&= \frac{1}{h!d^h}\int_0^1 x^{m-1}\left(\sum_{j=0}^{h}(-1)^j\binom{h}{j}x^{jd}\right)\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx\\
&= \frac{1}{h!d^h}\int_0^1 x^{m-1}(1-x^d)^h\frac{1-x^{np}}{1-x^p}dx
\end{aligned}$$

が得られます。しかし

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)} - \frac{1}{h!d^h}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^d)^h}{1-x^p}dx\right|\\
&\le \frac{1}{h!d^h}\int_0^1\left|\frac{x^{m-1}(1-x^d)^h x^{np}}{1-x^p}\right|dx\\
&\le \frac{1}{h!d^h}\int_0^1\left|\frac{x^{m-1+np}(1-x^d)^{h-1}(1+x+\cdots+x^{d-1})}{1+x+\cdots+x^{p-1}}\right|dx\\
&\le \frac{1}{h!d^h}\int_0^1 dx^{m-1+np}dx\\
&= \frac{1}{h!d^{h-1}}\frac{1}{m+np}\\
&\to 0 \quad (\text{ as } n\to\infty\ )
\end{aligned}$$

によれば結局先の予想は証明されます。

定理 1.6.3 正の整数 m,d,p,h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}=\frac{1}{h!d^h}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^d)^h}{1-x^p}dx.$$

> d,p,h は正の整数である必要がありますが、m は正の実数で証明出来ています。

1.7　べきの逆数の和

Taylor 展開式：

$$x^y=1+(\log x)y+\frac{1}{2!}(\log x)^2y^2+\cdots+\frac{1}{n!}(\log x)^ny^n+\cdots$$

によれば、

$$\begin{aligned}\frac{1-x^d}{d}&=-(\log x)-\frac{(\log x)^2}{2}d-\cdots-\frac{(\log x)^n}{n!}d^{n-1}-\cdots\\ \left(\frac{1-x^d}{d}\right)^h&=\left\{-(\log x)-\frac{(\log x)^2}{2}d-\cdots-\frac{(\log x)^n}{n!}d^{n-1}-\cdots\right\}^h\\ &\to(-\log x)^h\quad(\text{ as }d\to 0\text{ })\end{aligned}$$

ですから、直前の結果において両辺で $d\to 0$ の極限を取れば（細かい事は無視します）

予想 1.7.1 正の整数 m,p,h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}=\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{m-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx.$$

となっているように思われます。特に $m=p=1,\ h=n-1$ の場合には

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1\frac{(-\log x)^{n-1}}{1-x}dx\\ &=\frac{1}{(n-1)!}\int_{\infty}^0\frac{y^{n-1}}{1-\mathrm{e}^{-y}}(-\mathrm{e}^{-y})dy\\ &=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}\frac{y^{n-1}}{\mathrm{e}^y-1}dy\end{aligned}$$

であり、これは Riemann の zeta 関数の Γ 関数による定義式に一致しています。

　この計算を出来る限り正当化してみます。

　まず $d\to 0$ の極限を考えると云う事は必然的に d は非整数で考えるわけですし、m も（1以上の）非整数も含んだ形で扱って行く事になります。

しかし今の証明では（最後の積分の評価の所だけですが）d が正の整数である事を使っており、このままでは正当化されません。そこで証明を少し変形してみましょう。

部分分数分解および有限和を積分で表示する所までは問題ありませんのでその次からですが、

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)}-\frac{1}{h!d^h}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^d)^h}{1-x^p}dx\right|\\
&\leq \frac{1}{h!d^h}\int_0^1\left|\frac{x^{m-1}(1-x^d)^h x^{np}}{1-x^p}\right|dx\\
&=\frac{1}{h!d^h}\int_0^1\left|\frac{(1-x^d)(1-x^d)^{h-1}x^{np+m-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{p-1})}\right|dx\\
&\leq \frac{1}{h!d^h}\int_0^1\left|\frac{1-x^d}{1-x}\right|x^{np+m-1}dx
\end{aligned}$$

と評価して、ここで平均値の定理から各 $0<x<1$ に対して、

$$\frac{1-x^d}{1-x}=dc^{d-1}$$

となるような c が $x<c<1$ の範囲内に存在する事が分かりますから、$d<1$ であるときは $c^{d-1}<x^{d-1}$ に注意して

$$\frac{1}{h!d^h}\int_0^1\left|\frac{1-x^d}{1-x}\right|x^{np+m-1}dx\leq\frac{1}{h!d^{h-1}}\int_0^1 x^{np+m-1+d-1}dx$$

が分かります。n は十分大きな値を考えていますから結局この最後の積分は $n\to\infty$ で 0 に収束します。

$1\leq d$ の場合も $c^{d-1}<1$ と評価すれば同様の結論が得られます。

従って先の定理は m,d が任意の正の実数の場合にも成立している事が分かりました。

定理 1.7.2 正の実数 m,d と正の整数 p,h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}=\frac{1}{h!d^h}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^d)^h}{1-x^p}dx.$$

次に左辺の無限和と極限の交換：

$$\begin{aligned}
&\lim_{d\to0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}\\
&\overset{?}{=}\lim_{n\to\infty}\lim_{d\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}
\end{aligned}$$

を見ます。

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}\right|\\
&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(m+kp)^h-(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}{(m+kp)^{h+1}(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}\right|\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(m+kp+d)\cdots(m+kp+hd)-(m+kp)^h}{(m+kp)^{h+1}(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1+\cdots+h)(m+kp)^{h-1}d+(1\cdot2+1\cdot3+\cdots)(m+kp)^{h-2}d^2+\cdots+h!d^h}{(m+kp)^{h+1}(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}
\end{aligned}$$

ここで $m\geq1$ であれば任意の k に対して $(m+kp)^{h-1}\geq(m+kp)^{h-2}\geq\cdots\geq1$ であり、また、十分小さな $d>0$ に対しては $d^h<\cdots<d^2<d$ なので

$$\begin{aligned}
&\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\{(1+\cdots+h)+(1\cdot2+1\cdot3+\cdots)+\cdots+h!\}(m+kp)^{h-1}d}{(m+kp)^{2h+1}}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\{(1+1)(1+2)\cdots(1+h)-1\}(m+kp)^{h-1}d}{(m+kp)^{2h+1}}\\
&=\{(h+1)!-1\}\,d\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(m+kp)^{h+2}}\\
&\leq(h+1)!d\left\{\frac{1}{m^{h+2}}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(kp)^{h+2}}\right\}\\
&\leq\frac{(h+1)!}{p^{h+2}}\left(\frac{p^{h+2}}{m^{h+2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{h+2}}\right)d
\end{aligned}$$

ですので、$d \to 0$ での収束は n に関して一様である事がわかります。従って極限の順序交換が可能で

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}$$

が成り立ちます（ただし $m \geq 1$ を仮定しました)。

最後に右辺の収束ですが、まず平均値の定理から

$$\frac{x^d-1}{d-0}=(\log x)x^c$$

となる c が 0 と d の間に存在します。このとき

$$\left(\frac{1-x^d}{d}\right)^h=(-\log x)^h x^{ch}$$

ですから、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h!}\int_0^1\left(\frac{1-x^d}{d}\right)^h\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx-\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\right|\\
&=\left|\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h(x^{ch}-1)\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\right|\\
&\leq\frac{1}{h!}\int_0^1\left|(-\log x)^h(x^{ch}-1)\frac{x^{m-1}}{1-x^p}\right|dx\\
&=\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{1-x^{ch}}{1-x}\frac{x^{m-1}}{1+x+\cdots+x^{p-1}}dx\\
&\leq\frac{1}{h!}\int_0^1 x^{m-1}(-\log x)^h\frac{1-x^{ch}}{1-x}dx
\end{aligned}$$

となるわけですが、d は 0 への極限を考えるわけですから c は十分小さい値を考えています。従って $ch<1$ である事は仮定してよいので、関数 $g(x)=x^{ch}$ に対する平均値の定理から

$$\frac{1-x^{ch}}{1-x}=chw^{ch-1}$$

となるような w が x と 1 の間に存在しますから $w^{ch-1}<x^{ch-1}$ である事に注意すれば

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h!}\int_0^1\left(\frac{1-x^d}{d}\right)^h\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx-\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\right|\\
&\leq\frac{1}{h!}\int_0^1 x^{m-1}(-\log x)^h chx^{ch-1}dx\\
&=\frac{ch}{h!}\int_0^1 x^{m+ch-2}(-\log x)^h dx\\
&=\frac{ch}{h!}\frac{h!}{(m+ch-1)^{h+1}}\\
&=\frac{ch}{(m+ch-1)^{h+1}}
\end{aligned}$$

です。従って $m>1$ であればこの最終項は 0 に収束します。

従って

$$\lim_{d\to 0}\frac{1}{h!}\int_0^1\left(\frac{1-x^d}{d}\right)^h\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx=\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx$$

ですが、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}=\frac{1}{h!d^h}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^d)^h}{1-x^p}dx$$

でしたから、さっきの左辺の極限の交換と合わせて結局

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}=\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx$$

が得られました（ただし $m>1$ です)。

では $m=1$ の場合はどうでしょうか。この場合は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+kp)^{h+1}}=1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(1+p)+kp\}^{h+1}}$$

なので、右辺のシグマの和は $1+p>1$ を満たしているので直前の議論から

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(1+p)+kp\}^{h+1}}=\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{x^{(1+p)-1}}{1-x^p}dx$$

である事が分かっていますから、

$$\int_0^1 (-\log x)^h dx = h!$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+kp)^{h+1}} &= 1+\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{x^p}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h dx+\frac{1}{h!}\int_0^1(-\log x)^h\frac{x^p}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{h!}\int_0^1\frac{(-\log x)^h}{1-x^p}dx\end{aligned}$$

となり、結局先の結果は $m=1$ の場合にも成り立っていた事が分かります。

この様に m は $m\geq 1$ でありさえすれば非整数でも問題ありません。

定理 1.7.3　1 以上の任意の実数 m と任意の正の整数 p,h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}=\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{m-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx.$$

1.7.1　m についての注意

正の整数 m,p,h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}=\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{m-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx.$$

ですが、m は任意の正の実数で良い事が分かります。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}} &= \frac{1}{m^{h+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}} \\ &= \frac{1}{m^{h+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(m+p)+kp\}^{h+1}}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(m+p)+kp\}^{h+1}}=\frac{1}{m^{h+1}}$$

となっていいるわけですが、積分形の方も

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{m-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx-\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{(m+p)-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x^p)(-\log x)^h}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{h!}\int_0^1 x^{m-1}(-\log x)^h dx\end{aligned}$$

となって有名な次の積分公式：

$$\int_0^1(-\log x)^n dx = n!$$

$$\int_0^1 x^m(-\log x)^n dx=\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}\quad (m>-1)$$

から

$$\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{m-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx-\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{(m+p)-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx=\frac{1}{m^{h+1}}$$

となっています。従って m が 1 より小さいときは $k=1$ の項を初項として級数を考える事にして元々の初項（$k=0$ に対応する項）は別に足してしまえば良いわけです。

また、$m>0$ であるならば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m^{h+1}\left(1+k\frac{p}{m}\right)^{h+1}}\\&=\frac{1}{m^{h+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1+k\frac{p}{m}\right)^{h+1}}\\&=\frac{1}{m^{h+1}}\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{(-\log x)^h}{1-x^{\frac{p}{m}}}dx\end{aligned}$$

となるわけですが、積分において $x^{\frac{1}{m}}=z$ と云う変数変換をすれば $dx=mz^{m-1}dz$ であって

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{m^{h+1}h!}\int_0^1\frac{(-\log z^m)^h}{1-z^p}mz^{m-1}dz\\&=\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{z^{m-1}(-\log z)^h}{1-z^p}dz\end{aligned}$$

が得られ、やはり同じ結果が $m\geq 1$ でなくても $m>0$ でありさえすれば成立している事が分かります。

定理 1.7.4 任意の正の実数 m と任意の正の整数 p,h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^{h+1}}=\frac{1}{h!}\int_0^1\frac{x^{m-1}(-\log x)^h}{1-x^p}dx.$$

1.7.2　素朴な計算による理解

同様の事は等比級数の和の公式を両辺積分しても得る事ができます。まず $|x|<1$ の範囲で

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

ですが、両辺積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^t\frac{1}{1-x}dx&=t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots\\-\log(1-t)&=t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots\\\frac{-\log(1-t)}{t}&=1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}t^2+\cdots\\\int_0^x\frac{-\log(1-t)}{t}dt&=x+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{3^2}x^3+\cdots\end{aligned}$$

となりますから特に $x=1$ のとき（細かい事は省略します）

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\int_0^1\frac{-\log(1-t)}{t}dt=\int_0^1\frac{-\log w}{1-w}dw$$

となっている事が分かりますが、既に得た結果と一致しています。また、更に同様の計算を進めると

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{-\log(1-t)}{t}dt&=1+\frac{1}{2^2}x+\frac{1}{3^2}x^2+\cdots\\\int_0^w\frac{1}{x}\int_0^x\frac{-\log(1-t)}{t}dtdx&=w+\frac{1}{2^3}w^2+\frac{1}{3^3}w^3+\cdots\end{aligned}$$

ですが、この累次積分を部分積分によって計算すれば、

$$\begin{aligned}\int_0^w\frac{1}{x}\left\{\int_0^x\frac{-\log(1-t)}{t}dt\right\}dx&=\left[\log x\int_0^x\frac{-\log(1-t)}{t}dt\right]_0^w-\int_0^w\log x\frac{-\log(1-x)}{x}dx\\&=\int_0^w(\log w-\log x)\frac{-\log(1-x)}{x}dx\end{aligned}$$

なので特に $w=1$ の場合、

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\int_0^1\frac{\log x\log(1-x)}{x}dx$$

ですが、$\left\{\frac{1}{2}(\log x)^2\right\}'=\frac{\log x}{x}$ に注意して部分積分すれば

$$\begin{aligned}&=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\log(1-x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}(\log x)^2\left(-\frac{1}{1-x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(-\log x)^2}{1-x}dx\end{aligned}$$

