目 次

Poncelet の定理と Cayley の条件

0　趣旨　-目的地まで高速道路が通っているのは知っているが、風景を楽しみながら下道をのんびり行く話-

Poncelet の閉形定理は、空間的に対称性のない 2 次曲線同士の場合にも（ひとたび Poncelet 多角形が存在すれば）任意の点を通る Poncelet 多角形が存在することを主張します。しかもこの性質は具体例においては初等計算によって容易に確認することができますから、（射影幾何など全く知らない）初学者にとっても思わず背後にある『何か』を感じずにはいられない身近な偉大な定理と言えるでしょう。

初学者にとっては、定理の証明以前にまずは計算可能な具体例において自らの手で計算して確かめることが特に重要であり、その中から一般論への欲求・端緒が立ち上がってくるものと思われます。

発端は、幾何学的な条件を方程式で記述した果てに、意外にも解と係数の一種の交換関係によってあっさり主張が証明される様子を、計算の練習問題として学生に自分の手で経験してもらおうという意図のもと、Poncelet 三角形が存在するような具体例を（練習問題作りのために）探し始めたことでした。

随分昔になりますが、この頃私は Cayley の条件が存在することすら知りませんでした。もし知っていたら、条件を適用すれば良い話なので、ここに書かれているような探索は行われなかったかも知れません。しかし幸いにも（！）条件を知らないわけですから探索するしかなかったのです。

幾つかの具体例がまず同心円の場合に、あるいは放物線の内部に円がある場合等に得られましたが、そうなってくると当然『双曲線が関与する例も欲しい』『２放物線の例が欲しい』などとわがままな欲求が募って参ります。そこで様々な 2 次曲線の組み合わせでの具体例を探索している最中に、実は十分条件があるのだということを知ります。Cayley の条件がそれです。もちろん、『まあ、何かしらあるだろうな』とは思っていましたが、残念ながらこれは探索を中止する契機にはなりませんでした。条件が分かってるんだから、わざわざ探索する必要がないのにもかかわらず、です。つまり、私は、探索の楽しさを知ってしまったということでしょう。そしてついでに、Cayley の条件という射影幾何・代数幾何の難しそうな判定条件を理解するための糸口も掴めたら良いのではないかという甘い観測をもって、更に本格的に Poncelet 三角形が存在する条件を考え始めたというわけなのです。

もちろん贅沢を言えば、三角形に止まらず四角形あるいはそれ以上の場合の具体例も得られるに越したことはありませんが、まあ、とりあえずは三角形に絞って探します。

1　大定理

定理 1.1 [Pncelet の閉形定理 **]**　２つの 2 次曲線 Q_1, Q_2 に対して Q_1 に内接し Q_2 に外接する n 角形が存在すれば、Q_1 上の（ほぼ）任意の点を 1 つの頂点とする同様の内接・外接 n 角形が存在します。

定理 1.2 [Cayley の条件 **]**　斉次座標で表された２つの 2 次曲線 Q_1, Q_2 に対して、

$$\sqrt{\det(tQ_1 - Q_2)} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

と展開した係数を $\{c_j\}$ として、Hankel 行列式 $H(k, n)$ を次で定めます：

$$H(k,n) = \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+n-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \cdots & c_{k+n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k+n-1} & c_{k+n} & \cdots & c_{k+2n-2} \end{vmatrix}, \quad (k = 2, 3)$$

(i) $n = 2m + 1$ のとき、Q_1 に内接し Q_2 に外接する n 角形が存在する必要十分条件は $H(2, m) = 0$.

(ii) $n = 2m + 2$ のとき、Q_1 に内接し Q_2 に外接する n 角形が存在する必要十分条件は $H(3, m) = 0$.

2　具体例を集める

基本的なスタンスとして、Poncelet の閉形定理が成立することは認めます。従ってある 1 つの点から出発して 3 回で戻って来れば、任意の点からの出発でも同様であることは自明とします。従って 3 回で戻って来るような特別な場合を手掛かりにすることになります。

Cayley の条件は（もちろん）使いませんが、参考・確認として触れることはあるで

しょう。初等的な計算から出発して、少しでも Cayley の条件の理解に近づければと、考えています。

2.1 双曲線から円に接線を引く問題

2.1.1 交わりのある場合

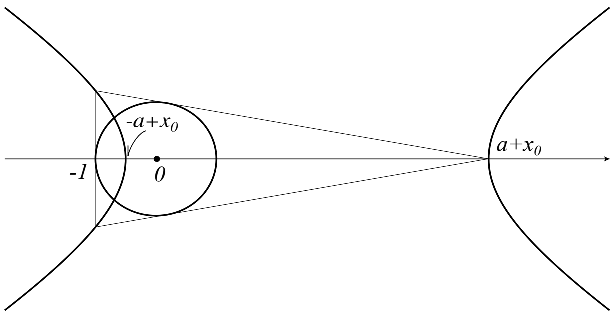
簡単のために、軸が一致している場合のみ考えます。

研究課題 **1**

$$\text{双曲線：}\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \underbrace{-1<-a+x_0<1}_{\text{双曲線と円が交わるための条件}}$$

$$\text{単位円：}\quad x^2+y^2=1$$

双曲線上の点から単位円に接線を引いて３回で戻って来るのはどう云う場合でしょうか。a, b, x_0 の関係式を求めてみましょう。



Poncelet 三角形が存在するのであれば、任意の点 (ある程度除外点はあるでしょうが) を頂点とする Poncelet 三角形が存在するわけですから、対称性の高い特別な三角形に注目すれば良く、上図のような特別な場合を考えれば良いでしょう。

双曲線上の $x=-1$ に対応した点は

$$\begin{aligned}
\frac{(-1-x_0)^2}{a^2}-1&=\frac{y^2}{b^2}\\
b^2\left\{\frac{(x_0+1)^2}{a^2}-1\right\}&=y^2\\
\frac{b^2}{a^2}\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\}&=y^2\\
y&=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}
\end{aligned}$$

です。この 2 点を結ぶ線分は単位円に接しています。あとはこの 2 点をそれぞれ点 $(a+x_0,0)$ と結んだ線分が単位円に接する条件を考えます (対称性から一方で OK です)。

2 点 $(a+x_0,0)$、$\left(-1,-\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}\right)$ を結ぶ直線は

$$\begin{aligned}
y&=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}}{a+x_0+1}(x-a-x_0)\\
(a+x_0+1)y&=\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}(x-a-x_0)
\end{aligned}$$

から、

$$\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}x-(a+x_0+1)y-\frac{b}{a}(a+x_0)\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}=0$$

ですので、これが単位円と接する条件は

$$\begin{aligned}
\frac{b^2}{a^2}\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\}+(a+x_0+1)^2&=\frac{b^2}{a^2}(a+x_0)^2\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\}\\
(a+x_0+1)^2&=\frac{b^2}{a^2}\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\}\left\{(a+x_0)^2-1\right\}\\
&=\frac{b^2}{a^2}(x_0+1+a)(x_0+1-a)(a+x_0+1)(a+x_0-1)\\
a^2&=b^2(a+x_0-1)(-a+x_0+1)\\
a^2&=b^2\left\{x_0^2-(a-1)^2\right\}\\
a^2+b^2(a-1)^2&=b^2x_0^2\\
\frac{a^2}{b^2}+(a-1)^2&=x_0^2
\end{aligned}$$

です。 □

事実 2.1 [双曲線から円へ（交わる場合） **]**

$$\text{双曲線：}\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \underbrace{-1<-a+x_0<1}_{\text{双曲線と円が交わるための条件}}$$

$$\text{単位円：}\quad x^2+y^2=1$$

双曲線上の点から単位円に接線を引いて３回で戻って来るための条件は

$$\frac{a^2}{b^2}+(a-1)^2=x_0^2$$

です。

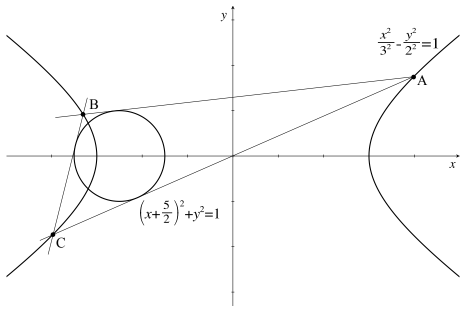
例えば

$$a=3,\quad b=2,\quad x_0=\frac{5}{2},\quad \text{あるいは}\quad a=1,\quad b=1,\quad x_0=1$$

なら良いでしょう。最初の例題では、単位円の方を平行移動しています：

具体例検証 1 双曲線 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$ 上の点 A から円 $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2=1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度双曲線と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円に接線を引き（さっきとは別の接線にします)、また双曲線と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は円の外部にあるとします。



【特殊な点について】いつも３本の接線が順に引けるのでしょうか。つまり、接点が双曲線との（もう一つの）交点になってしまい、そこから２本目の接線が引けなくなってしまう（今引いたものしかない）ようなことはあるのでしょうか？