となってやはり同じ結果が得られます。

更に

$$
\begin{aligned}
w+\frac{1}{2^3}w^2+\frac{1}{3^3}w^3+\cdots &= \int_0^w (\log w-\log x)\,\frac{-\log(1-x)}{x}dx\\
1+\frac{1}{2^3}w+\frac{1}{3^3}w^2+\cdots &= \frac{1}{w}\int_0^w (\log w-\log x)\,\frac{-\log(1-x)}{x}dx\\
t+\frac{1}{2^4}t^2+\frac{1}{3^4}t^3+\cdots &= \int_0^t \frac{1}{w}\int_0^w (\log w-\log x)\,\frac{-\log(1-x)}{x}dxdw
\end{aligned}
$$

ですから

$$
\begin{aligned}
&t+\frac{1}{2^4}t^2+\frac{1}{3^4}t^3+\cdots\\
&=\int_0^t \frac{1}{w}\left(\log w\int_0^w \frac{-\log(1-x)}{x}dx-\int_0^w \frac{\log x}{x}\left\{-\log(1-x)\right\}dx\right)dw\\
&=\int_0^t \frac{\log w}{w}\left\{\left[\log x\{-\log(1-x)\}\right]_0^w-\int_0^w \frac{\log x}{1-x}dx\right\}dw\\
&\qquad -\int_0^t \frac{1}{w}\left\{\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\{-\log(1-x)\}\right]_0^w-\int_0^w \frac{1}{2}(\log x)^2\frac{1}{1-x}dx\right\}dw\\
&=\int_0^t \frac{(\log w)^2\{-\log(1-w)\}}{w}dw-\int_0^t \frac{\log w}{w}\left\{\int_0^w \frac{\log x}{1-x}dx\right\}dw\\
&\qquad -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\log w)^2\{-\log(1-w)\}}{w}dw+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{w}\left\{\int_0^w \frac{(\log x)^2}{1-x}dx\right\}dw\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\log w)^2\{-\log(1-w)\}}{w}dw\\
&\qquad -\int_0^t \frac{\log w}{w}\left\{\int_0^w \frac{\log x}{1-x}dx\right\}dw+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{w}\left\{\int_0^w \frac{(\log x)^2}{1-x}dx\right\}dw\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\log w)^2\{-\log(1-w)\}}{w}dw\\
&\qquad -\left[\frac{1}{2}(\log w)^2\int_0^w \frac{\log x}{1-x}dx\right]_0^t+\int_0^t \frac{1}{2}\frac{(\log w)^3}{1-w}dw\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}\left[\log w\int_0^w \frac{(\log x)^2}{1-x}dx\right]_0^t-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\log w)^3}{1-w}dw
\end{aligned}
$$

が分かります。ここで特に $t=1$ の場合は

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\log w)^2\{-\log(1-w)\}}{w}dw\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\log w)^3\{-\log(1-w)\}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{3}(\log w)^3\frac{1}{1-w}dw\\
&=\frac{1}{3!}\int_0^1 \frac{(-\log w)^3}{1-w}dw
\end{aligned}
$$

が導かれます。

1.8　定数のべきが加わる場合

任意の $0<r<1$ と任意の正の実数 m,p に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+kp}r^{m+kp}=\int_0^r\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx=J_{m,p}^{\infty}$$

が成り立っていました。これを例えば

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}r^k$$

の計算まで拡張して行く事は出来るでしょうか。そこでまず

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)}r^{m+kp}$$

の和を計算してみましょう（m,p は正の整数、d は正の実数とします）。部分分数分解によれば

$$\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{m+kp}-\frac{1}{m+d+kp}\right)$$

でしたから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)}r^{m+kp}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{m+kp}-\frac{1}{m+d+kp}\right)r^{m+kp}\\&=\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+kp}r^{m+kp}-\frac{r^{-d}}{d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m+d+kp}r^{m+d+kp}\\&=\frac{1}{d}J_{m,p}^{\infty}-\frac{r^{-d}}{d}J_{m+d,p}^{\infty}\\&=\frac{1}{d}\int_0^r\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx-\frac{r^{-d}}{d}\int_0^r\frac{x^{m+d-1}}{1-x^p}dx\\&=\frac{1}{d}\int_0^r\frac{x^{m-1}-r^{-d}x^{m+d-1}}{1-x^p}dx\\&=\frac{1}{d}\int_0^r\frac{x^{m-1}\left\{1-\left(\frac{x}{r}\right)^d\right\}}{1-x^p}dx\\&=-\int_0^r\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^d-1}{d}\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\end{aligned}$$

が成り立っています。ここで $d\to 0$ の極限を考えるのですが、平均値の定理によれば $0<q<d$ なる実数 q で

$$-\int_0^r\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^d-1}{d}\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx=-\int_0^r\left(\log\frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^q\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx$$

なるものが存在しますから、

$$\begin{aligned}&\left|-\int_0^r\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^d-1}{d}\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx+\int_0^r\left(\log\frac{x}{r}\right)\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\right|\\&=\left|-\int_0^r\left(\log\frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^q\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx+\int_0^r\left(\log\frac{x}{r}\right)\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\right|\\&=\left|\int_0^r\left(\log\frac{x}{r}\right)\left\{1-\left(\frac{x}{r}\right)^q\right\}\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\right|\\&\le\int_0^r\left|x^{m-1}\log\frac{x}{r}\right|\left|1-\left(\frac{x}{r}\right)^q\right|\frac{1}{1-r^p}dx\\&\le M\int_0^r\left\{1-\left(\frac{x}{r}\right)^q\right\}dx\\&\to 0\quad(\text{as } d\to 0)\end{aligned}$$

となって

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)}r^{m+kp}=-\int_0^r\left(\log\frac{x}{r}\right)\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx$$

である事が分かります。また、

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)^2}r^{m+kp}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)}r^{m+kp}\right|\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{(m+kp)^2(m+d+kp)}r^{m+kp}\\&\le d\sum_{k=0}^{\infty}m^{-3}r^{m+kp}\\&\to 0\quad(\text{as } d\to 0)\end{aligned}$$

でもあるので、結局

定理 1.8.1 任意の正の整数 m, p と任意の $0 < r < 1$ に対して次が成り立つ：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)^2} r^{m+kp} = -\int_0^r \left(\log \frac{x}{r}\right) \frac{x^{m-1}}{1-x^p} dx.$$

が分かります。

1.8.1　別の計算によるアプローチ

ここで次の２重積分を計算すると

$$\begin{aligned}
J = \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}} \frac{x^{m-1}y^{m-1}}{1-x^p y^p} dxdy &= \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}} x^{m-1}y^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{kp} dxdy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}} x^{m-1+kp} y^{m-1+kp} dxdy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\sqrt{r}} x^{m-1+kp} dx \right\}^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{m+kp} x^{m+kp} \right]_0^{\sqrt{r}} \right\}^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)^2} r^{m+kp}
\end{aligned}$$

となって同じ級数の和に一致していますが、内側の積分で $xy = z$ なる変数変換を行えば

$$J = \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}} \frac{(xy)^{m-1}}{1-(xy)^p} dxdy = \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}y} \frac{z^{m-1}}{1-z^p} \frac{1}{y} dzdy$$

であり、更に積分順序を交換すれば

$$\begin{aligned}
&= \int_0^r \frac{z^{m-1}}{1-z^p} \int_{\frac{z}{\sqrt{r}}}^{\sqrt{r}} \frac{1}{y} dydz \\
&= \int_0^r \frac{z^{m-1}}{1-z^p} \left(\log \sqrt{r} - \log \frac{z}{\sqrt{r}}\right) dz \\
&= -\int_0^r \left(\log \frac{z}{r}\right) \frac{z^{m-1}}{1-z^p} dz
\end{aligned}$$

となり、同じ結果に到達します。

1.8.2　『計算可能』な特殊な場合

特に $m = 1, p = 1$ の場合には上の計算から

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} r^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^2} r^{1+k} = J \\
&= -\int_0^r \left(\log \frac{z}{r}\right) \frac{1}{1-z} dz \\
&= -\int_0^r \frac{\log z}{1-z} dz + \log r \int_0^r \frac{1}{1-z} dz \\
&= -\int_0^r \frac{\log z}{1-z} dz - \log r \log(1-r)
\end{aligned}$$

となっているわけですが、実は更に別の計算があります。つまり内側の積分をそのままやってしまうわけですが、これは可能で

$$\begin{aligned}
J = \int_0^{\sqrt{r}} \int_0^{\sqrt{r}} \frac{1}{1-xy} dxdy = \int_0^{\sqrt{r}} \left[-\frac{1}{y} \log(1-xy) \right]_0^{\sqrt{r}} dy \\
&= -\int_0^{\sqrt{r}} \frac{\log\left(1-y\sqrt{r}\right)}{y} dy
\end{aligned}$$

ですので、ここで $\sqrt{r}y = z$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^r \frac{\log(1-z)}{z} dz \\
&= -\int_1^{1-r} \frac{\log x}{1-x} (-1) dx \\
&= -\int_{1-r}^1 \frac{\log x}{1-x} dx
\end{aligned}$$

である事になります（同様の計算は $m = p$ の場合なら実行可能です）。

そして特に $r = \frac{1}{2}$ である場合にはこの２つの結果を足し合わせれば

$$\begin{aligned}
2J &= -\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx - (\log 2)^2 \\
J &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx - \frac{1}{2} (\log 2)^2
\end{aligned}$$

が分かります。

ここで

$$-\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

であった事を思い出せば

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 \cdot 2^j} + (\log 2)^2$$

と云う関係式が成立している事が分かります。

特に有名な $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$ によれば

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 \cdot 2^j} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$$

である事も分かります。

また、

$$\mathrm{L}i_2(r) + \mathrm{L}i_2(1-r) = \frac{\pi^2}{6} - \log r \log(1-r)$$

も同様の計算からすぐに分かります。

1.9　一般の積の逆数の和に定数のべきが加わる場合

２乗の場合は分かりましたが一般にはどうなるでしょうか？

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)} r^{m+kp} = ?$$

まずやはり部分分数分解ですが、以前やった分解式から

$$\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)} = \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h} \frac{(-1)^j\binom{h}{j}}{m+jd+kp}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)} r^{m+kp} &= \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h} \frac{(-1)^j\binom{h}{j}}{m+jd+kp} r^{m+kp} \\ &= \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h} \frac{(-1)^j r^{-jd}\binom{h}{j}}{m+jd+kp} r^{m+jd+kp} \\ &= \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h} \frac{(-r^{-d})^j\binom{h}{j}}{m+jd+kp} r^{m+jd+kp}\end{aligned}$$

が分かりますのでこの分解式の両辺の無限和を取って右辺を積分表現すれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)} r^{m+kp} &= \frac{1}{h!d^h}\sum_{j=0}^{h}(-r^{-d})^j\binom{h}{j} J^{\infty}_{m+jd,p} \\ &= \frac{1}{h!d^h}\int_0^r \left\{\sum_{j=0}^{h}(-r^{-d})^j\binom{h}{j}x^{m+jd-1}\right\}\frac{1}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{h!d^h}\int_0^r x^{m-1}\frac{\sum_{j=0}^{h}\binom{h}{j}\left\{-\left(\frac{x}{r}\right)^d\right\}^j}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{h!d^h}\int_0^r \frac{x^{m-1}\left\{1-\left(\frac{x}{r}\right)^d\right\}^h}{1-x^p}dx \\ &= \frac{1}{h!}\int_0^r \left\{-\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^d - 1}{d}\right\}^h \frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx\end{aligned}$$

が得られます。しかし平均値の定理によれば $0 < q < d$ なる実数 q で

$$-\frac{\left(\frac{x}{r}\right)^d - 1}{d} = \left(-\log\frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^q$$

なるものが存在しますから、

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\prod_{j=0}^{h}(m+jd+kp)}r^{m+kp} - \frac{1}{h!}\int_0^r \frac{x^{m-1}\left(-\log\frac{x}{r}\right)^h}{1-x^p}dx\right| \\ &= \left|\frac{1}{h!}\int_0^r\left(-\log\frac{x}{r}\right)^h\left(\frac{x}{r}\right)^{qh}\frac{x^{m-1}}{1-x^p}dx - \frac{1}{h!}\int_0^r\frac{x^{m-1}\left(-\log\frac{x}{r}\right)^h}{1-x^p}dx\right| \\ &\le \frac{1}{h!}\int_0^r\left|\left(\frac{x}{r}\right)^{qh}-1\right|\left|\frac{x^{m-1}\left(-\log\frac{x}{r}\right)^h}{1-x^p}\right|dx \\ &\le M\int_0^r\left|\left(\frac{x}{r}\right)^{qh}-1\right|dx \\ &\to 0 \quad (\text{ as } n\to\infty\ )\end{aligned}$$

となって、任意の正の整数 m, p, h に対して

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m+kp)(m+d+kp)\cdots(m+hd+kp)}r^{m+kp} = \frac{1}{h!}\int_0^r\frac{x^{m-1}\left(-\log\frac{x}{r}\right)^h}{1-x^p}dx$$

である事が分かりました。

また左辺の無限和と極限の順序交換も可能ですから（定数のべきがない場合に既に示してありますが、同じ方法で示す事が出来ます)、結局次の様になります：

定理 1.9.1 任意の正の整数 m, p, h に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+kp)^{h+1}} r^{m+kp} = \frac{1}{h!} \int_0^r \frac{x^{m-1}\left(-\log \frac{x}{r}\right)^h}{1-x^p} dx.$$

第 2 章

$\int_0^\infty \frac{1}{1+\cdots+x^n}dx$ 積分公式との関連

2.1　発端

一般に次の式が成り立っています：

事実 2.1.1

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x+\cdots+x^{p-1}}dx = \frac{\pi}{p}\csc\frac{2\pi}{p}$$

整数の積の逆数和に応用するためには、ここから積分範囲を $0 \leq x \leq 1$ にしたものを作り出せれば良いのですが、なかなか上手く行きません。

一般に積分が収束する限り

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^n}dx &= \int_\infty^1 \frac{y^{-m}}{1+y^{-1}+\cdots+y^{-n}}\left(-y^{-2}\right)dy \\ &= \int_1^\infty \frac{y^{n-m-2}}{1+y+\cdots+y^n}dy\end{aligned}$$