双曲線と円の交点を求めます。

$$\begin{cases}\frac{4}{9}x^2-y^2=4\\ \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2=1\end{cases}$$

連立方程式を解けば

$$\begin{aligned}\frac{4}{9}x^2+\left(x+\frac{5}{2}\right)^2&=5\\ \frac{13}{9}x^2+5x+\frac{5}{4}&=0\\ x^2+\frac{45}{13}x+\frac{45}{52}&=0\end{aligned}$$

から $x=-\frac{45}{26}\pm\frac{12\sqrt{10}}{26}$ が得られますが、プラスの方は該当しませんので $x=-\frac{45+12\sqrt{10}}{26}$ です。このとき y-座標は円の方程式に代入して

$$\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26}+\frac{5}{2}\right)^2+y^2=1$$

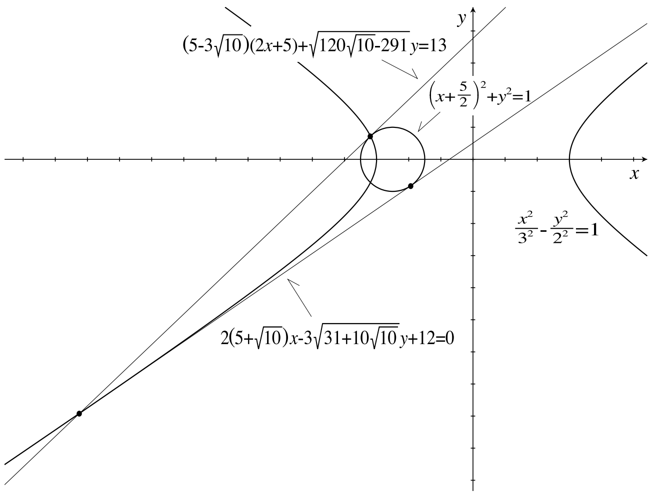
から

$$\begin{aligned}y^2&=1-\left(\frac{12\sqrt{10}-20}{26}\right)^2=\frac{120\sqrt{10}-291}{13^2}\\ y&=\pm\frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}\end{aligned}$$

ですから、交点は

$$\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26},\pm\frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}\right)$$

です。



次にこの点における円の接線がまた双曲線と交わる点を求めます。

点 $\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26}, \frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}\right)$ における接線は

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26}+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}y &= 1\\
\frac{20-12\sqrt{10}}{26}\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}y &= 1\\
\frac{5-3\sqrt{10}}{13}(2x+5)+\frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}y &= 1\\
(5-3\sqrt{10})(2x+5)+\sqrt{120\sqrt{10}-291}y &= 13
\end{aligned}$$

であり、双曲線との交点を求めると

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{9}\left(120\sqrt{10}-291\right)x^2-\left\{13-\left(5-3\sqrt{10}\right)(2x+5)\right\}^2\\
&\quad= 4\left(120\sqrt{10}-291\right)\\
&4\left(120\sqrt{10}-291\right)x^2-9\left\{\left(6\sqrt{10}-10\right)x+15\sqrt{10}-12\right\}^2\\
&\quad= 36\left(120\sqrt{10}-291\right)\\
&4\left(120\sqrt{10}-291\right)x^2\\
&\qquad-9\left\{\left(6\sqrt{10}-10\right)^2x^2+2\left(15\sqrt{10}-12\right)\left(6\sqrt{10}-10\right)x+\left(15\sqrt{10}-12\right)^2\right\}^2\\
&\quad= 36\left(120\sqrt{10}-291\right)\\
&4\left(120\sqrt{10}-291\right)x^2-9\left\{\left(460-120\sqrt{10}\right)x^2+2\left(1020-222\sqrt{10}\right)x+\left(2394-360\sqrt{10}\right)\right\}\\
&\quad= 36\left(120\sqrt{10}-291\right)\\
&0=(13\cdot120\sqrt{10}-5304)x^2-9\cdot2\left(1020-222\sqrt{10}\right)x-11070-1080\sqrt{10}\\
&\quad=13\cdot4\cdot6(5\sqrt{10}-17)x^2-9\cdot6\cdot2(170-37\sqrt{10})x-10\cdot9\cdot3(41+4\sqrt{10})\\
&\quad=13\cdot4(5\sqrt{10}-17)x^2-9\cdot2(170-37\sqrt{10})x-5\cdot9(41+4\sqrt{10})\\
&\quad=13\cdot4x^2+6\frac{(1040+221\sqrt{10})}{13}x+5\cdot3\frac{(897+273\sqrt{10})}{13}\\
&\quad=26^2x^2+6\cdot13(80+17\sqrt{10})x+5\cdot3(897+273\sqrt{10})\\
&\quad=26^2x^2+6\cdot13(80+17\sqrt{10})x+13\cdot3(45+12\sqrt{10})(5+\sqrt{10})\\
&\quad=26^2x^2+26^2\frac{240+51\sqrt{10}}{26}x+26^2\frac{45+12\sqrt{10}}{26}\frac{15+3\sqrt{10}}{2}\\
&\quad=26^2\left(x+\frac{45+12\sqrt{10}}{26}\right)\left(x+\frac{15+3\sqrt{10}}{2}\right)
\end{aligned}$$

から、もう 1 点の x-座標は $-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}$ であることが分かります。

この点の y-座標は

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{4}{9}x^2-4\\
&= \frac{4}{9}\frac{(15+3\sqrt{10})^2}{4}-4\\
&= 35+10\sqrt{10}-4\\
&= 31+10\sqrt{10}\\
y &= \pm\sqrt{31+10\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

のうちマイナスの方であり、交点は $\left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}, -\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right)$ です。

この点における双曲線の接線は

$$\frac{4}{9}\left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2}\right)x-\left(-\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right)y=4$$
$$-2(15+3\sqrt{10})x+9\sqrt{31+10\sqrt{10}}y=36$$
$$-2(5+\sqrt{10})x+3\sqrt{31+10\sqrt{10}}y=12$$
$$2(5+\sqrt{10})x-3\sqrt{31+10\sqrt{10}}y+12=0$$

ですから、この接線と円の中心 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ との距離を測ると、

$$\begin{aligned}\frac{\left|2(5+\sqrt{10})\left(-\frac{5}{2}\right)+12\right|}{\sqrt{4(5+\sqrt{10})^2+9(31+10\sqrt{10})}}&=\frac{13+5\sqrt{10}}{\sqrt{4(35+10\sqrt{10})+279+90\sqrt{10}}}\\&=\frac{13+5\sqrt{10}}{\sqrt{419+130\sqrt{10}}}\\&=\frac{13+5\sqrt{10}}{\sqrt{(13+5\sqrt{10})^2}}\\&=1\end{aligned}$$

となっており、この接線は円にも接している（共通接線）ことが分かります。

このような場合には問題が言うような３本の接線を引くことは出来ませんので、そのような場合は除外することにします。

具体的には、点 A としては $\left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2},-\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right)$ と対称点である点 $\left(-\frac{15+3\sqrt{10}}{2},+\sqrt{31+10\sqrt{10}}\right)$ は除外しておきます。

双曲線の右半分からは円と双曲線の共通接線は引けないことに注意します。この円は双曲線の漸近線と交わっていません。従って双曲線の右半分の上の点における双曲線の接線は円と交わることは（接することも）ありません。また、双曲線の左半分と円の共通接線は先に見たように２本存在しますが、(漸近線の中に入らないので）これが双曲線の右半分と交わることもありません。

また、点 A は円の外部の点としてあるので、そもそも円と双曲線の交点 $\left(-\frac{45+12\sqrt{10}}{26},\pm\frac{\sqrt{120\sqrt{10}-291}}{13}\right)$ から始めることは考えていません。

【一般的な点について】双曲線のパラメータ表示：

$$x=3\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad y=2\frac{2t}{1-t^2},\qquad t\neq\pm1$$

を使って、3 点 A,B,C を

$$A\left(\frac{3(1+a^2)}{1-a^2},\frac{4a}{1-a^2}\right),\quad B\left(\frac{3(1+b^2)}{1-b^2},\frac{4b}{1-b^2}\right),\quad C\left(\frac{3(1+c^2)}{1-c^2},\frac{4c}{1-c^2}\right)$$

と置きます（このパラメータ表示では双曲線上の点 $(-3,0)$ は表せませんが、これは円の内部ですから問題ありません）。

直線 AB の式は

$$\left(\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}-\frac{3(1+b^2)}{1-b^2}\right)\left(y-\frac{4a}{1-a^2}\right)=\left(\frac{4a}{1-a^2}-\frac{4b}{1-b^2}\right)\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)$$
$$3\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}-\frac{1+b^2}{1-b^2}\right)\left(y-\frac{4a}{1-a^2}\right)=4\left(\frac{a}{1-a^2}-\frac{b}{1-b^2}\right)\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)$$
$$3\left\{(1+a^2)(1-b^2)-(1+b^2)(1-a^2)\right\}\left(y-\frac{4a}{1-a^2}\right)$$
$$=4\left\{a(1-b^2)-b(1-a^2)\right\}\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)$$
$$6(a-b)(a+b)\left(y-\frac{4a}{1-a^2}\right)=4(a-b)(1+ab)\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)$$
$$3(a+b)\left(y-\frac{4a}{1-a^2}\right)=2(1+ab)\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)$$
$$3(a+b)y-\frac{12a(a+b)}{1-a^2}=2(1+ab)x-\frac{6(1+ab)(1+a^2)}{1-a^2}$$

から

$$2(1+ab)x-3(a+b)y+6\left\{\frac{2a(a+b)-(1+ab)(1+a^2)}{1-a^2}\right\}=0$$
$$2(1+ab)x-3(a+b)y+6\left\{\frac{a^2+ab-1-a^3b}{1-a^2}\right\}=0$$
$$2(1+ab)x-3(a+b)y+6(ab-1)=0$$

となります。

従って直線 AB が円と接する条件は

$$\left|2(1+ab)\left(-\frac{5}{2}\right)+6(ab-1)\right|=\sqrt{4(1+ab)^2+9(a+b)^2}$$
$$(ab-11)^2=4(1+ab)^2+9(a+b)^2$$

となります。

全く同様にして、直線 BC が円と接する条件は

$$(bc-11)^2 = 4(1+bc)^2 + 9(b+c)^2$$

になり、これらを合わせると２次方程式：

$$(bX-11)^2 = 4(bX+1)^2 + 9(X+b)^2$$

すなわち

$$(3b^2+9)X^2 + 48bX + 9b^2 - 117 = 0$$

の２つの解が a, c であることが分かりますから、解と係数の関係によって

$$a+c = -\frac{48b}{3b^2+9}, \qquad ac = \frac{9b^2-117}{3b^2+9}$$

が分かります。すると、

$$\begin{aligned}
4(1+ac)^2 + 9(a+c)^2 &= 4\left(1+\frac{9b^2-117}{3b^2+9}\right)^2 + 9\cdot\frac{48^2b^2}{(3b^2+9)^2} \\
&= 4\left(\frac{12b^2-108}{3b^2+9}\right)^2 + 4\cdot 4\frac{12b^2\cdot 108}{(3b^2+9)^2} \\
&= 4\left(\frac{12b^2+108}{3b^2+9}\right)^2 \\
&= \left(\frac{24b^2+216}{3b^2+9}\right)^2 \\
&= (ac-11)^2
\end{aligned}$$

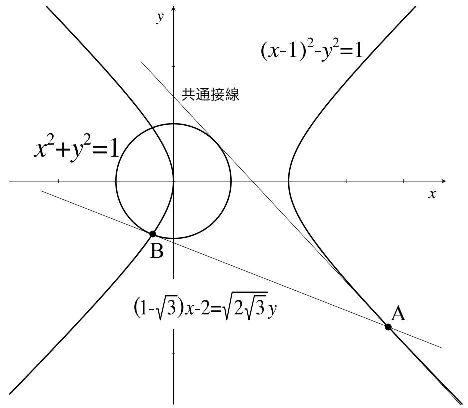
が得られ、これは直線 CA がまた円に接することを示しています。

以上から題意は証明されました。 □

具体例検証 2 双曲線 $(x-1)^2 - y^2 = 1$ 上の点 A から円 $x^2+y^2=1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度双曲線と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円に接線を引き（さっきとは別の接線にします）、また双曲線と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は円の外部にあるとします。

【特殊な点について】図のように点 A から円に伸ばした接線の接点が双曲線上にある場合は、点 A からのもう１本の接線が共通接線になっているような特別な場合です。この場合は次の接線を引くことが出来ませんので除外しておきます。



また、双曲線の接線の存在範囲を考えれば分かるように、双曲線の左半分から円への共通接線は存在しません。

この特別な場合を具体的に明らかにしておきましょう。円と双曲線の交点は $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$ の２点であり、このうち $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$ での円の接線は

$$(1-\sqrt{3})x - \sqrt{2\sqrt{3}}y = 2$$

です。

この接線と双曲線の交点を調べると

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{(1-\sqrt{3})x-2\right\}^2 &= 1 \\
(x-1)^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{(4-2\sqrt{3})x^2 - 4(1-\sqrt{3})x + 4\right\} &= 1 \\
2\sqrt{3}(x^2-2x+1) - (4-2\sqrt{3})x^2 + 4(1-\sqrt{3})x - 4 &= 2\sqrt{3} \\
(4\sqrt{3}-4)x^2 + (4-8\sqrt{3})x - 4 &= 0 \\
(\sqrt{3}-1)x^2 + (1-2\sqrt{3})x - 1 &= 0 \\
\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left\{(\sqrt{3}-1)x - (1+\sqrt{3})\right\} &= 0
\end{aligned}$$

から、$x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ に対応する点以外のものは

$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$$

に対応する点です。この点の y 座標は

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3}-1)^2 - y^2 &= 1\\ 3+2\sqrt{3} &= y^2\\ y &= \pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

から点 $(2+\sqrt{3}, -\sqrt{3+2\sqrt{3}})$ です。

この点における双曲線の接線は

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3}-1)(x-1) - \left(-\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right) y &= 1\\ (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3+2\sqrt{3}}y - \sqrt{3} - 2 &= 0\end{aligned}$$

であり、この直線と原点の距離を見ると

$$\frac{|-\sqrt{3}-2|}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (3+2\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{7+3\sqrt{3}}} = 1$$

となっているので、これは単位円に接しています。

【一般的な点について】双曲線上かつ円の外部の異なる 3 点 A, B, C がいずれも上で注意した除外点でない場合に考えます。

双曲線上の有理形パラメータ表示を使って 3 点を

$$A\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}+1, \frac{2a}{1-a^2}\right),\quad B\left(\frac{1+b^2}{1-b^2}+1, \frac{2b}{1-b^2}\right),\quad C\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}+1, \frac{2c}{1-c^2}\right)$$

と置きます。

直線 AB の式は

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1+b^2}{1-b^2}\right)\left(y - \frac{2a}{1-a^2}\right)&\\ = \left(\frac{2a}{1-a^2} - \frac{2b}{1-b^2}\right)&\left(x - \frac{1+a^2}{1-a^2} - 1\right)\\ \{(1+a^2)(1-b^2) - (1+b^2)(1-a^2)\}\left(y - \frac{2a}{1-a^2}\right)&\\ = 2\{a(1-b^2) - b(1-a^2)\}&\left(x - \frac{2}{1-a^2}\right)\\ 2(a^2-b^2)\left(y - \frac{2a}{1-a^2}\right) &= 2(a-b)(1+ab)\left(x - \frac{2}{1-a^2}\right)\\ (a+b)\left(y - \frac{2a}{1-a^2}\right) &= (1+ab)\left(x - \frac{2}{1-a^2}\right)\\ 0 &= (1+ab)x - (a+b)y - 2\end{aligned}$$

ですからこれが円に接する条件は

$$\begin{aligned}1 &= \frac{|-2|}{\sqrt{(1+ab)^2 + (a+b)^2}}\\ (1+ab)^2 + (a+b)^2 &= 4\end{aligned}$$

です。

全く同様に直線 BC が円に接する条件は

$$(1+bc)^2 + (b+c)^2 = 4$$

となりますから、これらを合わせると 2 次方程式：

$$\begin{aligned}0 &= (1+bX)^2 + (X+b)^2 - 4\\ &= (b^2+1)X^2 + 4bX + b^2 - 3\end{aligned}$$

が異なる 2 解 a, c をもつことが分かります。すると解と係数の関係から

$$a + c = -\frac{4b}{b^2+1},\qquad ac = \frac{b^2-3}{b^2+1}$$

ですから、

$$
\begin{aligned}
(1+ca)^2+(c+a)^2 &= \left(1+\frac{b^2-3}{b^2+1}\right)^2+\frac{16b^2}{(b^2+1)^2} \\
&= 4\frac{(b^2-1)^2+4b^2}{(b^2+1)^2} \\
&= 4\frac{(b^2+1)^2}{(b^2+1)^2} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

が得られることになりますが、これはまさに直線 CA が円に接する条件に他なりませんから、結局３回で元に戻ってくることが分かりました。

□

2.1.2　交わりのない場合

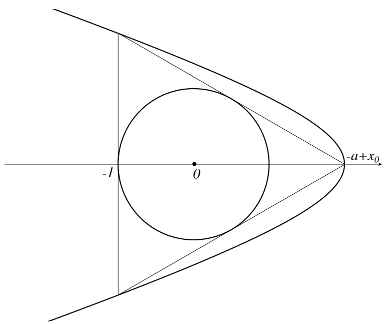
研究課題 2

$$
\text{双曲線：}\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \underbrace{x_0\ \text{は十分大きい}}_{\text{双曲線の『中』に円が入るための条件}}
$$

$$
\text{単位円：}\quad x^2+y^2=1
$$

双曲線上の点から単位円に接線を引いて３回で戻って来るのはどう云う場合でしょうか。a, b, x_0 の関係式を求めてみましょう。

下図のような特別な場合を考えれば良いでしょう。



双曲線上の $x=-1$ に対応した点は

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1-x_0)^2}{a^2}-1 &= \frac{y^2}{b^2} \\
b^2\left\{\frac{(x_0+1)^2}{a^2}-1\right\} &= y^2 \\
\frac{b^2}{a^2}\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\} &= y^2 \\
y &= \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}
\end{aligned}
$$