ですから、$m = n-m-2$ すなわち、$m = \frac{n-2}{2}$ であれば

$$\int_0^1 \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^n}dx = \int_1^\infty \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^n}dx$$

となって

$$\int_0^1 \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^n}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^n}dx$$

が得られ、積分範囲を $0 \leq x \leq 1$ にする事が出来ます。つまり $n \to 2n$ とすれば

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{2n}}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{2n}}dx$$

であって、左辺の積分は

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{2n}}dx &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)}{1-x^{2n+1}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}-x^n}{1-x^{2n+1}}dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k+n+1\}}\end{aligned}$$

と云う無限和に一致します。

$n=1$ のときこれは事実 2.1.1 によって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

と計算されます（もちろん部分分数分解によっても普通に計算出来ますが)。

$n=2$ のときは

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(5k+2)(5k+3)}=\int_0^1\frac{x}{1+x+x^2+x^3+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x}{1+x+x^2+x^3+x^4}dx$$

を意味しています。この積分はどうやって計算されるでしょうか。

2.2 幾つかの関連していると思われる情報

ここで気になる情報が幾つかあります。

まず数値計算によれば

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(5k+2)(5k+3)}=\frac{\pi}{5}\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5}$$

です。

ここで $5k+3$ と $5k-2$ は本質的に一緒ですから、これは $5k\pm 2$ の積と云う事であって、Euler が最初にバーゼル問題の答えを得たときと同様の解と係数の関係を使って和を求める事が出来、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2-5k)(2+5k)}=\frac{\pi}{10}\cot\frac{2\pi}{5}$$

などが分かります（後述参照）。

また、

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+x+\cdots+x^4}dx=\frac{\pi}{5}\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\pi}{5}\csc\frac{2\pi}{5}$$
$$\int_0^\infty\frac{x}{1+x+\cdots+x^4}dx=\frac{2\pi}{5}\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}=2\cdot\frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5}$$
$$\int_0^\infty\frac{x^2}{1+x+\cdots+x^4}dx=\frac{\pi}{5}\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\pi}{5}\csc\frac{2\pi}{5}$$

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+x+\cdots+x^5}dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\csc\frac{2\pi}{6}$$
$$\int_0^\infty\frac{x}{1+x+\cdots+x^5}dx=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\cot\frac{2\pi}{6}$$
$$\int_0^\infty\frac{x^2}{1+x+\cdots+x^5}dx=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\cot\frac{2\pi}{6}$$
$$\int_0^\infty\frac{x^3}{1+x+\cdots+x^5}dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\csc\frac{2\pi}{6}$$

となっている上に

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(pk-1)(pk+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+p-1)(pk+p+1)}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2p}\cot\frac{\pi}{p}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(5k+4)(5k+6)}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{10}\cot\frac{\pi}{5}$$

あたりも気になります。

2.3 解と係数の関係による考察

$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{2n}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k+n+1\}}$$

でしたが、1.3.1 で見た様に

$$\{1-(2n+1)\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+3n+1\}\{(2n+1)k+n+1\}}$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k+n+1\}}=-\frac{1}{n}$$

でしたから

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k-n\}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+3n+1\}\{(2n+1)k+n+1\}}$$
$$=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k+n+1\}}$$

が分かります。

次に

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k-n\}}$$

の計算です。

$$\begin{aligned}
&\{x^2-n^2-((2n+1)+n)((2n+1)-n)\}\{x^2-n^2-(2(2n+1)+n)(2(2n+1)-n)\}\cdots\\
&=\{x^2-(2n+1)^2\}\{x^2-2^2(2n+1)^2\}\cdots\\
&=\{x-(2n+1)\}\{x+(2n+1)\}\{x-2(2n+1)\}\{x+2(2n+1)\}\cdots\\
&=\frac{1}{x}\left[x\{x-(2n+1)\}\{x+(2n+1)\}\{x-2(2n+1)\}\{x+2(2n+1)\}\cdots\right]
\end{aligned}$$

ですが、この括弧の中は全ての $2n+1$ の倍数で 0 になる関数であって、$Q\sin\frac{\pi x}{2n+1}$ です (Q は定数)。

$$\begin{aligned}
&\{x^2-n^2-((2n+1)+n)((2n+1)-n)\}\{x^2-n^2-(2(2n+1)+n)(2(2n+1)-n)\}\cdots\\
&=\frac{1}{x}Q\sin\frac{\pi x}{2n+1}\\
&=\frac{Q}{x}\left\{\frac{\pi x}{2n+1}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)^5+\cdots\right\}\\
&=\frac{Q\pi}{2n+1}-\frac{Q}{3!}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^3x^2+\frac{Q}{5!}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^5x^4+\cdots
\end{aligned}$$

そこで $x^2-n^2=t$ と置けば

$$\begin{aligned}
&\{t-((2n+1)+n)((2n+1)-n)\}\{t-(2(2n+1)+n)(2(2n+1)-n)\}\cdots\\
&=\frac{Q\pi}{2n+1}-\frac{Q}{3!}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^3(t+n^2)+\frac{Q}{5!}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^5(t+n^2)^2+\cdots
\end{aligned}$$

です。従って

$$\begin{aligned}
&\frac{Q}{\sqrt{t+n^2}}\sin\frac{\pi\sqrt{t+n^2}}{2n+1}\\
&=\frac{Q\pi}{2n+1}-\frac{Q}{3!}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^3(t+n^2)+\frac{Q}{5!}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^5(t+n^2)^2+\cdots=0
\end{aligned}$$

の解は $\{k(2n+1)+n\}\{k(2n+1)-n\}$, $k=1,2,\ldots$ ですから、解の逆数の和と係数の関係から

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k-n\}}=-\frac{(1\text{次の係数})}{(\text{定数項})}$$

となっています。

定数項は $f(t)=\frac{Q}{\sqrt{t+n^2}}\sin\frac{\pi\sqrt{t+n^2}}{2n+1}$ において $t=0$ として

$$(\text{定数項})=\frac{Q}{n}\sin\frac{\pi n}{2n+1}$$

であり、１次の係数は微分して $f'(0)$ で得られます：

$$\begin{aligned}
f'(t)&=-\frac{Q}{2}(t+n^2)^{-\frac{3}{2}}\sin\frac{\pi\sqrt{t+n^2}}{2n+1}\\
&\quad+\frac{Q}{\sqrt{t+n^2}}\left(\cos\frac{\pi\sqrt{t+n^2}}{2n+1}\right)\frac{\pi}{2(2n+1)}(t+n^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$(1\text{次の係数})=f'(0)=-\frac{Q}{2n^3}\sin\frac{\pi n}{2n+1}+\frac{Q}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{2n+1}\right)\frac{\pi}{2n(2n+1)}.$$

以上から

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k-n\}}&=-\frac{-\frac{Q}{2n^3}\sin\frac{\pi n}{2n+1}+\frac{Q}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{2n+1}\right)\frac{\pi}{2n(2n+1)}}{\frac{Q}{n}\sin\frac{\pi n}{2n+1}}\\
&=\frac{1}{2n^2}-\frac{\pi}{2n(2n+1)}\cot\frac{n\pi}{2n+1}
\end{aligned}$$

です。

以上から、結局、

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k+n+1\}}=\frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

が分かります。

従って

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{2n}}dx=\frac{2\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

特に $n=2$ の時には

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x+\cdots+x^4}dx=\frac{2\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5}$$

も得られます。

事実 2.3.1

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k+n+1\}}=\frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n}}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

2.4 $n\to 2n+1$ の場合

cosecant 積分公式の積分範囲を $0\le x\le 1$ に出来ないかと云う事でしたが、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x^m}{1+\cdots+x^n}dx&=\int_0^1\frac{x^m}{1+\cdots+x^n}dx+\int_1^\infty\frac{x^m}{1+\cdots+x^n}dx\\&=\int_0^1\frac{x^m}{1+\cdots+x^n}dx+\int_1^0\frac{y^{-m}}{1+\cdots+y^{-n}}(-y^{-2})dy\\&=\int_0^1\frac{x^m}{1+\cdots+x^n}dx+\int_0^1\frac{y^{n-m-2}}{1+\cdots+y^n}dy\\&=\int_0^1\frac{x^m+x^{n-m-2}}{1+\cdots+x^n}dx\end{aligned}$$

と云う風に、分子が 1 項である事を諦めればなんとかなります。これは結構違和感があるのですが、後に解消されます。

事実 2.4.1 $m=0,1,\ldots,n-2$ に対して

$$\int_0^\infty\frac{x^m}{1+\cdots+x^n}dx=\int_0^1\frac{x^m+x^{n-m-2}}{1+\cdots+x^n}dx.$$

上において $m=n-1,n$ の時はそもそも積分が収束しません。

同じ変換によって

$$\int_0^\infty\frac{x^m}{1+\cdots+x^n}dx=\int_0^\infty\frac{x^{n-m-2}}{1+\cdots+x^n}dx$$

でもあります。

すると $n\to 2n+1,\ m\to n-1$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx&=\int_0^1\frac{x^{n-1}+x^n}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx\\&=\int_0^1\frac{(x^{n-1}+x^n)(1-x)}{1-x^{2n+2}}dx\\&=\int_0^1\frac{x^{n-1}-x^{n+1}}{1-x^{2n+2}}dx\\&=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k+n\}\{(2n+2)k+n+2\}}\end{aligned}$$

です。ここで

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k-n-2\}\{(2n+2)k+n+2\}}\\&\qquad=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k+n\}\{(2n+2)k+3n+4\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2n+4)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k+n\}\{(2n+2)k+3n+4\}}\\&\qquad-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k+n\}\{(2n+2)k+n+2\}}=\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

によれば

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx\\&=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k+n\}\{(2n+2)k+n+2\}}\\&=-\frac{1}{n+2}+(2n+4)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k+n\}\{(2n+2)k+3n+4\}}\\&=-\frac{1}{n+2}+(2n+4)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k-n-2\}\{(2n+2)k+n+2\}}\end{aligned}\tag{2.1}$$

が分かります。

次に $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\{(2n+2)k+n+2\}\{(2n+2)k-n-2\}}$ の計算です。

$$
\begin{aligned}
&\{x^2-(n+2)^2-((2n+2)+n+2)((2n+2)-n-2)\}\\
&\qquad \cdot\{x^2-(n+2)^2-(2(2n+2)+n+2)(2(2n+2)-n-2)\}\cdots\\
&=\{x^2-(2n+2)^2\}\{x^2-2^2(2n+2)^2\}\cdots\\
&=\{x-(2n+2)\}\{x+(2n+2)\}\{x-2(2n+2)\}\{x+2(2n+2)\}\cdots\\
&=\frac{1}{x}\left[x\{x-(2n+2)\}\{x+(2n+2)\}\{x-2(2n+2)\}\{x+2(2n+2)\}\cdots\right]
\end{aligned}
$$

ですが、この括弧の中は全ての $2n+2$ の倍数で 0 になる関数であって、$Q\sin\frac{\pi x}{2n+2}$ です（Q は定数）。

$$
\begin{aligned}
&\{x^2-(n+2)^2-((2n+2)+n+2)((2n+2)-n-2)\}\\
&\qquad \cdot\{x^2-(n+2)^2-(2(2n+2)+n+2)(2(2n+2)-n-2)\}\cdots\\
&=\frac{1}{x}Q\sin\frac{\pi x}{2n+2}\\
&=\frac{Q}{x}\left\{\frac{\pi x}{2n+2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi x}{2n+2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi x}{2n+2}\right)^5+\cdots\right\}\\
&=\frac{Q\pi}{2n+2}-\frac{Q}{3!}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)^3x^2+\frac{Q}{5!}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)^5x^4+\cdots
\end{aligned}
$$

そこで $x^2-(n+2)^2=t$ と置けば

$$
\begin{aligned}
&\{t-((2n+2)+n+2)((2n+2)-n-2)\}\\
&\qquad \cdot\{t-(2(2n+2)+n+2)(2(2n+2)-n-2)\}\cdots\\
&=\frac{Q\pi}{2n+2}-\frac{Q}{3!}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)^3\{t+(n+2)^2\}+\frac{Q}{5!}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)^5\{t+(n+2)^2\}^2+\cdots
\end{aligned}
$$

です。従って

$$
\begin{aligned}
&\frac{Q}{\sqrt{t+(n+2)^2}}\sin\frac{\pi\sqrt{t+(n+2)^2}}{2n+2}\\
&=\frac{Q\pi}{2n+2}-\frac{Q}{3!}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)^3\{t+(n+2)^2\}+\frac{Q}{5!}\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)^5\{t+(n+2)^2\}^2+\cdots=0
\end{aligned}
$$

の解は $\{k(2n+2)+n+2\}\{k(2n+2)-n-2\}$, $k=1,2,\ldots$ ですから、解の逆数の和と係数の関係から

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k-n\}}=-\frac{(\text{１次の係数})}{(\text{定数項})}
$$

となっています。

定数項は $f(t)=\frac{Q}{\sqrt{t+(n+2)^2}}\sin\frac{\pi\sqrt{t+(n+2)^2}}{2n+2}$ において $t=0$ として

$$
(\text{定数項})=\frac{Q}{n+2}\sin\frac{\pi(n+2)}{2n+2}
$$

であり、１次の係数は微分して $f'(0)$ で得られます：

$$
\begin{aligned}
f'(t)=&-\frac{Q}{2}(t+(n+2)^2)^{-\frac{3}{2}}\sin\frac{\pi\sqrt{t+(n+2)^2}}{2n+2}\\
&+\frac{Q}{\sqrt{t+(n+2)^2}}\left(\cos\frac{\pi\sqrt{t+(n+2)^2}}{2n+2}\right)\frac{\pi}{2(2n+2)}(t+(n+2)^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{１次の係数})&=f'(0)\\
&=-\frac{Q}{2(n+2)^3}\sin\frac{\pi(n+2)}{2n+2}+\frac{Q}{n+2}\left(\cos\frac{\pi(n+2)}{2n+2}\right)\frac{\pi}{2(n+2)(2n+2)}.
\end{aligned}
$$

以上から

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\{(2n+2)k+n+2\}\{(2n+2)k-n-2\}}\\
&=-\frac{-\frac{Q}{2(n+2)^3}\sin\frac{\pi(n+2)}{2n+2}+\frac{Q}{n+2}\left(\cos\frac{\pi(n+2)}{2n+2}\right)\frac{\pi}{2(n+2)(2n+2)}}{\frac{Q}{n+2}\sin\frac{\pi(n+2)}{2n+2}}\\
&=\frac{1}{2(n+2)^2}-\frac{\pi}{2(n+2)(2n+2)}\cot\frac{(n+2)\pi}{2n+2}
\end{aligned}
$$

です。

以上から、式 (2.1) と合わせて結局、

$$
\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx=-\frac{\pi}{2n+2}\cot\frac{(n+2)\pi}{2n+2}=\frac{\pi}{2n+2}\cot\frac{n\pi}{2n+2}
$$

が分かります（$-\tan\frac{(n+2)\pi}{2n+2}=-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n+2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n+2}\right)=\tan\frac{n\pi}{2n+2}$ に注意）。

事実 2.4.2 [cosecant,cotangent 積分公式]

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\cdots+x^n}dx = \frac{\pi}{n+1}\csc\frac{2\pi}{n+1}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx = \int_0^\infty \frac{x^n}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx = \frac{\pi}{2n+2}\cot\frac{n\pi}{2n+2}$$

2.5　間を埋める、一般化

証明の中核となる解と係数の関係による議論の所を結果だけ書くと次の様になっています：

定理 2.5.1

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(pk+r)(pk-r)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^2k^2-r^2} = \frac{1}{2r^2}-\frac{\pi}{2rp}\cot\frac{r\pi}{p}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^2k^2+r^2} = \frac{1}{2r^2}+\frac{\pi}{2rp}\coth\frac{r\pi}{p}$$

$\coth$ の方は参考まで。

これを使えば cosecant,cotangent 積分公式の他の場合も証明する事が出来ます。

まずは分母が $1+\cdots+x^{2n+1}$ の場合から。

定理 2.5.2

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx &= \int_0^\infty \frac{x^n}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx \\ &= \frac{\pi}{2n+2}\cot\frac{n\pi}{2n+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx &= \int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx \\ &= \frac{\pi}{2n+2}\left\{\cot\frac{(n-1)\pi}{2n+2}-\cot\frac{n\pi}{2n+2}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{n-3}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx &= \int_0^\infty \frac{x^{n+2}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx \\ &= \frac{\pi}{2n+2}\left\{\cot\frac{(n-2)\pi}{2n+2}-\cot\frac{(n-1)\pi}{2n+2}\right\}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx &= \int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx \\ &= \frac{\pi}{2n+2}\left\{\cot\frac{2\pi}{2n+2}-\cot\frac{3\pi}{2n+2}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx &= \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx \\ &= \frac{\pi}{2n+2}\left\{\cot\frac{\pi}{2n+2}-\cot\frac{2\pi}{2n+2}\right\} \\ &= \frac{\pi}{2n+2}\csc\frac{2\pi}{2n+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{n-m}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx &= \int_0^\infty \frac{x^{n+m-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx \\ &= \frac{\pi}{2n+2}\left\{\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+2}-\cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+2}\right\}\end{aligned}$$

$$(\,m=1,2,3,\ldots,n\,)$$

【証明】

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{n-m}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx &= \int_0^1 \frac{x^{n-m}+x^{n+m-1}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{(x^{n-m}+x^{n+m-1})(1-x)}{1-x^{2n+2}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n-m}+x^{n+m-1}-x^{n-m+1}-x^{n+m}}{1-x^{2n+2}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n-m}-x^{n+m}}{1-x^{2n+2}}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-m+1}-x^{n+m-1}}{1-x^{2n+2}}dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{2m}{\{(2n+2)k+(n-m+1)\}\{(2n+2)k+(n+m+1)\}} \\
&\quad -\sum_{k=0}^\infty \frac{2m-2}{\{(2n+2)k+(n-m+2)\}\{(2n+2)k+(n+m)\}}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2(n-m+1)^2} - \frac{\pi}{2(n-m+1)(2n+2)}\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\{(2n+2)k-(n-m+1)\}\{(2n+2)k+(n-m+1)\}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\{(2n+2)k+(n+m+1)\}\{(2n+2)k+(2n+2)+(n-m+1)\}} \\
&= \frac{-1}{2(n-m+1)}\sum_{k=0}^\infty \frac{-2(n-m+1)}{\{(2n+2)k+(n+m+1)\}\{(2n+2)k+(2n+2)+(n-m+1)\}} \\
&= \frac{-1}{2(n-m+1)}\left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{2m}{\{(2n+2)k+(n+m+1)\}\{(2n+2)k+(n-m+1)\}} - \frac{1}{n-m+1}\right\}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\frac{\pi}{2n+2}\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{2m}{\{(2n+2)k+(n+m+1)\}\{(2n+2)k+(n-m+1)\}}
$$

であることと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2(n-m+2)^2} - \frac{\pi}{2(n-m+2)(2n+2)}\cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\{(2n+2)k-(n-m+2)\}\{(2n+2)k+(n-m+2)\}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\{(2n+2)k+(n+m)\}\{(2n+2)k+(2n+2)+(n-m+2)\}} \\
&= \frac{1}{2(n-m+2)}\sum_{k=0}^\infty \frac{2(n-m+2)}{\{(2n+2)k+(n+m)\}\{(2n+2)k+(2n+2)+(n-m+2)\}} \\
&= \frac{1}{2(n-m+2)}\left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{-2m+2}{\{(2n+2)k+(n+m)\}\{(2n+2)k+(n-m+2)\}} + \frac{1}{n-m+2}\right\}
\end{aligned}
$$

従って

$$
-\frac{\pi}{2n+2}\cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+2} = -\sum_{k=0}^\infty \frac{2m-2}{\{(2n+2)k+(n+m)\}\{(2n+2)k+(n-m+2)\}}
$$

であることから

$$
\int_0^\infty \frac{x^{n-m}}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx = \frac{\pi}{2n+2}\left\{\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+2} - \cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+2}\right\}
$$

が得られます（一番最初の式は既に示しました）。 □

しかしここで

$$
\begin{aligned}
&\cot\frac{(n+m-1)+1}{2n+2}\pi - \cot\frac{(n+m-1)+2}{2n+2}\pi \\
&= \cot\frac{(n+m)\pi}{2n+2} - \cot\frac{(n+m+1)\pi}{2n+2} \\
&= -\cot\left\{\pi - \frac{(n+m)\pi}{2n+2}\right\} + \cot\left\{\pi - \frac{(n+m+1)\pi}{2n+2}\right\} \\
&= -\cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+2} + \cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+2}
\end{aligned}
$$

を見れば明らかに上の結果は次の様に書けています：

> **定理 2.5.3** $k=0,1,\dots,2n-1$ に対して
>
> $$\int_0^\infty \frac{x^k}{1+\cdots+x^{2n+1}}dx = \frac{\pi}{2n+2}\left\{\cot\frac{(k+1)\pi}{2n+2} - \cot\frac{(k+2)\pi}{2n+2}\right\}.$$

次は分母が $1+\cdots+x^{2n}$ の場合。

定理 2.5.4

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-m}}{1+\cdots+x^{2n}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{n+m-2}}{1+\cdots+x^{2n}}dx \qquad (m=2,3,\ldots,n)$$
$$= \frac{\pi}{2n+1}\left\{\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+1} - \cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+1}\right\}$$

【証明】

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{n-m}}{1+\cdots+x^{2n}}dx &= \int_0^1 \frac{x^{n-m}+x^{n+m-2}}{1+\cdots+x^{2n}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{(x^{n-m}+x^{n+m-2})(1-x)}{1-x^{2n+1}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n-m}+x^{n+m-2}-x^{n-m+1}-x^{n+m-1}}{1-x^{2n+1}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n-m}-x^{n+m-1}}{1-x^{2n+1}}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-m+1}-x^{n+m-2}}{1-x^{2n+1}}dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{2m-1}{\{(2n+1)k+(n-m+1)\}\{(2n+1)k+(n+m)\}} \\
&\quad - \sum_{k=0}^\infty \frac{2m-3}{\{(2n+1)k+(n-m+2)\}\{(2n+1)k+(n+m-1)\}}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(n-m+1)^2} - \frac{\pi}{2(n-m+1)(2n+1)}\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+1} \\
&= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\{(2n+1)k-(n-m+1)\}\{(2n+1)k+(n-m+1)\}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\{(2n+1)k+(n+m)\}\{(2n+1)k+(2n+1)+(n-m+1)\}} \\
&= \frac{1}{2(n-m+1)}\sum_{k=0}^\infty \frac{2(n-m+1)}{\{(2n+1)k+(n+m)\}\{(2n+1)k+(2n+1)+(n-m+1)\}} \\
&= \frac{1}{2(n-m+1)}\left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{-2m+1}{\{(2n+1)k+(n+m)\}\{(2n+1)k+(n-m+1)\}} + \frac{1}{n-m+1}\right\}
\end{aligned}$$

従って

$$\frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{2m-1}{\{(2n+1)k+(n+m)\}\{(2n+1)k+(n-m+1)\}}$$

であることと

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(n-m+2)^2} - \frac{\pi}{2(n-m+2)(2n+1)}\cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+1} \\
&= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\{(2n+1)k-(n-m+2)\}\{(2n+1)k+(n-m+2)\}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\{(2n+1)k+(n+m-1)\}\{(2n+1)k+(2n+1)+(n-m+2)\}} \\
&= \frac{1}{2(n-m+2)}\sum_{k=0}^\infty \frac{2(n-m+2)}{\{(2n+1)k+(n+m-1)\}\{(2n+1)k+(2n+1)+(n-m+2)\}} \\
&= \frac{1}{2(n-m+2)} \\
&\qquad \left\{\sum_{k=0}^\infty \frac{-2m+3}{\{(2n+1)k+(n+m-1)\}\{(2n+1)k+(n-m+2)\}} + \frac{1}{n-m+2}\right\}
\end{aligned}$$

従って

$$-\frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+1} = -\sum_{k=0}^\infty \frac{2m-3}{\{(2n+1)k+(n+m-1)\}\{(2n+1)k+(n-m+2)\}}$$

であることから

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-m}}{1+\cdots+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n+1}\left\{\cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+1} - \cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+1}\right\}$$

が得られます。あれ？　今の計算だと $m=1$ でも成り立ってますね。ってことは

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n+1}\left\{\cot\frac{n\pi}{2n+1} - \cot\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right\}$$

ですが、これは一番最初の式とは違う様に見えるのですがどうなんでしょうか？　実は計算してみると

$$\cot\frac{(n+1)\pi}{2n+1} = \cot\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - \frac{n\pi}{2n+1}\right\} = \cot\left(\pi - \frac{n\pi}{2n+1}\right) = -\cot\frac{n\pi}{2n+1}$$

となっていて、結局これは一番最初の式と同じなんですね。$k=n-1$ の場合を特別扱いする必要はない事が分かりました。 □

　さてこちらもさっきの場合の様に統一出来るでしょうか。実際同様に見てみると

$$\begin{aligned}
&\cot\frac{(n+m-2)+1}{2n+1}\pi - \cot\frac{(n+m-2)+2}{2n+1}\pi \\
&= \cot\frac{(n+m-1)\pi}{2n+1} - \cot\frac{n+m)\pi}{2n+1} \\
&= -\cot\left\{\pi - \frac{(n+m-1)\pi}{2n+1}\right) + \cot\left\{\pi - \frac{(n+m)\pi}{2n+1}\right\} \\
&= -\cot\frac{(n-m+2)\pi}{2n+1} + \cot\frac{(n-m+1)\pi}{2n+1}
\end{aligned}$$

ですからやはり上の結果は

> **定理 2.5.5** $k=0,1,2,\ldots,2n-2$ に対して
>
> $$\int_0^\infty \frac{x^k}{1+\cdots+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{2n+1}\left\{\cot\frac{(k+1)\pi}{2n+1} - \cot\frac{(k+2)\pi}{2n+1}\right\}.$$

と書けています。以上まとめると以下の通りです：

> **定理 2.5.6 [cotangent 積分公式]**
> $k=0,1,\ldots,n-3$ に対して
>
> $$\int_0^\infty \frac{x^k}{1+\cdots+x^{n-1}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{n-3-k}}{1+\cdots+x^{n-1}}dx = \frac{\pi}{n}\left\{\cot\frac{(k+1)\pi}{n} - \cot\frac{(k+2)\pi}{n}\right\}.$$

2.6　cotangent の積分表示

2.6.1　はじまり

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{1+\cdots+x^{n-1}}dx = \frac{\pi}{n}\left\{\cot\frac{(k+1)\pi}{n} - \cot\frac{(k+2)\pi}{n}\right\}$$

を見て、右辺が“差”になっているんだから左辺もそうだろうと考えます。で、変形してみると

$$(\text{左辺}) = \int_0^\infty \frac{x^k(1-x)}{1-x^n}dx = \int_0^\infty \frac{x^k - x^{k+1}}{1-x^n}dx$$

だから

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{1-x^n}dx - \int_0^\infty \frac{x^{k+1}}{1-x^n}dx$$

であって

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{1-x^n}dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{(k+1)\pi}{n}$$

なのだろうかと、単純に考えてみますが、これは間違いです。そもそも左辺の積分は収束しません（$x=1$ 付近で発散）。

　収束しない２つの積分

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{1-x^n}dx, \quad \int_0^\infty \frac{x^{k+1}}{1-x^n}dx$$

の差をとると、発散部分が打ち消し合って収束しているってことのようです。では・・・

$$\int_0^\infty \frac{x^k-1}{1-x^n}dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{(k+1)\pi}{n}$$

これなら $x=1$ の所を解消出来るからこれで行けるのだろうか・・・

　しかし数値計算してみると、

$$\int_0^\infty \frac{x-1}{1-x^3}dx = -\frac{\pi}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

なので微妙に違っています。じゃあ何だ？

2.6.2 数値計算から予想してみる

ここで幾つかの数値計算結果が得られました：

$$\frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{t}-1}{t^2-1}dt$$
$$\frac{\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7} = \frac{2}{7}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{7}}-1}{t^2-1}dt.$$