です。この 2 点を結ぶ線分は単位円に接しています。あとはこの 2 点をそれぞれ点 $(-a+x_0, 0)$ と結んだ線分が単位円に接する条件を考えます（対称性から一方で OK です）。

2 点 $(-a+x_0, 0)$、$\left(-1, -\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}\right)$ を結ぶ直線は

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}}{-a+x_0+1}(x+a-x_0) \\
(-a+x_0+1)y &= \frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}(x+a-x_0)
\end{aligned}
$$

から、

$$
\frac{b}{a}\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}x-(x_0+1-a)y+\frac{b}{a}(a-x_0)\sqrt{(x_0+1)^2-a^2}=0
$$

ですので、これが単位円と接する条件は

$$
\begin{aligned}
\frac{b^2}{a^2}\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\}+(x_0+1-a)^2 &= \frac{b^2}{a^2}(a-x_0)^2\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\} \\
(x_0+1-a)^2 &= \frac{b^2}{a^2}\left\{(x_0+1)^2-a^2\right\}\left\{(a-x_0)^2-1\right\} \\
&= \frac{b^2}{a^2}(x_0+1+a)(x_0+1-a)(a-x_0+1)(a-x_0-1) \\
a^2 &= b^2(a+x_0+1)(-a+x_0-1) \\
a^2 &= b^2\left\{x_0^2-(a+1)^2\right\} \\
\frac{a^2}{b^2}+(a+1)^2 &= x_0^2
\end{aligned}
$$

です。

□

事実 2.2 [双曲線から円へ（交わらない場合）]

$$
\text{双曲線：}\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \underbrace{x_0\ \text{は十分大きい}}_{\text{双曲線の『中』に円が入るための条件}}
$$

$$
\text{単位円：}\quad x^2+y^2=1
$$

双曲線上の点から単位円に接線を引いて３回で戻って来るための条件は

$$
\frac{a^2}{b^2}+(a+1)^2=x_0^2
$$

です。

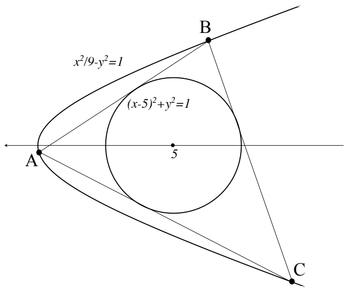
例えば

$$a = 3, \quad b = 1, \quad x_0 = 5$$

なら良いでしょう。下の例題では円の方を平行移動しています：

具体例検証 3 双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - y^2 = 1$ 上の点 A から円 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度双曲線と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円に接線を引き（さっきとは別の接線にします）、また双曲線と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。



【3 点 A, B, C が点 $(-3, 0)$ を含む場合】 点 A が $(-3, 0)$ である場合を考えて 3 回で戻って来れば十分です。

点 A を通る直線 $y = k(x+3)$ が円 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ に接すると仮定すると、

$$(x-5)^2 + k^2(x+3)^2 = 1$$
$$(k^2+1)x^2 + (6k^2-10)x + 9k^2 + 24 = 0$$

は重解でなければなりませんから、判別式から

$$(3k^2-5)^2 - (k^2+1)(9k^2+24) = 0$$
$$1 = 63k^2$$

となって $k = \pm\frac{1}{\sqrt{63}}$ が分かります。

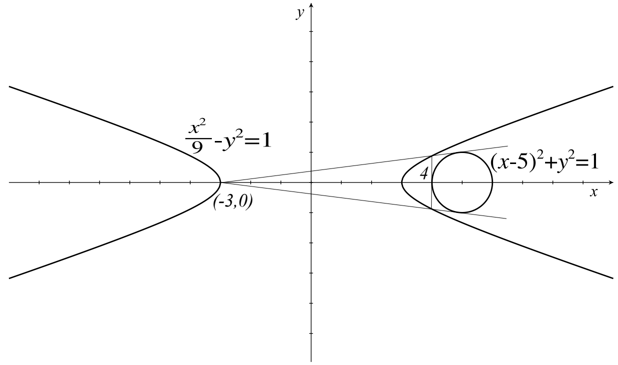
このとき接線 $y = \frac{1}{\sqrt{63}}(x+3)$ と双曲線のもう一つの交点は、連立方程式：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - y^2 = 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{63}}(x+3) \end{cases}$$

を解いて、

$$\frac{x^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{63} = 1$$
$$7x^2 - (x+3)^2 = 63$$
$$6x^2 - 6x - 72 = 0$$
$$(x+3)(x-4) = 0$$

から $x = 4$ に対応する点 $\left(4, \frac{7}{\sqrt{63}}\right)$ です。



対称性によれば、点 $(-3, 0)$ からのもう 1 本の接線と双曲線の交点は $\left(4, -\frac{7}{\sqrt{63}}\right)$ であって、これら 2 点を結ぶ直線は明らかに円に接しています。従って、点 $(-3, 0)$ から始めた場合には 3 回で元に戻ることが分かりました。

【3 点 A, B, C がいずれも点 $(-3, 0)$ でない場合】 上の計算から、この場合は 3 点の x-座標が 4 になることはなく、これは a^2, b^2, c^2 のいずれもが $\frac{1}{7}$ とならないことを意味します：

$$\frac{3(1+b^2)}{1-b^2} = 4 \Leftrightarrow 7b^2 = 1.$$

双曲線のパラメータ表示：

$$x = 3\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad t \neq \pm 1$$

を使って、3 点 A, B, C を

$$A\left(\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}, \frac{2a}{1-a^2}\right), \quad B\left(\frac{3(1+b^2)}{1-b^2}, \frac{2b}{1-b^2}\right), \quad C\left(\frac{3(1+c^2)}{1-c^2}, \frac{2c}{1-c^2}\right)$$

と置くことが出来ますから、直線 AB の式は

$$\left\{\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}-\frac{3(1+b^2)}{1-b^2}\right\}\left(y-\frac{2a}{1-a^2}\right)=\left(\frac{2a}{1-a^2}-\frac{2b}{1-b^2}\right)\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&3\left\{(1+a^2)(1-b^2)-(1+b^2)(1-a^2)\right\}\left(y-\frac{2a}{1-a^2}\right)\\
&\qquad\qquad=2\left\{a(1-b^2)-b(1-a^2)\right\}\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)\\
6(a-b)(a+b)\left(y-\frac{2a}{1-a^2}\right)&=2(a-b)(1+ab)\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)\\
3(a+b)\left(y-\frac{2a}{1-a^2}\right)&=(1+ab)\left(x-\frac{3(1+a^2)}{1-a^2}\right)\\
3(a+b)y-\frac{6a(a+b)}{1-a^2}&=(1+ab)x-\frac{3(1+ab)(1+a^2)}{1-a^2}
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
(1+ab)x-3(a+b)y+3\left\{\frac{2a(a+b)-(1+ab)(1+a^2)}{1-a^2}\right\}&=0\\
(1+ab)x-3(a+b)y+3\left\{\frac{a^2+ab-1-a^3b}{1-a^2}\right\}&=0\\
(1+ab)x-3(a+b)y+3(ab-1)&=0
\end{aligned}$$

となります。

従って直線 AB が円と接する条件は

$$\begin{aligned}
|(1+ab)5+3(ab-1)|&=\sqrt{(1+ab)^2+9(a+b)^2}\\
(8ab+2)^2&=(1+ab)^2+9(a+b)^2
\end{aligned}$$

となります。

全く同様にして、直線 BC が円と接する条件は

$$(8bc+2)^2=(1+bc)^2+9(b+c)^2$$

になり、これらを合わせると２次方程式：

$$(8bX+2)^2=(bX+1)^2+9(X+b)^2$$

すなわち

$$(63b^2-9)X^2+12bX+3-9b^2=0 \quad (63b^2-9=9(7b^2-1)\neq 0 \text{ に注意})$$

の２つの解が a, c であることが分かりますから、解と係数の関係によって

$$a+c=-\frac{12b}{63b^2-9},\qquad ac=\frac{3-9b^2}{63b^2-9}$$

が分かります。すると、

$$\begin{aligned}
(1+ac)^2+9(a+c)^2&=\left(1+\frac{3-9b^2}{63b^2-9}\right)^2+9\cdot\frac{12^2b^2}{(63b^2-9)^2}\\
&=\left(\frac{54b^2-6}{63b^2-9}\right)^2+\frac{12^2\cdot 9b^2}{(63b^2-9)^2}\\
&=\left(\frac{54b^2-6}{63b^2-9}\right)^2+4\frac{54\cdot 6b^2}{(63b^2-9)^2}\\
&=\left(\frac{54b^2+6}{63b^2-9}\right)^2\\
&=(8ac+2)^2
\end{aligned}$$

が得られ、これは直線 CA がまた円に接することを示しています。

以上から題意は証明されました。 □

2.2 円から双曲線に接線を引く問題

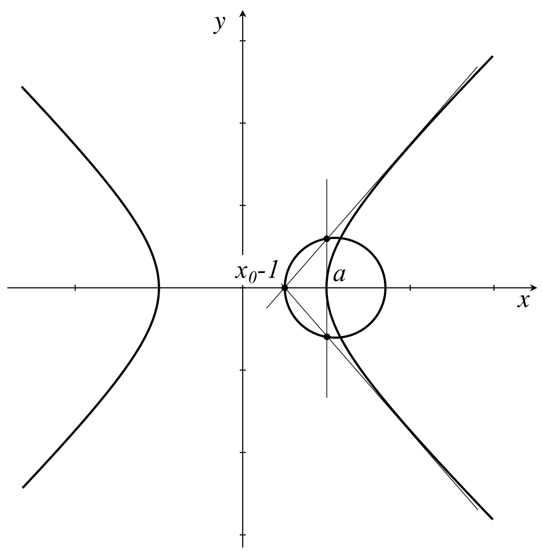
2.2.1 交わる場合（円の内部に双曲線の一部がある場合）

研究課題 3

$$\text{円周：}\quad (x-x_0)^2+y^2=1$$

$$\text{双曲線：}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x_0-1<a<x_0+1$$

円周から双曲線に向かって接線を引いて、3 回で元に戻って来るための条件を求めて下さい。



上の図のような特別な場合を考えます。

$x=a$ に対応する円周上の点は $(a,\pm\sqrt{1-(a-x_0)^2})$ であり、2 点 $(x_0-1,0),(a,\sqrt{1-(a-x_0)^2})$ を通る直線が双曲線に接する条件を調べます。当然、$x_0-1<a<x_0+1$ であるような状況で計算します。

2 点を通る直線の方程式は

$$y=\frac{\sqrt{1-(a-x_0)^2}}{a-x_0+1}(x-x_0+1)$$

ですから、これが双曲線と接する条件は

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}-\frac{\frac{1-(a-x_0)^2}{(a-x_0+1)^2}(x-x_0+1)^2}{b^2}&=1\\
\frac{b^2}{a^2}x^2-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(x-x_0+1)^2&=b^2\\
\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}\right)x^2-2\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)x-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)^2-b^2&=0
\end{aligned}$$

が重解になることであり、それは判別式から

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)\right\}^2-\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}\right)\left\{-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)^2-b^2\right\}&=0\\
\left\{\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)\right\}^2+\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}\right)\left\{\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)^2+b^2\right\}&=0\\
\frac{b^2}{a^2}\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)^2+\frac{b^4}{a^2}-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}b^2&=0\\
\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}(1-x_0)^2+b^2-\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}a^2&=0\\
\frac{1-a+x_0}{1+a-x_0}\{(1-x_0)^2-a^2\}+b^2&=0\\
(1-a+x_0)(1-x_0-a)+b^2&=0\\
(1-a)^2+b^2&=x_0^2
\end{aligned}$$

となります。 □

事実 2.3 [円から双曲線へ（交わる場合）]

$$\text{円周：}\quad (x-x_0)^2+y^2=1$$

$$\text{双曲線：}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x_0-1<a<x_0+1$$

円周から双曲線に向かって接線を引いて、3 回で元に戻って来るための条件は

$$(1-a)^2+b^2=x_0^2$$

です。

例えば $a=5,b=3,x_0=5$ などです。

2.2.2 Cayley の条件

$$\begin{aligned} \text{円周 } C: &\quad (x-x_0)^2+y^2=1 \\ \text{双曲線 } H: &\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x_0-1<a<x_0+1 \end{aligned}$$

それぞれの特性行列は

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & x_0^2-1 \end{pmatrix}, \qquad H=\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= |tC-H| \\ &= \begin{vmatrix} t-b^2 & 0 & -x_0t \\ 0 & t+a^2 & 0 \\ -x_0t & 0 & (x_0^2-1)t+a^2b^2 \end{vmatrix} \\ &= (t-b^2)(t+a^2)\{(x_0^2-1)t+a^2b^2\}-x_0^2t^2(t+a^2) \\ &= (t+a^2)\{-t^2+(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2)t-a^2b^4\} \\ &= -t^3+(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2)t^2 \\ &\qquad +(a^4b^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^2-a^2b^4)t-a^4b^4 \end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned} \Delta(0) &= -a^4b^4 \\ \Delta'(t) &= -3t^2+2(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2)t+a^4b^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^2-a^2b^4 \\ \Delta'(0) &= a^4b^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^2-a^2b^4 \\ \Delta''(t) &= -6t+2(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2) \\ \Delta''(0) &= 2(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2) \end{aligned}$$

であり、$\sqrt{\Delta(t)}$ の Taylor 展開を

$$\sqrt{\Delta(t)}=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$$

としたとき、

$$\begin{aligned} 2c_2 &= -\frac{1}{4}\Delta(0)^{-\frac{3}{2}}\Delta'(0)^2+\frac{1}{2}\Delta(0)^{-\frac{1}{2}}\Delta''(0) \\ &= -\frac{1}{4}\left(-a^4b^4\right)^{-\frac{3}{2}}\left(a^4b^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^2-a^2b^4\right)^2 \\ &\qquad +\frac{1}{2}\left(-a^4b^4\right)^{-\frac{1}{2}}2\left(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2\right) \\ &= -\frac{1}{4i^3}\frac{1}{a^6b^6}\left(a^4b^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^2-a^2b^4\right)^2+\frac{1}{i}\frac{1}{a^2b^2}\left(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2\right) \\ &= \frac{1}{4i(a^2b^2)}\left\{\left(a^2-x_0^2+1-b^2\right)^2+4\left(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2\right)\right\} \end{aligned}$$

となりますから、$c_2=0$ となるのは

$$\begin{aligned} 0 &= \left(a^2-x_0^2+1-b^2\right)^2+4\left(a^2b^2-b^2x_0^2+b^2-a^2\right) \\ &= \left(a^2-x_0^2+1+b^2\right)^2-4a^2 \\ &= \left(a^2-2a+1+b^2-x_0^2\right)\left(a^2+2a+1+b^2-x_0^2\right) \\ &= \left\{(a-1)^2+b^2-x_0^2\right\}\left\{(a+1)^2+b^2-x_0^2\right\} \end{aligned}$$

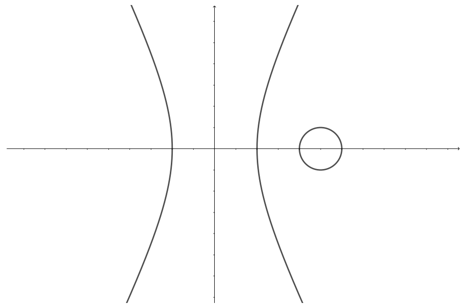
のときとなります。

今考えていた位置関係では $(a+1)^2-x_0^2>0$ ですから第２因子は 0 にならないため、求める条件は

$$(a-1)^2+b^2=x_0^2$$

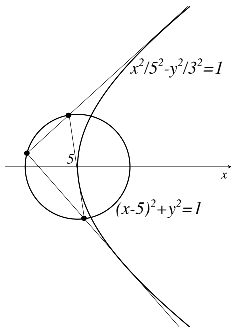
です。

$a=2, b=4, x_0=5$ の場合は今度は第１因子が 0 でなく第２因子が 0 になっていますが、この場合の位置関係は下図の通りであり、円周上の点から双曲線に接線を引くことは出来ません：



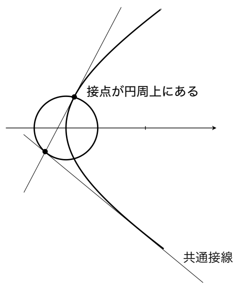
双曲線に接線を引くことができる点は『双曲線と双曲線の間』の領域内の点のみです。

具体例検証 4 円周 $(x-5)^2+y^2=1$ 上の点 A から双曲線 $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ に向かって接線を引き、再び円周と交わった点を B とします。次に今度は点 B から双曲線に接線を引き、再び円周と交わった点を C とします。
このとき、点 C から双曲線に引いた接線は点 A を通ることを示してください。