この右辺の積分が一見よく分かりませんが、変数変換によれば

$$\frac{2}{5}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{5}}-1}{t^2-1}dt = \frac{2}{5}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^5-1}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^\infty \frac{x^2-x^{\frac{3}{2}}}{x^5-1}dx$$

であって、また同様に

$$\frac{2}{7}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{7}}-1}{t^2-1}dt = \frac{2}{7}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^7-1}\cdot\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}dx = \int_0^\infty \frac{x^4-x^{\frac{5}{2}}}{x^7-1}dx$$

の事です。で、更に色々数値計算してみると

$$\frac{2}{5}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{5}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5}$$
$$\frac{2}{5}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{5}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5}$$

$$\frac{2}{7}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{5}{7}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7}$$
$$\frac{2}{7}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{7}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7}$$
$$\frac{2}{7}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{7}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{7}\cot\frac{3\pi}{7}$$

$$\frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{9}{11}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{11}\cot\frac{\pi}{11}$$
$$\frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{7}{11}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{11}\cot\frac{2\pi}{11}$$
$$\frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{5}{11}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{11}\cot\frac{3\pi}{11}$$
$$\frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{11}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{11}\cot\frac{4\pi}{11}$$
$$\frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{11}}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{11}\cot\frac{5\pi}{11}$$

などとなっています。従って

$$\frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{t^{1-\frac{2}{11}k}-1}{t^2-1}dt = \frac{\pi}{11}\cot\frac{k\pi}{11}$$

となっている様に思われます（いまのところ $k=1,2,\ldots,5$）。これを変数変換してやると

$$\begin{aligned}\frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{t^{1-\frac{2}{11}k}-1}{t^2-1}dt &= \frac{2}{11}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{11}{2}-k}-1}{x^{11}-1}\cdot\frac{11}{2}x^{\frac{9}{2}}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{9}{2}}-x^{10-k}}{1-x^{11}}dx\end{aligned}$$

が分かります。そこで $10-k=m$ としてやれば、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{9}{2}}-x^m}{1-x^{11}}dx &= \frac{\pi}{11}\cot\frac{(10-m)\pi}{11} \\ &= \frac{\pi}{11}\cot\left\{\pi-\frac{(m+1)\pi}{11}\right\} \\ &= -\frac{\pi}{11}\cot\frac{(m+1)\pi}{11} \\ \int_0^\infty \frac{x^m-x^{\frac{9}{2}}}{1-x^{11}}dx &= \frac{\pi}{11}\cot\frac{(m+1)\pi}{11}\end{aligned}$$

が分かります。従って一般には

予想 2.6.1

$$\int_0^\infty \frac{x^k-x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{(k+1)\pi}{n},\quad 0\le k\le\frac{n}{2}$$

となっているだろうと思われます。具体的に検証（数値計算）してみると $n=5$ のとき、

$$\int_0^\infty \frac{x^k - x^{\frac{3}{2}}}{1-x^5}dx = \frac{\pi}{5}\cot\frac{(k+1)\pi}{5} \quad k=0,1$$

$$\int_0^\infty \frac{1 - x^{\frac{3}{2}}}{1-x^5}dx = \frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5} \quad k=0$$
$$\int_0^\infty \frac{x - x^{\frac{3}{2}}}{1-x^5}dx = \frac{\pi}{5}\cot\frac{2\pi}{5} \quad k=1$$

ばかりでなく

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - x^{\frac{3}{2}}}{1-x^5}dx = \frac{\pi}{5}\cot\frac{3\pi}{5} \quad k=2$$
$$\int_0^\infty \frac{x^3 - x^{\frac{3}{2}}}{1-x^5}dx = \frac{\pi}{5}\cot\frac{4\pi}{5} \quad k=3\,(=n-2)$$

でも成立している事が分かります。従って上の予想は次の様に修正されます：

> 予想 **2.6.2**
>
> $$\int_0^\infty \frac{x^k - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{(k+1)\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-2$$

要するに発散する積分を収束させるための基準項は $x^{\frac{n-2}{2}}$ が正解のようです。しかし n が奇数のときは半整数ですから厄介ですね。

2.6.3　基準値での様子

n が偶数の場合は良いですが奇数の場合には $k=\frac{n-2}{2}$ での $\int_0^\infty \frac{x^k}{1+\cdots+x^{n-1}}dx$ の値はどうなっているのでしょうか？

もしも既に見た結果：

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{1+\cdots+x^{n-1}}dx = \frac{\pi}{n}\left\{\cot\frac{(k+1)\pi}{n} - \cot\frac{(k+2)\pi}{n}\right\}$$

が半整数でも成立するのであれば

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n-2}{2}}}{1+\cdots+x^{n-1}}dx &= \frac{\pi}{n}\left\{\cot\frac{\frac{n}{2}\pi}{n} - \cot\frac{(\frac{n}{2}+1)\pi}{n}\right\}\\ &= -\frac{\pi}{n}\cot\frac{(n+2)\pi}{2n}\\ &= -\frac{\pi}{n}\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}\right)\\ &= \frac{\pi}{n}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\\ &= \frac{\pi}{n}\tan\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

となっている筈です（n が偶数の場合は OK)。これは幾つかの数値計算で正しい事が分かります：

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x+x^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\pi}{3}\left(\cot\frac{3\pi}{6} - \cot\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x+\cdots+x^4}dx = 0.4565001\cdots$$
$$\frac{\pi}{5}\left(\cot\frac{5\pi}{10} - \cot\frac{7\pi}{10}\right) = 0.4565001\cdots$$

これは要するに $\frac{(k+1)\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$ と云う事であって、本来２つの cotangent の差になる所が一方が潰れてしまってもう一方のみになっているわけです。

すると $\frac{k+2}{n} = \frac{1}{2}$ の時も一方は 0 になるわけですが、これは $k=\frac{n-4}{2}$ に対応していて、$n-1-\frac{n-4}{2}-2 = \frac{n-2}{2}$ ですから $k=n-\frac{1}{2}$ の場合と同じ値になっています：

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n-4}{2}}}{1+\cdots+x^{n-1}}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n-2}{2}}}{1+\cdots+x^{n-1}}dx = \frac{\pi}{n}\tan\frac{\pi}{n}.$$

2.6.4　n が偶数の場合

分母が $1-x^{2n}$ である場合は具体的に計算して予想 2.6.2 を証明する事が出来ます。この場合基準項は $k=n-1$ です。

【$k > n-1$ のとき】

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^k - x^{n-1}}{1-x^{2n}}dx &= \int_0^\infty \frac{x^k - x^{k-1} + x^{k-1} - \cdots + x^n - x^{n-1}}{1-x^{2n}}dx \\ &= -\left\{\int_0^\infty \frac{x^{k-1}-x^k}{1-x^{2n}}dx + \cdots + \int_0^\infty \frac{x^{n-1}-x^n}{1-x^{2n}}dx\right\} \\ &= -\left\{\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{1+\cdots+x^{2n-1}}dx + \cdots + \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+\cdots+x^{2n-1}}dx\right\} \\ &= -\frac{\pi}{2n}\left\{\cot\frac{k\pi}{2n} - \cot\frac{(k+1)\pi}{2n} + \cdots + \cot\frac{n\pi}{2n} - \cot\frac{(n+1)\pi}{2n}\right\} \\ &= \frac{\pi}{2n}\left\{\cot\frac{(k+1)\pi}{2n} - \cot\frac{n\pi}{2n}\right\} \\ &= \frac{\pi}{2n}\cot\frac{(k+1)\pi}{2n}\end{aligned}$$

【$k < n-1$ のとき】同様に計算されます。

【$k = n-1$ のとき】明らかに両辺 0 で成り立っています。

2.6.5　n が奇数の場合

この場合も、偶数の場合に帰着させれば証明出来ます。まず

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^k - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx &= \int_0^\infty \frac{y^{2k} - y^{n-2}}{1-y^{2n}}(2y)dy \\ &= 2\int_0^\infty \frac{y^{2k+1}-y^{n-1}}{1-y^{2n}}dy\end{aligned}$$

ですが、これは先に証明した結果より

$$\begin{aligned}&= 2\cdot\frac{\pi}{2n}\cot\frac{(2k+2)\pi}{2n} \\ &= \frac{\pi}{n}\cot\frac{(k+1)\pi}{n}\end{aligned}$$

となります。

定理 2.6.3

$$\int_0^\infty \frac{x^k - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{(k+1)\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$$

2.6.6　cotangent の側から見ると

この定理を cotangent の側から見ると

$$\cot\frac{m\pi}{n} = \frac{n}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{m-1} - x^{\frac{n}{2}-1}}{1-x^n}dx \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ですが、ここで変数変換 $x^n = y^2$ を施せば

$$\begin{aligned}\cot\frac{m\pi}{n} &= \int_0^\infty \frac{y^{\frac{2(m-1)}{n}} - y^{1-\frac{2}{n}}}{1-y^2}\cdot\frac{2}{n}y^{\frac{2}{n}-1}dy \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{2m}{n}-1}-1}{1-y^2}dy\end{aligned}$$

であり、更に $y = \frac{1}{z}$ とすれば

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{\pi}\int_\infty^0 \frac{1-z^{1-\frac{2m}{n}}}{1-z^{-2}}(z^{-2})dz \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-z^{1-\frac{2m}{n}}}{1-z^2}dz \\ \cot r\pi &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-z^{1-2r}}{1-z^2}dz\end{aligned}$$

が得られます（r は $0 < r < 1$ の有理数）。

これは cotangent の積分表示として複素数の範囲で良く知られているようです。更に反転して

$$\int_0^\infty \frac{1-z^p}{1-z^2}dz = \frac{\pi}{2}\cot\frac{1-p}{2}\pi \quad (-1 < p < 1)$$

の形もなかなか面白いですね。

2.7　交代和について

cotangent の部分分数分解に出て来た級数を交代和にしたものを考えると、cosecant の部分分数分解が得られます：

事実 2.7.1

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(pk+r)(pk-r)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^2k^2-r^2}=\frac{1}{2r^2}-\frac{\pi}{2rp}\csc\frac{r\pi}{p}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(pk+r)(pk-r)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^2k^2-r^2}=\frac{1}{2r^2}-\frac{\pi}{2rp}\cot\frac{r\pi}{p}\right)$$

【証明】

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(pk+r)(pk-r)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(pk+r)(pk-r)}&=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(p2j+r)(p2j-r)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(pj+\frac{r}{2}\right)\left(pj-\frac{r}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(pk+r)(pk-r)}&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(pj+\frac{r}{2}\right)\left(pj-\frac{r}{2}\right)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(pk+r)(pk-r)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{\pi}{2\frac{r}{2}p}\cot\frac{r\pi}{2p}\right\}-\frac{1}{2r^2}+\frac{\pi}{2rp}\cot\frac{r\pi}{p}\\&=\frac{1}{2r^2}+\frac{\pi}{2rp}\left(\cot\frac{r\pi}{p}-\cot\frac{r\pi}{2p}\right)\\&=\frac{1}{2r^2}+\frac{\pi}{2rp}\left(\frac{\cos\frac{r\pi}{p}}{\sin\frac{r\pi}{p}}-\frac{\cos\frac{r\pi}{2p}}{\sin\frac{r\pi}{2p}}\right)\\&=\frac{1}{2r^2}+\frac{\pi}{2rp}\frac{\cos\frac{r\pi}{p}-2\cos^2\frac{r\pi}{2p}}{\sin\frac{r\pi}{p}}\\&=\frac{1}{2r^2}-\frac{\pi}{2rp}\csc\frac{r\pi}{p}\end{aligned}$$

□

2.7.1　$m_1+m_2=p$ の場合

まず次が成り立つ事に注意します：

事実 2.7.2

$$\int_0^{\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{n-m-2}}{1+x^n}dx=\frac{\pi}{n}\csc\frac{(m+1)\pi}{n}\quad(m=0,1,\dots,n-2.)$$

【証明】

$$\int_0^{\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx=\int_{\infty}^{0}\frac{y^{-m}}{1+y^{-n}}(-y^{-2})dy=\int_0^{\infty}\frac{y^{n-m-2}}{1+y^n}dy$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx&=\int_0^{1}\frac{x^m}{1+x^n}dx+\int_1^{\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\\&=\int_0^{1}\frac{x^m+x^{n-m-2}}{1+x^n}dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m+1+kn}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n-m-1+kn}\\&=\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m+1+kn}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{-m-1+(k+1)n}\\&=\frac{1}{m+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m+1+kn}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{-m-1+kn}\\&=\frac{1}{m+1}-2(m+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(kn+m+1)(kn-m-1)}\\&=\frac{\pi}{n}\csc\frac{(m+1)\pi}{n}\end{aligned}$$

□

ここで特に $m_1+m_2=p,\ m_1\neq m_2$ の場合は $p-(m_2-1)-2=m_1-1$ となって

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)}\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\left(\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\int_0^1\frac{x^{m_2-1}}{1+x^p}dx\right)\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\left(\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\int_1^\infty\frac{x^{p-m_2+1-2}}{1+x^p}dx\right)\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\left(\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\int_1^\infty\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx\right)\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\left\{\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\left(\int_0^\infty\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx\right)\right\}\\
&=\frac{2}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^\infty\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx\\
&=\frac{2}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\frac{1}{m_2-m_1}\frac{\pi}{p}\csc\frac{m_1\pi}{p}
\end{aligned}$$

が得られます。しかし最後の積分はどうしたら良いでしょうか？

> $p=2n, m_1=m_2=n$ であれば最初の積分が計算可能ですが、今回は $m_1\neq m_2$ ですからこの場合は含みません。べきの交代和の節で。

2.7.2 一般の場合

しかし今の計算を見れば、特に $m_1+m_2=p$ でなくても、$p-m_2\geq 1$ であれば

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)}\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\left(\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\int_0^1\frac{x^{m_2-1}}{1+x^p}dx\right)\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\left(\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\int_1^\infty\frac{x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx\right)\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\left\{\int_0^1\frac{x^{m_1-1}}{1+x^p}dx-\left(\int_0^\infty\frac{x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx-\int_0^1\frac{x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx\right)\right\}\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}+x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx-\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^\infty\frac{x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}+x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx-\frac{1}{m_2-m_1}\frac{\pi}{p}\csc\frac{(p-m_2)\pi}{p}\\
&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}+x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx-\frac{1}{m_2-m_1}\frac{\pi}{p}\csc\frac{m_2\pi}{p}
\end{aligned}$$