この円は双曲線の漸近線と交わりませんから、円周上の点から双曲線の左半分に接線を引くことは出来ません。従って双曲線の右半分だけが問題となります。

【特殊な点について】3 点が点 $(4,0)$ を含む場合については、上の予備計算で既に３回で戻って来ることが分かっています。



また、接点が円周上に来る場合もありますが、そのような場合は除外して考えます。これがどのような場合なのか見ておきましょう。
まず円と双曲線の交点を求めます。

$$\begin{cases}(x-5)^2+y^2=1\\ \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$$

双曲線の式から $y^2=\frac{9}{25}x^2-9$ なので、これを円の方程式に代入して

$$\begin{aligned}(x-5)^2+\frac{9}{25}x^2-9&=1\\ \frac{34}{25}x^2-10x+15&=0\\ x^2-\frac{250}{34}x+\frac{15\cdot25}{34}&=0\\ \left(x-\frac{125}{34}\right)^2-\frac{125^2}{34^2}+\frac{15\cdot25\cdot34}{34^2}&=0\\ \left(x-\frac{125}{34}\right)^2&=\frac{15625-12750}{34^2}\\ x&=\frac{125\pm\sqrt{2875}}{34}\end{aligned}$$

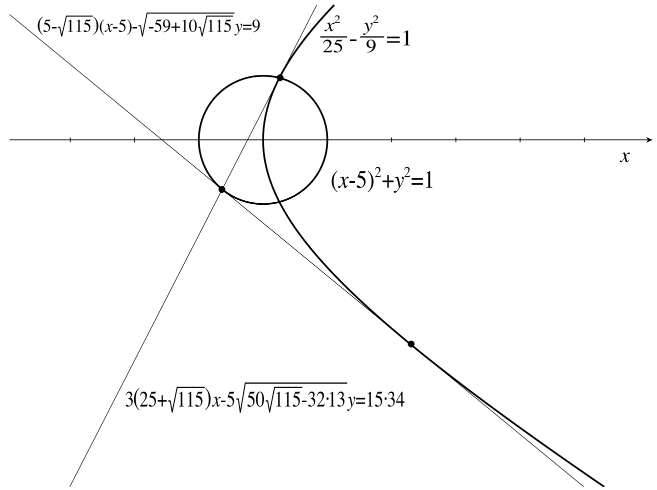
となります。ここで $\frac{125-\sqrt{2875}}{34}\approx 2.1$ であって、円周上にこれを満たす点はないので、交点の x 座標は $\frac{125+\sqrt{2875}}{34}$ です。
　このとき y-座標は

$$\begin{aligned}y^2&=1-(x-5)^2\\ &=1-\left(\frac{125+\sqrt{2875}}{34}-5\right)^2\\ &=1-\left(\frac{-45+5\sqrt{115}}{34}\right)^2\\ &=1-\frac{25}{34^2}(-9+\sqrt{115})^2\\ &=1-\frac{25}{34^2}(196-18\sqrt{115})\\ &=\frac{34^2-25\cdot196+25\cdot18\sqrt{115}}{34^2}\\ &=\frac{1156-4900+25\cdot18\sqrt{115}}{34^2}\\ &=\frac{-3744+25\cdot18\sqrt{115}}{34^2}\end{aligned}$$

から

$$y=\frac{\sqrt{25\cdot18\sqrt{115}-3744}}{34}=\frac{3\sqrt{50\sqrt{115}-32\cdot13}}{34}$$

です。



次に、この点における双曲線の接線を求めると、

$$\frac{1}{25}\left(\frac{125+5\sqrt{115}}{34}\right)x-\frac{1}{9}\left(\frac{3\sqrt{50\sqrt{115}-32\cdot 13}}{34}\right)y=1$$
$$3\left(25+\sqrt{115}\right)x-5\left(\sqrt{50\sqrt{115}-32\cdot 13}\right)y=15\cdot 34$$

なのでこれと円の交点を求めます。

$$\begin{aligned}
1&=(x-5)^2+y^2\\
0&=25\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)(x-5)^2+\{3(25+\sqrt{115})x-15\cdot 34\}^2\\
&\quad-25\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)\\
0&=25\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)(x^2-10x+25)\\
&\quad+\{9(25+\sqrt{115})^2x^2-6\cdot 15\cdot 34(25+\sqrt{115})x+15^2 34^2\}^2\\
&\quad-25\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)\\
&=\left\{25\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)+9(25+\sqrt{115})^2\right\}x^2\\
&\quad\left\{-250\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)-6\cdot 15\cdot 34(25+\sqrt{115})\right\}x\\
&\quad+25^2\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)^2+15^2 34^2-25\left(50\sqrt{115}-32\cdot 13\right)\\
&=(1700\sqrt{115}-3740)x^2+(-15560\sqrt{115}+27500)x+10500+30000\sqrt{115}\\
&=(85\sqrt{115}-187)x^2+(-778\sqrt{115}+1375)x+1525+1500\sqrt{115}
\end{aligned}$$

の２解が $\frac{125+5\sqrt{115}}{34}$ と求める点の x 座標です。

これは解と係数の関係によって

$$\begin{aligned}
x+\frac{125+5\sqrt{115}}{34}&=\frac{778\sqrt{115}-1375}{85\sqrt{115}-187}\\
&=\frac{2825+11\sqrt{115}}{306}\\
x&=\frac{50-\sqrt{115}}{9}
\end{aligned}$$

と求まります。この点の y-座標は

$$\begin{aligned}
y^2&=1-(x-5)^2\\
&=1-\left(\frac{50-\sqrt{115}}{9}-5\right)^2\\
81y^2&=81-(5-\sqrt{115})^2\\
&=81-(140-10\sqrt{115})\\
&=-59+10\sqrt{115}\\
y&=-\frac{\sqrt{-59+10\sqrt{115}}}{9}
\end{aligned}$$

です（$y<0$ に注意)。

最後にこの点 $\left(\frac{50-\sqrt{115}}{9},-\frac{\sqrt{-59+10\sqrt{115}}}{9}\right)$ での円の接線は

$$\left(\frac{50-\sqrt{115}}{9}-5\right)(x-5)+\left(-\frac{\sqrt{-59+10\sqrt{115}}}{9}\right)y=1$$
$$\left(5-\sqrt{115}\right)(x-5)-\sqrt{-59+10\sqrt{115}}y=9$$

であって、これが双曲線と接するかどうか調べます。

連立させて y を消去すれば

$$9x^2-25y^2=9\cdot 25$$
$$\left(-59+10\sqrt{115}\right)9x^2-25\left\{(5-\sqrt{115})(x-5)-9\right\}^2=9\cdot 25\left(-59+10\sqrt{115}\right)$$

従って

$$\begin{aligned}
0&=(-531+90\sqrt{115})x^2\\
&\quad-25\left\{(5-\sqrt{115})^2(x-5)^2-18(5-\sqrt{115})(x-5)+81\right\}\\
&\quad-9\cdot 25(-59+10\sqrt{115}\\
&=(-531+90\sqrt{115})x^2-25(140-10\sqrt{115})x^2\\
&\quad-25(-1490+118\sqrt{115})x\\
&\quad-25\left\{(140-10\sqrt{115})25+18\cdot 5(5-\sqrt{115})+81\right\}-9\cdot 25(-59+10\sqrt{115})\\
0&=(-4031+340\sqrt{115})x^2+25(1490-118\sqrt{115})x-25(3500-250\sqrt{115})
\end{aligned}$$

ですから、問題はこの２次方程式が重解であるかどうかですが、判別式によれば

$$\begin{aligned}
&25^2(1490-118\sqrt{115})^2-4(-4031+340\sqrt{115})(-25)(3500-250\sqrt{115})\\
&=50^2(745-59\sqrt{115})^2-50^2(4031-340\sqrt{115})(140-10\sqrt{115})\\
&=50^2(745-59\sqrt{115})^2-50^2(955340-87910\sqrt{115})\\
&=50^2(745-59\sqrt{115})^2-50^2(745-59\sqrt{115})^2\\
&=0
\end{aligned}$$

ですから確かに重解です。従ってこれは共通接線であることが分かりました。従って、今の計算に現れた円周上の点 $\left(\frac{50-\sqrt{115}}{9},-\frac{\sqrt{-59+10\sqrt{115}}}{9}\right)$、$\left(\frac{125+\sqrt{2875}}{34},\frac{3\sqrt{50\sqrt{115}-32\cdot 13}}{34}\right)$ やその対称点は除外して考えることにします。

【一般的な点について】円周上の点 $(4,0)$ 以外における有理形パラメータ：

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}+5,\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

を使い、3 点 A,B,C を

$$A\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}+5,\frac{2a}{1+a^2}\right),\quad B\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}+5,\frac{2b}{1+b^2}\right),\quad C\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}+5,\frac{2c}{1+c^2}\right)$$

と置きます（a,b,c は相異なるパラメータ）。円周上の有理形パラメータで $ab=1$ となる 2 点は、y 軸対称な点であって、これらを結ぶ直線は水平となりますが、双曲線にはそのような接線はありませんから、$ab\neq 1, bc\neq 1$ と仮定できます。

また、$b=-a$ の場合は対応する 2 点は x-軸対称なのでこれらを結ぶ直線は垂直になります。接線が垂直になるのは先に挙げた特別な 3 点の場合のみなのでここでは除外されています。従って $a+b\neq 0, b+c\neq 0$ と仮定されます。

直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)\left(y-\frac{2a}{1+a^2}\right)&\\
&=\left(\frac{2a}{1+a^2}-\frac{2b}{1+b^2}\right)\left(x-\frac{1-a^2}{1+a^2}-5\right)\\
\{(1-a^2)(1+b^2)-(1-b^2)(1+a^2)\}\left(y-\frac{2a}{1+a^2}\right)&\\
&=\{2a(1+b^2)-2b(1+a^2)\}\left(x-\frac{6+4a^2}{1+a^2}\right)\\
2(b^2-a^2)\left(y-\frac{2a}{1+a^2}\right)&=\{2(b-a)(ab-1)\}\left(x-\frac{6+4a^2}{1+a^2}\right)\\
(b+a)\left(y-\frac{2a}{1+a^2}\right)&=(ab-1)\left(x-\frac{6+4a^2}{1+a^2}\right)\\
(a+b)y&=(ab-1)x+\frac{2a(a+b)-(6+4a^2)(ab-1)}{1+a^2}\\
0&=(ab-1)x-(a+b)y+6-4ab
\end{aligned}$$

ですから、これが双曲線と接する条件は

$$\frac{x^2}{5^2}-\frac{1}{3^2}\frac{1}{(a+b)^2}\{(ab-1)x+6-4ab\}^2=1$$

$$9(a+b)^2x^2-25\{(ab-1)^2x^2+2(ab-1)(6-4ab)x+(6-4ab)^2\}=9\cdot 25(a+b)^2$$

従って

$$\{9(a+b)^2-25(ab-1)^2\}x^2-50(ab-1)(6-4ab)x-25\{9(a+b)^2+(6-4ab)^2\}=0$$

の重解条件ですから、

$$\begin{aligned}
0&=25^2(ab-1)^2(6-4ab)^2+\{9(a+b)^2-25(ab-1)^2\}25\{9(a+b)^2+(6-4ab)^2\}\\
&=25^2(ab-1)^2(6-4ab)^2+81(a+b)^4\\
&\qquad+9(a+b)^2\{(6-4ab)^2-25(ab-1)^2\}-25(ab-1)^2(6-4ab)^2\\
&=9(a+b)^2+(6-4ab)^2-25(ab-1)^2\\
&=9(a+b)^2+(11-9ab)(ab+1)
\end{aligned}$$

となります。

従って、全く同様にして、直線 BC が双曲線と接する条件は

$$9(b+c)^2+(11-9bc)(bc+1)=0$$

となりますから、これらを合わせて、

$$\begin{aligned}
9(X+b)^2+(11-9bX)(bX+1)&=0\\
9(1-b^2)X^2+20bX+9b^2+11&=0
\end{aligned}$$

の異なる２解が a, c であることが分かります。

> $b^2 = 1$ のときは垂直な接線が現れる場合であり、除外されています。

すると解と係数の関係から

$$a + c = -\frac{20b}{9(1-b^2)}, \quad ac = \frac{9b^2+11}{9(1-b^2)}$$

が得られ、

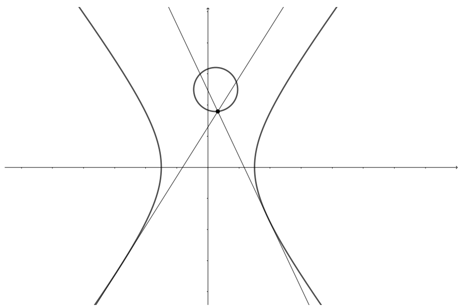
$$\begin{aligned}(11-9ac)(ac+1) &= \left\{11 - 9\cdot\frac{9b^2+11}{9(1-b^2)}\right\}\left\{\frac{9b^2+11}{9(1-b^2)}+1\right\} \\ &= \frac{-180b^2}{9(1-b^2)}\cdot\frac{20}{9(1-b^2)} \\ &= -\frac{3600b^2}{\{9(1-b^2)\}^2} \\ &= -9\left(\frac{20b}{9(1-b^2)}\right)^2 \\ &= -9(a+c)^2\end{aligned}$$

となって、直線 AC も双曲線に接することが分かります。

以上から３回で戻って来ることが分かります。 □

2.2.3 交わらない場合

円と双曲線が交わらず、しかも円から双曲線へ接線が引けるとなると、円と双曲線の位置関係は下図のような状況となります：

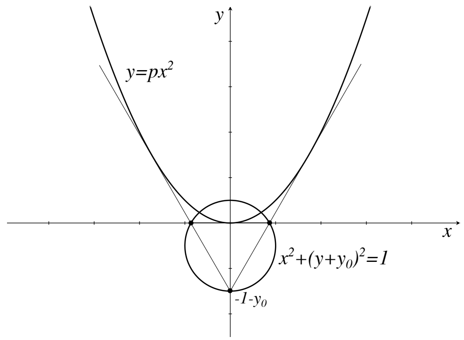


この場合、3 回で元に戻って来ることはありません（きちんと示してはいませんが）。ただ、4 回で戻って来ることは可能でしょうから今後の課題と言えるでしょう。

2.3 円から放物線へ接線を引く問題

2.3.1 軸が一致し、頂点が円の内部にある場合

放物線 $y = px^2$ と円 $x^2 + (y + y_0)^2 = 1$ を考えます（$p > 0,\ -1 < y_0 < 1$）。円周上の点から放物線に接線を引いてゆきます。３回で元に戻るための p, y_0 の条件は何でしょうか。



上の図のような特別な場合で計算してみることにします。

点 $(0, -1-y_0)$ を通る直線 $y = kx - 1 - y_0\ (k > 0)$ が放物線と接すると仮定すると、

$$\begin{aligned}y &= px^2 \\ kx - 1 - y_0 &= px^2 \\ 0 &= px^2 - kx + 1 + y_0\end{aligned}$$

は重解ですから、判別式から

$$\begin{aligned}k^2 - 4p(1+y_0) &= 0 \\ k &= 2\sqrt{p(1+y_0)}\end{aligned}$$

が得られますので、接線の方程式は

$$y = 2\sqrt{p(1+y_0)}x - 1 - y_0$$

です。この直線が x-軸と交わるところは

$$\begin{aligned}0 &= 2\sqrt{p(1+y_0)}x - 1 - y_0 \\ 1 + y_0 &= 2\sqrt{p(1+y_0)}x \\ x &= \frac{1+y_0}{2\sqrt{p(1+y_0)}}\end{aligned}$$

より点 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y_0}{p}}, 0\right)$ であることが分かります。この点が円周上にあれば良いので、その条件を求めると

$$\begin{aligned}\frac{1+y_0}{4p}+y_0^2&=1\\1+y_0&=4p(1-y_0^2)\\1&=4p(1-y_0)\\y_0&=1-\frac{1}{4p}\end{aligned}$$

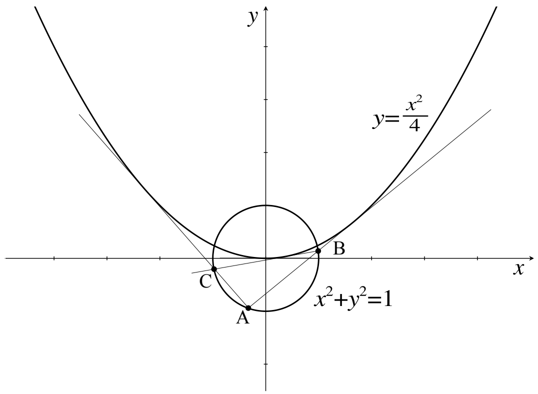
となります。

例えば $p=\frac{1}{4}, y_0=0$ であったり、$p=\frac{1}{2}, y_0=\frac{1}{2}$ であれば良いでしょう。

一般に円 $x^2+\left(y-1+\frac{1}{4p}\right)^2=1$ は放物線 $y=px^2$ の焦点 $\left(0, \frac{1}{4p}\right)$ を通っていることは注目に値します。

具体例検証 5 円周：$x^2+y^2=1$ 上の点 A から放物線：$y=\frac{1}{4}x^2$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度円と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に放物線に接線を引き（さっきとは別の接線にします)、また円周と交わった点を C とします。

このとき、点 C から放物線に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は放物線の『外部』にあるとします。



【特殊な点について】3 点 A, B, C のいずれかが点 $(-1,0)$ であるときは、3 点は

$$(0,-1),\quad (1,0),\quad (-1,0)$$

であって、先に見た特別な場合に相当しており、３回で戻って来ることは分かっています。

また、双曲線との接点が円周との交点になってしまい、次の接線が引けない場合がありますので、それを具体的に明らかにしておきましょう。

円周と放物線の交点は

$$\begin{aligned}4y+y^2&=1\\(y+2)^2-4&=1\\y&=-2\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