が得られます。これは全く同様に

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)}=\frac{1}{m_2-m_1}\frac{\pi}{p}\csc\frac{m_1\pi}{p}-\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{p-m_1-1}+x^{m_2-1}}{1+x^p}dx$$

とも変形されます。

ここで

$$\int_0^1\frac{x^{m_1-1}+x^{p-m_1-1}}{1+x^p}dx=\frac{\pi}{p}\csc\frac{m_1\pi}{p}$$

である事に注意しておきます。

うーっむ、整理が必要だな。混乱して来た。

2.7.3 $[0,1]$ での積分をどうするか

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx&=\int_\infty^1\frac{y^{-m}}{1+y^{-n}}(-y^{-2})dy\\
&=\int_1^\infty\frac{y^{n-m-2}}{1+y^n}dy
\end{aligned}$$

ですから、$n-m-2=m$ の場合は計算が可能です。実際、$n\to 2n$ として $m=n-1$ の場合を考えると

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx = \int_1^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx$$

ですから

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{4n}\csc\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4n}$$

です。

また、この特別な場合でなくても、$0\le m\le n-2$（従って $0\le n-m-2\le n-2$）であれば

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}dx &= \int_1^\infty \frac{x^{n-m-2}}{1+x^n}dx \\
\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-m-2}}{1+x^n}dx &= \int_0^\infty \frac{x^{n-m-2}}{1+x^n}dx \\
&= \frac{\pi}{n}\csc\frac{(m+1)\pi}{n} \\
\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1+x^p}dx + \int_0^1 \frac{x^{p-m-1}}{1+x^p}dx &= \frac{\pi}{p}\csc\frac{m\pi}{p} \quad (m<p)
\end{aligned}$$

の形にはなりますが計算する事が出来ます。これを無限和の形に直せば

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{m+kp} + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{p-m+kp} = \frac{\pi}{p}\csc\frac{m\pi}{p}.$$

となります。左辺が何だかなあ、と思うわけですが、よく見ると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{p-m+kp} &= \frac{1}{p-m} - \frac{1}{2p-m} + \frac{1}{3p-m} - \cdots \\
&= \frac{-1}{m-p} + \frac{1}{m-2p} + \frac{-1}{m-3p} + \cdots \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{m+kp}
\end{aligned}$$

ですから結局左辺は統合されて

事実 2.7.3 $m<p$ ならば

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{m+kp} + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{p-m+kp} = \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{(-1)^k}{m+kp} = \frac{\pi}{p}\csc\frac{m\pi}{p}.$$

と書けている事が分かります。これなら良いですね。

また、$m_1<m_2<p$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx + \int_0^1 \frac{x^{p-m_1-1}-x^{p-m_2-1}}{1+x^p}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx + \int_\infty^1 \frac{x^{-p+m_1+1}-x^{-p+m_2+1}}{1+x^{-p}}(-x^{-2})dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx + \int_1^\infty \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx \\
&= \frac{\pi}{p}\left(\csc\frac{m_1\pi}{p} - \csc\frac{m_2\pi}{p}\right)
\end{aligned}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left(\csc\frac{m_1\pi}{p} - \csc\frac{m_2\pi}{p}\right) \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1 \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1+x^p}dx - \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1 \frac{x^{p-m_2-1}-x^{p-m_1-1}}{1+x^p}dx \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(p-m_1+kp)(p-m_2+kp)} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\{m_1-(k+1)p\}\{m_2-(k+1)p\}} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)}
\end{aligned}$$

が得られます。

事実 2.7.4 $m_1 < m_2 < p$ ならば

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(m_1+kp)(m_2+kp)} = \frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left(\csc\frac{m_1\pi}{p} - \csc\frac{m_2\pi}{p}\right).$$

2.8　同じ事を通常和の場合にやろうとする

同じ事を通常和でやろうとするのですが、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^m}{1-x^n}dx &= \int_0^1 \frac{x^m}{1-x^n}dx + \int_1^\infty \frac{x^m}{1-x^n}dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^m}{1-x^n}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-m-2}}{1-x^n}dx\end{aligned}$$

とするのは間違いです。なぜならこの積分は発散しているからです。その発散を抑えるために基準項を割り出したわけですからこれを使います。そうすると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^m - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx &= \int_0^1 \frac{x^m - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx + \int_1^\infty \frac{x^m - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^m - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx + \int_1^0 \frac{x^{-m} - x^{-\frac{n-2}{2}}}{1-x^{-n}}(-x^{-2})dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^m - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-m-2} - x^{\frac{n-2}{2}}}{1-x^n}dx\\ &= \int_0^1 \frac{x^m - x^{n-m-2}}{1-x^n}dx\end{aligned}$$

ですから次が分かります：

事実 2.8.1

$$\int_0^1 \frac{x^m - x^{n-m-2}}{1-x^n}dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{(m+1)\pi}{n}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{n}\cot\frac{(m+1)\pi}{n} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{n-2m-2}{(m+1+kn)(n-m-1+kn)}\\ \frac{\pi}{p}\cot\frac{m\pi}{p} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{p-2m}{(m+kp)(p-m+kp)}\end{aligned}$$

となって

事実 2.8.2 $m = 1, 2, \ldots, p-1$ が $2m \neq p$ であれば

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(m+kp)(p-m+kp)} = \frac{\pi}{(p-2m)p}\cot\frac{m\pi}{p}.$$

が得られます。これは既に見た

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(pk+r)(pk-r)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{\pi}{2rp}\cot\frac{r\pi}{p}$$

や

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\{(2n+1)k+n\}\{(2n+1)k+n+1\}} = \frac{\pi}{2n+1}\cot\frac{\pi}{2n+1}$$

と同じ事であって、何だかバーゼル問題の周りを彷徨っているだけのような気がします。

また上で $m \to \frac{p}{2}$ の極限をとれば

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

が得られます。

更に

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1 \frac{x^{m_1-1} - x^{m_2-1}}{1-x^p}dx\\ &= \frac{1}{m_2-m_1}\int_1^\infty \frac{x^{p-m_2-1} - x^{p-m_1-1}}{1-x^p}dx\\ &= \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^\infty \frac{x^{p-m_2-1} - x^{p-m_1-1}}{1-x^p}dx - \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1 \frac{x^{p-m_2-1} - x^{p-m_1-1}}{1-x^p}dx\end{aligned}$$

によれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1 \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx + \frac{1}{(p-m_1-1)-(p-m_2-1)}\int_0^1 \frac{x^{p-m_2-1}-x^{p-m_1-1}}{1-x^p}dx \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^\infty \frac{x^{p-m_2-1}-x^{p-m_1-1}}{1-x^p}dx \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\left\{\int_0^\infty \frac{x^{p-m_2-1}-x^{p-m_2}}{1-x^p}dx + \cdots + \int_0^\infty \frac{x^{p-m_1-2}-x^{p-m_1-1}}{1-x^p}dx\right\} \\
&= \frac{1}{m_2-m_1}\left\{\int_0^\infty \frac{x^{p-m_2-1}}{1+\cdots+x^{p-1}}dx + \cdots + \int_0^\infty \frac{x^{p-m_1-2}}{1+\cdots+x^{p-1}}dx\right\} \\
&= \frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left\{\cot\frac{(p-m_2)\pi}{p} - \cot\frac{(p-m_2+1)\pi}{p} + \cdots \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \cot\frac{(p-m_1-1)\pi}{p} - \cot\frac{(p-m_1)\pi}{p}\right\} \\
&= \frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left\{\cot\frac{(p-m_2)\pi}{p} - \cot\frac{(p-m_1)\pi}{p}\right\} \\
&= \frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left\{\cot\frac{m_1\pi}{p} - \cot\frac{m_2\pi}{p}\right\}
\end{aligned}
$$

となって

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p-m_1+kp)(p-m_2+kp)} \\
= \frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p} - \cot\frac{m_2\pi}{p}\right)
\end{aligned}
$$

も得られます。しかしここで

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p-m_1+kp)(p-m_2+kp)} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1-kp)(m_2-kp)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}
\end{aligned}
$$

に注意すれば左辺の和は統一されて

事実 2.8.3 $m_1 < m_2 < p$ ならば

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)} &= \frac{1}{m_2-m_1}\int_0^\infty \frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx \\
&= \frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p} - \cot\frac{m_2\pi}{p}\right).
\end{aligned}
$$

と書くことが出来ます。これは $p=4,6$ のときに具体的に見た『π の定数倍のみ』と云う事を示しています。

ただしこれも既に見た事実（cotangent の部分分数展開）:

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(pk+r)(pk-r)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{\pi}{2rp}\cot\frac{r\pi}{p}.
$$

から

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p-m_1+kp)(p-m_2+kp)}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(-m_1+kp)(-m_2+kp)}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(kp+m_1)(kp+m_2)}+\frac{1}{(kp-m_1)(kp-m_2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{1}{kp+m_1}-\frac{1}{kp+m_2}\right)+\frac{1}{m_2-m_1}\left(\frac{1}{kp-m_2}-\frac{1}{kp-m_1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}+\frac{1}{m_2-m_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{kp+m_1}-\frac{1}{kp-m_1}-\left(\frac{1}{kp+m_2}-\frac{1}{kp-m_2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}+\frac{1}{m_2-m_1}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{-2m_1}{(kp+m_1)(kp-m_1)}-\frac{-2m_2}{(kp+m_2)(kp-m_2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}-\frac{2m_1}{m_2-m_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(kp+m_1)(kp-m_1)}+\frac{2m_2}{m_2-m_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(kp+m_2)(kp-m_2)}$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}-\frac{2m_1}{m_2-m_1}\left(\frac{1}{2m_1^2}-\frac{\pi}{2m_1p}\cot\frac{m_1\pi}{p}\right)+\frac{2m_2}{m_2-m_1}\left(\frac{1}{2m_2^2}-\frac{\pi}{2m_2p}\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)$$
$$=\frac{1}{m_1m_2}-\frac{1}{(m_2-m_1)m_1}+\frac{1}{(m_2-m_1)m_2}+\frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\cot\frac{m_1\pi}{p}-\frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\cot\frac{m_2\pi}{p}$$
$$=\frac{\pi}{(m_2-m_1)p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p}-\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)$$

と云う風に示される結果に一致しています。

またこの積分表示（cotangent 表示）によれば、以前見た特別な関係にある 2 つの和は次の様に定数倍の関係である事も分かります。

事実 2.8.4 $0<m_1<m_2<p$ であれば

$$\{m_2+l_2p-(m_1+l_1p)\}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m_1+l_1p+kp)(m_2+l_2p+kp)}$$
$$=(m_2-m_1)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m_1+kp)(m_2+kp)}.$$

2.9 最初に戻る

同様の計算によって、そもそもの最初の出発点であった等式は

$$\frac{\pi}{p}\csc\frac{2\pi}{p}=\int_0^\infty\frac{1}{1+\cdots+x^{p-1}}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+\cdots+x^{p-1}}dx+\int_1^\infty\frac{1}{1+\cdots+x^{p-1}}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+\cdots+x^{p-1}}dx+\int_0^1\frac{x^{p-3}}{1+\cdots+x^{p-1}}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1-x}{1-x^p}dx+\int_0^1\frac{x^{p-3}(1-x)}{1-x^p}dx$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+kp)(2+kp)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p-2+kp)(p-1+kp)}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+kp)(2+kp)}$$

と云う風に変形されます（$p>2$）。

つまり最初考えていた様に積分範囲を $[0,1]$ にするのではなく、和の範囲を $-\infty<k<\infty$ にする事が自然な流れのようです。

2.10 $m_2=p$ の場合をどうするか

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk+p)}$ の和の範囲を負の k にまで拡げようとすると $k=-1$ の項が発散してしまいそこだけ除外する必要が出てきます。

『-1 だけを除外した和』と云うのも何だか不自然な気もするのですが、$p=4,6$ の時に見た様に $\log$ は現れず、有理数と π だけになっていました。しかも有理数部分が平方数の逆数ですからこれは何かあるのではないでしょうか。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\neq -1}\frac{1}{(pk+m)(pk+p)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk+p)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+2p-m)(pk+p)}\\
&= \frac{1}{p-m}\int_0^1\frac{x^{m-1}-x^{p-1}}{1-x^p}dx+\frac{1}{p-m}\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{2p-m-1}}{1-x^p}dx\\
&= \frac{1}{p-m}\int_0^1\frac{x^{m-1}-x^{2p-m-1}}{1-x^p}dx\\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk+2p-m)}
\end{aligned}
$$

ですが、ここで

$$
\begin{aligned}
&(2p-m-m)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk+2p-m)}-(-m-m)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk-m)}\\
&=\frac{1}{-m}+\frac{1}{-m+p}
\end{aligned}
$$

によれば

$$
\begin{aligned}
&2(p-m)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk+2p-m)}\\
&=-2m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk-m)}+\frac{1}{-m}+\frac{1}{-m+p}\\
&=-2m\left(-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2pm}\cot\frac{m\pi}{p}\right)-\frac{1}{m}+\frac{1}{p-m}\\
&=\frac{\pi}{p}\cot\frac{m\pi}{p}+\frac{1}{p-m}
\end{aligned}
$$

であって

$$
2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk+2p-m)}=\frac{1}{(p-m)^2}+\frac{\pi}{p(p-m)}\cot\frac{m\pi}{p}
$$

ですから

$$
\sum_{k\neq -1}\frac{1}{(pk+m)(pk+p)}=\frac{1}{(p-m)^2}+\frac{\pi}{p(p-m)}\cot\frac{m\pi}{p}
$$

が得られます。

事実 2.10.1 $0<m<p$ のとき

$$
\sum_{k\neq -1}\frac{1}{(pk+m)(pk+p)}=\frac{1}{(p-m)^2}+\frac{\pi}{p(p-m)}\cot\frac{m\pi}{p}.
$$

丁度 $2m=p$ の時に $\cot\frac{\pi}{2}=0$ となって、π の項は消えて $\frac{1}{m^2}$ だけが残ります。ただこれは両辺に m^2 を掛ければ

$$
\sum_{k\neq -1}\frac{1}{(2mk+m)(2mk+2m)}=\frac{1}{m^2}
$$

$$
\sum_{k\neq -1}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=1
$$

ですから大した事ではないですね。

あるいは $p=4m$ であれば、$\cot$ は有理数になって（1 ですが）、

$$
\sum_{k\neq -1}\frac{1}{(4mk+m)(4mk+4m)}=\frac{1}{9m^2}+\frac{\pi}{12m^2}
$$

ですね。

2.11 The Herglotz trick

The Herglotz trick is basically to define

$$
f(x):=\pi\cot\pi x,\quad g(x):=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}
$$

and derive enough common properties of these functions to see in the end that they must coincide. Namely, it consists of showing that:

(i)f and g are defined for all non-integral values and are continuous there.

(ii)They are periodic of period 1.

(iii)They are odd functions.

(iv)They satisfy the same functional relation

$$
f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x),\ \text{and}\ g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=2g(x).
$$

(v)By defining $h(x) = f(x) - g(x)$, and setting $h(x) := 0$ for $x \in \mathbb{Z}$, h becomes a continuous function on all of $\mathbb{R}$ that shares the properties given in (ii), (iii), and (iv).

Now the "trick" is to use all these properties as follows. Since h is a periodic continuous function, it possesses a maximum m. Let x_0 be a point in $[0, 1]$ with $h(x_0) = m$. It follows from (iv) that

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2m,$$

and hence that $h\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$. Iteration gives $h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$ for all n, and hence $h(0) = m$ by continuity. But $h(0) = 0$, and so $m = 0$, that is, $h(x) \le 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. As $h(x)$ is an odd function, $h(x) < 0$ is impossible, hence $h(x) = 0$ for all $x \in R$.

第 3 章

級数の和の digamma 関数による表現

3.1 Digamma 関数

Digamma 関数の隣接関係式で最も基本的なものは以下の２つ：

$$\Psi(1-z)-\Psi(z)=\pi\cot\pi z$$
$$\Psi(z+1)=\Psi(z)+\frac{1}{z}$$

3.2 Digamma 関数の差

Digamma 関数の差の積分表示式：

定理 3.2.1

$$\Psi(t)-\Psi(s)=\int_0^1\frac{x^{s-1}-x^{t-1}}{1-x}dx$$

によれば、変数変換によって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}&=\frac{1}{m_2-m_1}\int_0^1\frac{x^{m_1-1}-x^{m_2-1}}{1-x^p}dx\\&=\frac{1}{(m_2-m_1)p}\int_0^1\frac{y^{\frac{m_1}{p}-1}-y^{\frac{m_2}{p}-1}}{1-y}dy\\&=\frac{1}{(m_2-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{m_2}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}\end{aligned}$$

が得られます。

事実 3.2.2 $m_1\neq m_2$ ならば次が成り立ちます：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}=\frac{1}{(m_2-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{m_2}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}.$$

また、相反公式：

定理 3.2.3

$$\Psi(1-z)-\Psi(z)=\pi\cot\pi z$$

は、$z=\frac{m}{p}$ と置けば（$p\neq 2m$ のとき）

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m)(pk+p-m)}&=\frac{1}{p(p-2m)}\left\{\Psi\left(1-\frac{m}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m}{p}\right)\right\}\\&=\frac{\pi}{p(p-2m)}\cot\frac{m\pi}{p}\end{aligned}$$

を意味しており、これは先に見た結果（事実 2.8.2）に一致しています。

更に良く似た２つの結果（$m_1\neq m_2$ とします）：

（事実 2.8.3）

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}=\frac{1}{(m_2-m_1)p}\left\{-\pi\cot\frac{m_2\pi}{p}+\pi\cot\frac{m_1\pi}{p}\right\}$$

（事実 3.2.2）

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}=\frac{1}{(m_2-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{m_2}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}$$

も、負の k に対応した和の部分が

$$\begin{aligned}\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}&=\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{(-pk-m_1)(-pk-m_2)}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(pk-m_1)(pk-m_2)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+p-m_1)(pk+p-m_2)}\end{aligned}$$

と変形されることに注意すれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}&=\frac{1}{(p-m_2-p+m_1)p}\left\{\Psi\left(1-\frac{m_2}{p}\right)-\Psi\left(1-\frac{m_1}{p}\right)\right\}\\&=\frac{1}{(m_2-m_1)p}\left\{-\Psi\left(1-\frac{m_2}{p}\right)+\Psi\left(1-\frac{m_1}{p}\right)\right\}\end{aligned}$$

であって、定理 3.2.3 から

$$\Psi\left(\frac{m_j}{p}\right)-\Psi\left(1-\frac{m_j}{p}\right)=-\pi\cot\frac{m_j\pi}{p}$$

となっていることが隠れていると分かります。

また、$m_1<m_2=p$ の場合は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=-2}^{-\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+p)}&=\sum_{k=-2}^{-\infty}\frac{1}{(-pk-m_1)(-pk-p)}\\&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(pk-m_1)(pk-p)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+2p-m_1)(pk+p)}\\&=\frac{1}{(p-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{2p-m_1}{p}\right)-\Psi\left(\frac{p}{p}\right)\right\}\end{aligned}$$

であって、

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq-1}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+p)}&=\frac{1}{(p-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{p}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}\\&\quad+\frac{1}{(p-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{2p-m_1}{p}\right)-\Psi\left(\frac{p}{p}\right)\right\}\\&=\frac{1}{(p-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{2p-m_1}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}\\&=\frac{1}{(p-m_1)p}\left\{\Psi\left(1+1-\frac{m_1}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}\end{aligned}$$

ここで $\Psi(1+z)=\Psi(z)+\frac{1}{z}$ によれば（$z=1-\frac{m_1}{p}$ です）

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{(p-m_1)p}\left\{\frac{1}{1-\frac{m_1}{p}}+\Psi\left(1-\frac{m_1}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}\\&=\frac{1}{(p-m_1)^2}+\frac{1}{(p-m_1)p}\left\{\Psi\left(1-\frac{m_1}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}\end{aligned}$$

となり、最後に $\Psi(1-z)-\Psi(z)=\pi\cot\pi z$ から

$$=\frac{1}{(p-m_1)^2}+\frac{1}{(p-m_1)p}\pi\cot\pi\frac{m_1}{p}$$

が得られます（以前見た結果と一致しています）。

3.3 Euler の方法において digamma 関数が現れる具体的な計算

次の級数の和を L.Euler が Basel 問題を解決したときのやり方で計算してみましょう。

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{11\cdot 13}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(5k+1)(5k+3)}$$

分母を平方完成すると

$$(5k+1)(5k+3)=(5k+2)^2-1$$

ですから、全ての $\pm(5k+2)$ を 1 位の零点にもつ関数を使わなくてはなりません。しかしこの数列は等間隔には並んでいないので、三角関数から引っ張って来る事は出来ません。そこで登場するのが Gamma 関数です。

$\Gamma(z)$ は $0,-1,-2,\ldots$ に 1 位の極をもちますから、$\frac{1}{\Gamma(-z)}$ は $0,1,2,\ldots$ に 1 位の零点をもちます。

従って $\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{x-2}{5}\right)}$ は $2,7,12,\ldots,5k+2,\ldots$ に 1 位の零点をもち、$\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{x-2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{5}\right)}$ は $\pm2,\pm7,\pm12,\ldots,\pm(5k+2),\ldots$ に 1 位の零点をもつことになります。

従って

$$(x^2-1-1\cdot 3)(x^2-1-6\cdot 8)(x^2-1-11\cdot 13)\cdots=Q\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{x-2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{5}\right)}$$

なので、$x^2-1=X$、すなわち $x=\sqrt{X+1}$ とおけば

$$(X-1\cdot 3)(X-6\cdot 8)(X-11\cdot 13)\cdots=Q\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\sqrt{X+1}-2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{\sqrt{X+1}+2}{5}\right)}$$

となって

$$F(X)=\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\sqrt{X+1}-2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{\sqrt{X+1}+2}{5}\right)}$$

は $1\cdot 3, 6\cdot 8, 11\cdot 13,\ldots$ に 1 位の零点をもちます。

$F(X)$ の原点での Taylor 展開の定数項と 1 次の係数を求めると、

$$\begin{aligned}
(\text{定数項})=F(0)&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)}\\
F'(X)&=-\frac{\left\{\Gamma\left(-\frac{\sqrt{X+1}-2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{\sqrt{X+1}+2}{5}\right)\right\}'}{\Gamma\left(-\frac{\sqrt{X+1}-2}{5}\right)^2\Gamma\left(\frac{\sqrt{X+1}+2}{5}\right)^2}\\
&=-\frac{\begin{array}{c}\Gamma'\left(-\frac{\sqrt{X+1}-2}{5}\right)\left(-\frac{1}{10}(X+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\Gamma\left(\frac{\sqrt{X+1}+2}{5}\right)\\+\Gamma\left(-\frac{\sqrt{X+1}-2}{5}\right)\Gamma'\left(\frac{\sqrt{X+1}+2}{5}\right)\left(\frac{1}{10}(X+1)^{-\frac{1}{2}}\right)\end{array}}{\Gamma\left(-\frac{\sqrt{X+1}-2}{5}\right)^2\Gamma\left(\frac{\sqrt{X+1}+2}{5}\right)^2}\\
(\text{1 次の係数})=F'(0)&=-\frac{-\frac{1}{10}\Gamma'\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{10}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma'\left(\frac{3}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)^2\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)^2}\\
&=-\frac{1}{10\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)}\left\{\Psi\left(\frac{3}{5}\right)-\Psi\left(\frac{1}{5}\right)\right\}
\end{aligned}$$

となっていますから求める級数の和は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(5k+1)(5k+3)}=-\frac{(\text{1 次の係数})}{(\text{定数項})}=\frac{1}{10}\left\{\Psi\left(\frac{3}{5}\right)-\Psi\left(\frac{1}{5}\right)\right\}$$

となります。これは定理 3.2.1 によって得られた結果（事実 3.2.2）と一致しています。

3.4 Digamma 関数の級数表示

Digamma 関数は

事実 3.4.1

$$\Psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right) \tag{3.1}$$

と云う級数表示をもちますが、$\Psi(z)+\frac{1}{z}=\Psi(z+1)$ を使って少し変形すると

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z}{(k+1)(k+z+1)}=\Psi(z)+\gamma+\frac{1}{z}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+z+1)}=\frac{1}{z}\left\{\Psi(z+1)+\gamma\right\}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+p)(pk+\{z+1\}p)}=\frac{1}{zp^2}\left\{\Psi(z+1)+\gamma\right\}$$

ですから、$(z+1)p=m$ と置けば $z+1=\frac{m}{p}$ であって

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+p)(pk+m)}=\frac{1}{(p-m)p}\left\{-\gamma-\Psi\left(\frac{m}{p}\right)\right\}$$

が得られます。ここで $\Psi(1)=-\gamma$ でしたからこれは

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+p)(pk+m)}=\frac{1}{(p-m)p}\left\{\Psi\left(\frac{p}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m}{p}\right)\right\}$$

とも書く事が出来、事実 3.2.2 の特別な場合になっています。

また、(3.1) を使ってそのまま差を計算すれば

$$\begin{aligned}\Psi(t)-\Psi(s)&=-\frac{1}{t}+\frac{1}{s}+\sum_{k=0}\frac{t}{(k+1)(k+t+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s}{(k+1)(k+s+1)}\\&=\frac{t-s}{st}+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{t}{(k+1)(k+t+1)}-\frac{s}{(k+1)(k+s+1)}\right\}\\&=\frac{t-s}{st}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t-s}{(k+s+1)(k+t+1)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t-s}{(k+s)(k+t)}\end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{\Psi(t)-\Psi(s)}{t-s}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+s)(k+t)}\tag{3.2}$$

です（$s\neq t$)。これを変形すれば同様に事実 3.2.2 が得られます。

更に (3.2) の両辺で $s\to t$ の極限をとれば

$$\Psi'(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+t)^2}$$

が得られるでしょう。

3.5　交代和

$$\Psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)$$

によれば

$$\begin{aligned}\Psi\left(\frac{p+m}{2p}\right)&=-\gamma-\frac{2p}{p+m}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{\frac{p+m}{2p}+k}\right)\\\Psi\left(\frac{m}{2p}\right)&=-\gamma-\frac{2p}{m}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{\frac{m}{2p}+k}\right)\\\Psi\left(\frac{p+m}{2p}\right)-\Psi\left(\frac{m}{2p}\right)&=\frac{2p}{m}-\frac{2p}{p+m}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{m}{2p}+k}-\frac{1}{\frac{p+m}{2p}+k}\right)\\\frac{1}{2p}\left\{\Psi\left(\frac{p+m}{2p}\right)-\Psi\left(\frac{m}{2p}\right)\right\}&=\frac{1}{m}-\frac{1}{p+m}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+2pk}-\frac{1}{p+m+2pk}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{pk+m}\end{aligned}$$

が得られます。

事実 3.5.1

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{pk+m}=\frac{1}{2p}\left\{\Psi\left(\frac{m}{2p}+\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{m}{2p}\right)\right\}$$

交代和は積の和で書ける：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p}{(2pk+m)(2pk+p+m)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{pk+m}$$

ので、事実 3.2.2 を変形しても同じ式が得られるでしょう。

3.6　半整数を含んだ隣接関係式

Digamma 関数の隣接関係式：

事実 3.6.1

$$\Psi(2z) = \frac{1}{2}\Psi(z) + \frac{1}{2}\Psi\left(z+\frac{1}{2}\right) + \log 2$$

に注意すれば、$z = \frac{m}{2p}$ のとき、

$$\Psi\left(\frac{m}{p}\right) = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{m}{2p}\right) + \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{m}{2p}+\frac{1}{2}\right) + \log 2$$

$$\frac{1}{2}\left\{\Psi\left(\frac{m}{2p}\right) + \Psi\left(\frac{m}{2p}+\frac{1}{2}\right)\right\} = \Psi\left(\frac{m}{p}\right) - \log 2$$

と書けて、先に見た事実 3.5.1 と合わせて考えると

$$\frac{1}{2}\left\{\Psi\left(\frac{m}{2p}+\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{m}{2p}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+\frac{m}{p}}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\Psi\left(\frac{m}{2p}+\frac{1}{2}\right) + \Psi\left(\frac{m}{2p}\right)\right\} = \Psi\left(\frac{m}{p}\right) - \log 2$$

と書けています。あるいは $\frac{m}{p} = q$ と書けば、

$$\frac{1}{2}\left\{\Psi\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{q}{2}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+q}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\Psi\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\right) + \Psi\left(\frac{q}{2}\right)\right\} = \Psi(q) - \log 2$$

となります。面白いですね。

また、事実 3.6.1 は、級数の積分表現の言葉で書くと

$$\begin{aligned}
2\log 2 &= \Psi(2z) - \Psi(z) + \Psi(2z) - \Psi\left(z+\frac{1}{2}\right) \\
&= \int_0^1 \frac{x^{z-1} - x^{2z-1}}{1-x}dx + \int_0^1 \frac{x^{z-\frac{1}{2}} - x^{2z-1}}{1-x}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{z-1} + x^{z-\frac{1}{2}} - 2x^{2z-1}}{1-x}dx \\
&= \int_0^1 \frac{y^{2z-2} + y^{2z-1} - 2y^{4z-2}}{1-y^2}2ydy \\
\log 2 &= \int_0^1 \frac{y^{2z-1}(1+y-2y^{2z})}{1-y^2}dy
\end{aligned}$$

です。つまりこの右辺の積分は z によらず一定の値となるわけです。

事実 3.6.2 次の積分：

$$\int_0^1 \frac{y^{2z-1}(1+y-2y^{2z})}{1-y^2}dy$$

は、任意の z に対して同一の値（$\log 2$）となります。

また z が正の整数の場合に計算してみると

$$\begin{aligned}
\log 2 &= \int_0^1 \frac{y^{2n-1}(1+y-2y^{2n})}{1-y^2}dy \\
&= \int_0^1 \frac{y^{2n-1}(1-y^{2n}) + y^{2n-1}(y-y^{2n})}{1-y^2}dy \\
&= \int_0^1 \frac{y^{2n-1}(1-y^{2n}) + y^{2n}(1-y^{2n-1})}{1-y^2}dy \\
&= \int_0^1 \frac{y^{2n-1}(1+y+\cdots+y^{2n-1}) + y^{2n}(1+y+\cdots+y^{2n-2})}{1+y}dy \\
&= \int_0^1 \frac{(y^{2n-1}+y^{2n})(1+y+\cdots+y^{2n-2}) + y^{4n-2}}{1+y}dy \\
&= \int_0^1 \left\{y^{2n-1}(1+y+\cdots+y^{2n-2}) + \frac{y^{4n-2}}{1+y}\right\}dy \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \int_0^1 \frac{y^{4n-2}}{1+y}dy
\end{aligned}$$

となりますから、最後の積分を

$$\int_0^1 \frac{y^{4n-2}}{1+y}dy = \int_0^1 y^{4n-2}(1-y+y^2-y^3+\cdots)dy$$
$$= \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} - \cdots$$

と計算すれば

$$\log 2 = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} - \cdots$$

と書くことが出来ます。

この右辺（これを $R(n)$ と書くことにします）が n によらないことは次のように分かります。

最初の $\frac{1}{2n}$ と $\frac{1}{2n+1}$ の部分でそれぞれ分母分子に 2 を掛けてやれば

$$\frac{2}{4n} + \frac{2}{4n+2}$$

となり、これを交代和の部分で上手くキャンセレーションすれば

$$R(n) = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4} + \cdots = R(n+1)$$

となっており、これを繰り返せば $R(n)$ は任意の n で一定値であることが分かります。

従ってその値は $R(1)$ に等しく、

$$R(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$
$$= \log 2$$

となるわけです。

3.7　Digamma 関数の有理数での値

また有理数での値は

事実 3.7.1 $m < p$ を正の整数とするとき

$$\Psi\left(\frac{m}{p}\right) = -\gamma - \log(2p) - \frac{1}{2}\pi\cot\frac{m\pi}{p} + 2\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\cos\frac{2\pi mk}{p}\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right).$$

であることが知られていて、具体値は例えば

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2$$
$$\Psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{3}{2}\log 3$$
$$\Psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{3}{2}\log 3$$
$$\Psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\log 2$$
$$\Psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\log 2$$
$$\Psi\left(\frac{1}{6}\right) = -\gamma - \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 2\log 2 - \frac{3}{2}\log 3$$
$$\Psi\left(\frac{5}{6}\right) = -\gamma + \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 2\log 2 - \frac{3}{2}\log 3$$

です。

【証明】　$m < p$ とします。Digamma 関数の級数表示 (3.1) によれば

$$\Psi\left(\frac{m}{p}\right) + \gamma = -\frac{p}{m} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\frac{m}{p}+k}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{p}{m+kp}\right)$$
$$= \lim_{t\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{p}{m+kp}\right)t^{m+kp}$$

です。ここで

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{p}{m+kp}\right)t^{m+kp} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{m+kp}}{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{pt^{m+kp}}{m+kp}$$
$$= t^{m-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{(k+1)p}}{k+1} - p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{m+kp}}{m+kp}$$

となりますが、対数関数の Taylor 展開：

$$\log(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}$$

によれば右辺第１項は

$$-t^{m-p}\log(1-t^p)$$

である事が分かります。また、1 の原始 p 乗根の１つを ξ とすれば

$$\left(\xi^j\right)^0+\left(\xi^j\right)^1+\cdots+\left(\xi^j\right)^{p-1}=\begin{cases}p & j=0,\pm p,\pm 2p,\ldots\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

となっていますから、特に

$$\sum_{n=0}^{p-1}\left(\xi^{j-m}\right)^n=\begin{cases}p & j=m,m\pm p,m\pm 2p,\ldots\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

でもあって、右辺第２項は

$$\begin{aligned}-p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{m+kp}}{m+kp}&=-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j}{j}\sum_{n=0}^{p-1}\left(\xi^{j-m}\right)^n\\&=-\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j}{j}\left(\xi^{j-m}\right)^n\\&=-\sum_{n=0}^{p-1}\xi^{-mn}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\xi^n t)^j}{j}\\&=\sum_{n=0}^{p-1}\xi^{-mn}\log(1-\xi^n t)\end{aligned}$$

と書ける事が分かります。

従って、極限をとるための準備として

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{p}{m+kp}\right)t^{m+kp}\\&=-t^{m-p}\log(1-t^p)+\sum_{n=0}^{p-1}\xi^{-mn}\log(1-\xi^n t)\\&=-t^{m-p}\log\frac{1-t^p}{1-t}-(t^{m-1}-1)\log(1-t)+\sum_{n=1}^{p-1}\xi^{-mn}\log(1-\xi^n t)\end{aligned}$$

と変形し、$t\to 1-0$ とすれば

$$\psi\left(\frac{m}{p}\right)+\gamma=-\log p+\sum_{n=1}^{p-1}\xi^{-mn}\log(1-\xi^n)$$

が分かります。

また、m の所を $p-m$ で置き換えたものも全く同様に計算されますから、それら２つの結果を足し合わせて

$$\psi\left(\frac{m}{p}\right)+\psi\left(\frac{p-m}{p}\right)=-2\gamma-2\log p+2\sum_{n=1}^{p-1}\cos\frac{2\pi mn}{p}\log(1-\xi^n)$$

となります。

ここで左辺は実数値関数ですから、右辺も実数値関数であり、

$$\begin{aligned}\Re(\log(1-\omega^n))&=\log|1-\omega^n|\\&=\log\left|\left(1-\cos\frac{2\pi n}{p}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi n}{p}\right|^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}\log\left(2-2\cos\frac{2\pi n}{p}\right)\\&=\log\left(2\sin\frac{\pi n}{p}\right)\end{aligned}$$

と変形されますから

$$\psi\left(\frac{m}{p}\right)+\psi\left(\frac{p-m}{p}\right)=-2\gamma-2\log p+2\sum_{n=1}^{p-1}\cos\left(\frac{2\pi mn}{p}\right)\log\left(2\sin\frac{\pi n}{p}\right)\tag{3.3}$$

が得られます。

その一方で Euler の相反公式によれば

$$\psi\left(\frac{m}{p}\right)-\psi\left(\frac{p-m}{p}\right)=-\pi\cot\frac{m\pi}{p}\tag{3.4}$$

ですから、(3.3) と (3.4) を足し合わせれば

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{m}{p}\right)&=-\gamma-\frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{p}-\log p+\sum_{n=1}^{p-1}\cos\frac{2\pi mn}{p}\log\left(2\sin\frac{\pi n}{p}\right)\\&=-\gamma-\log(2p)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{p}+2\sum_{k=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]-1}\cos\frac{2\pi mk}{p}\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)\end{aligned}$$

が得られます。

Digamma 関数の級数表示（3.1）は、z が有理数 $0<q<1$ であるときは、今見た有理数での値を使って

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{q+k}\right)-\frac{1}{q}=-\log(2p)-\frac{\pi}{2}\cot q\pi+2\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\cos(2\pi qk)\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)$$

と書くことが出来ます（ただし、p は $q=\frac{m}{p}$ の分母です）。$\frac{1}{k}$ の和も、$\frac{1}{q+k}$ の和もどちらも単独では発散しますが、その差はこの様に書けていると云うわけです。

同様の事は $0<m_1<m_2<p$ のときに

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}=\frac{1}{(m_2-m_1)p}\left\{\Psi\left(\frac{m_2}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\right\}$$

と書けたことを思い出せば、有理数での digamma 関数の値：

$$\Psi\left(\frac{m}{p}\right)=-\gamma-\log(2p)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{p}+2\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\cos\frac{2\pi mk}{p}\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)$$

を使って

$$\begin{aligned}&\Psi\left(\frac{m_2}{p}\right)-\Psi\left(\frac{m_1}{p}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p}-\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)+2\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\left(\cos\frac{2\pi m_2k}{p}-\cos\frac{2\pi m_1k}{p}\right)\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)\end{aligned}$$

と書けることを使って

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{pk+m_1}-\frac{1}{pk+m_2}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_2-m_1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}\\&=\frac{\pi}{2p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p}-\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\left(\cos\frac{2\pi m_2k}{p}-\cos\frac{2\pi m_1k}{p}\right)\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)\end{aligned}$$

が得られます。

あるいはまた、

$$\begin{aligned}\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{pk-m_1)(pk-m_2)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\{pk+(p-m_1)\}\{pk+(p-m_2)\}}\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{m_2-m_1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}\\&=\frac{\pi}{2p}\left(\cot\frac{(p-m_1)\pi}{p}-\cot\frac{(p-m_2)\pi}{p}\right)\\&\qquad+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\left(\cos\frac{2\pi(p-m_2)k}{p}-\cos\frac{2\pi(p-m_1)k}{p}\right)\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)\\&=\frac{\pi}{2p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p}-\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)\\&\qquad-\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\left(\cos\frac{2\pi m_2k}{p}-\cos\frac{2\pi m_1k}{p}\right)\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)\end{aligned}$$

となり、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_2-m_1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}$$
$$=\frac{\pi}{2p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p}-\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\left(\cos\frac{2\pi m_2 k}{p}-\cos\frac{2\pi m_1 k}{p}\right)\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)$$

$$\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{m_2-m_1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}$$
$$=\frac{\pi}{2p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p}-\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)-\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]-1}\left(\cos\frac{2\pi m_2 k}{p}-\cos\frac{2\pi m_1 k}{p}\right)\log\left(\sin\frac{\pi k}{p}\right)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{m_2-m_1}{(pk+m_1)(pk+m_2)}=\frac{\pi}{p}\left(\cot\frac{m_1\pi}{p}-\cot\frac{m_2\pi}{p}\right)$$

が得られます。

3.8　Digamma 関数の積分表示

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k(k+z)}\\&=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+k)(1+z+k)}\\&=z\frac{1}{1+z-1}\int_0^1\frac{x^{1-1}-x^{1+z-1}}{1-x}dx\\&=\int_0^1\frac{1-x^z}{1-x}dx\end{aligned}$$

である事と

$$\begin{aligned}\Psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)\\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)=\Psi(z)+\gamma+\frac{1}{z}\end{aligned}$$

によれば digamma 関数の積分表示：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right)=\Psi(z)+\gamma+\frac{1}{z}=\int_0^1\frac{1-x^z}{1-x}dx$$

が得られます。

$$\Psi(z)+\frac{1}{z}=\Psi(z+1)$$

によれば

$$\begin{aligned}\Psi(z+1)+\gamma&=\int_0^1\frac{1-x^z}{1-x}dx\\ \Psi(z)+\gamma&=\int_0^1\frac{1-x^{z-1}}{1-x}dx\end{aligned}$$

とも書く事が出来ます。これは変数変換 $x=\mathrm{e}^{-t}$ によって

$$\Psi(z)+\gamma=\int_1^0\frac{1-\mathrm{e}^{(-t)(z-1)}}{1-\mathrm{e}^{-t}}(-1)\mathrm{e}^{-t}dt=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}dt$$

となります。

あるいはこれは

$$\begin{aligned}\Psi(z)&=\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)dt\\ \gamma=-\Psi(1)&=-\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^t}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)dt\end{aligned}$$

からも得られるでしょう。

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1-x^q}{1-x}dx&=\int_1^0\frac{1-(1-y)^q}{y}(-dy)\\&=\int_0^1\frac{1-(1-y)^q}{y}dy\\&=\int_0^1\frac{1-\left\{1-qy+\frac{q(q-1)}{2}y^2-\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}y^3+\cdots\right\}}{y}dy\\&=\int_0^1\left\{q-\frac{q(q-1)}{2}y+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}y^2-\cdots\right\}dy\\&=\left[qy-\frac{q(q-1)}{2\cdot2!}y^2+\frac{q(q-1)(q-2)}{3\cdot3!}y^3-\cdots\right]_0^1\\&=q-\frac{q(q-1)}{2\cdot2!}+\frac{q(q-1)(q-2)}{3\cdot3!}-\cdots\end{aligned}$$