のうち、マイナスの方は該当点がないので $y=\sqrt{5}-2$ に対応する点です。この点の x-座標は

$$\begin{aligned}x^2&=4y\\x&=\pm 2y=\pm 2\sqrt{\sqrt{5}-2}\end{aligned}$$

です。

これらの点での放物線の接線を求めますが、対称性があるので一方のみ計算します。

放物線上の点 $\left(2\sqrt{\sqrt{5}-2}, \sqrt{5}-2\right)$ での接線は

$$\begin{aligned}y-\sqrt{5}+2&=\frac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\left(x-2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\\y&=\sqrt{\sqrt{5}-2}x-\sqrt{5}+2\end{aligned}$$

ですから、これが再び円周と交わる点を求めると

$$\begin{aligned}x^2+\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}x-\sqrt{5}+2\right)^2&=1\\x^2+\left(\sqrt{5}-2\right)x^2-2\left(\sqrt{5}-2\right)\sqrt{\sqrt{5}-2}x+\left(\sqrt{5}-2\right)^2&=1\\\left(\sqrt{5}-1\right)x^2-2\left(\sqrt{5}-2\right)\sqrt{\sqrt{5}-2}x+8-4\sqrt{5}&=0\end{aligned}$$

の２解のうち $2\sqrt{\sqrt{5}-2}$ でない方を求めればよく、それは解と係数の関係から

$$\begin{aligned}
x &= \frac{8-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}-2}} \\
&= \frac{4-2\sqrt{5}}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-2)}\sqrt{\sqrt{5}-2} \\
&= \frac{4-2\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}-2} \\
&= -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5}-2} \\
&= -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}
\end{aligned}$$

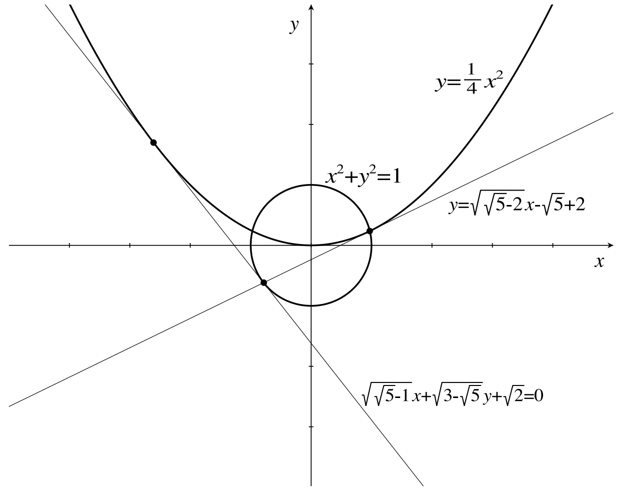
です。この点の y-座標は

$$y^2 = 1-x^2 = 1-\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

から $y=-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ であり、この点 $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)$ での円の接線は

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}x-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}y=1$$
$$\sqrt{\sqrt{5}-1}x+\sqrt{3-\sqrt{5}}y+\sqrt{2}=0$$

であり、これが放物線と接するかどうかを見ます。



直線の式に放物線の式を代入して

$$\sqrt{\sqrt{5}-1}x+\sqrt{3-\sqrt{5}}\frac{1}{4}x^2+\sqrt{2}=0$$

が得られますが、判別式は

$$\sqrt{5}-1-\sqrt{3-\sqrt{5}}\sqrt{2} = \sqrt{5}-1-\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 0$$

となりますから、確かに接しています。

　このような特別な場合は次の接線が引けなくなり、問題のような３本の接線が存在しませんので、このような場合（上の場合とその対称な場合）は除外しておきます。

【一般的な点について】3 点いずれも点 $(-1,0)$ でない場合には、円周の有理形パラメータ表示：

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

を使って

$$A\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right),\quad B\left(\frac{1-b^2}{1+b^2},\frac{2b}{1+b^2}\right),\quad C\left(\frac{1-c^2}{1+c^2},\frac{2c}{1+c^2}\right)$$

と置くことが出来ますが、これらが 3 点 $(-1,0), (\pm1,0)$ でないことから、a,b,c はいずれも $0,\pm1$ ではありません。

このとき、直線 AB の方程式は

$$(ab-1)x-(a+b)y+ab+1=0$$

ですから（演習問題の解答例の中で楕円の場合に計算しました）が、放物線には垂直な接線は存在しませんから $a+b\neq 0$ であって、これが放物線と接する条件は

$$\begin{aligned} y &= \frac{ab-1}{a+b}x+\frac{ab+1}{a+b} \\ \frac{1}{4}x^2 &= \frac{ab-1}{a+b}x+\frac{ab+1}{a+b} \\ x^2-\frac{4(ab-1)}{a+b}x-\frac{4(ab+1)}{a+b} &= 0 \end{aligned}$$

の重解条件になりますから、それは

$$\begin{aligned} \frac{4(ab-1)^2}{(a+b)^2}+\frac{4(ab+1)}{a+b} &= 0 \\ (ab-1)^2+(ab+1)(a+b) &= 0 \end{aligned}$$

となります。

全く同様に直線 BC が接する条件は

$$(bc-1)^2+(bc+1)(b+c)=0$$

ですから、これら２つを合わせると、２次方程式：

$$(bX-1)^2+(bX+1)(b+X)=0$$

すなわち

$$b(b+1)X^2+(b-1)^2X+b+1=0 \quad (b(b+1)\neq 0 \text{ に注意})$$

の２解が a, c であることが分かり、解と係数の関係から

$$a+c=-\frac{(b-1)^2}{b(b+1)}, \quad ac=\frac{b+1}{b(b+1)}=\frac{1}{b}$$

が得られます。すると

$$(ac+1)(a+c)=-\left(\frac{1}{b}+1\right)\frac{(b-1)^2}{b(b+1)}=-\frac{(b-1)^2}{b^2}=-\left(1-\frac{1}{b}\right)^2=-(1-ac)^2$$

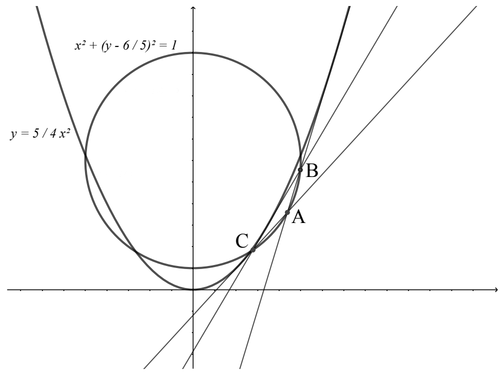
であることになり、これはまさに直線 CA が放物線に接していることを意味しています。

以上から、任意の点から出発して３回で元に戻ることが分かりました。 □

2.3.2 軸が一致し、頂点が円の外部にある場合

一般的な条件はまだ不明ですが、偶然以下の例を発見しました：

具体例検証 6 円 $x^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=1$ 上の点 A から放物線 $y=\frac{5}{4}x^2$ に向かって接線を引き、この接線がまた円と交わった点を B とします。次に点 B から放物線に接線を引き、これがまた円と交わった点を C とするとき、直線 CA は放物線に接する事を示してください。



円周上の有理形パラメータを使って、円周上の異なる 3 点を

$$\mathrm{A}\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{6}{5}\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{2b}{1+b^2},\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{6}{5}\right),\quad \mathrm{C}\left(\frac{2c}{1+c^2},\frac{1-c^2}{1+c^2}+\frac{6}{5}\right)$$

とします（y-座標が -1 の点は表せませんが、この点は放物線の内部にあり、ここから放物線に接線を引くことはありません）。

直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{2a}{1+a^2}-\frac{2b}{1+b^2}\right)\left(y-\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{6}{5}\right) &= \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)\left(x-\frac{2a}{1+a^2}\right) \\ 2(a-b)(1-ab)\left(y-\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{6}{5}\right) &= -2(a-b)(a+b)\left(x-\frac{2a}{1+a^2}\right) \\ (1-ab)\left(y-\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{6}{5}\right) &= -(a+b)\left(x-\frac{2a}{1+a^2}\right) \\ 5(a+b)x+5(1-ab)y+ab-11 &= 0 \end{aligned}$$

であり、これが放物線と接するための条件は

$$
\begin{aligned}
4\cdot 5(1-ab)y &= 25(1-ab)x^2 \\
4\{-5(a+b)x-ab+11\} &= 25(1-ab)x^2 \\
0 &= 25(1-ab)x^2+20(a+b)x+4(ab-11)
\end{aligned}
$$

が重解をもつことであり、それは判別式から

$$
\begin{aligned}
0 &= 10^2(a+b)^2-100(1-ab)(ab-11) \\
&= (a+b)^2+(ab-1)(ab-11)
\end{aligned}
$$

となります。

全く同様に、直線 BC が放物線と接する条件は

$$(b+c)^2+(bc-1)(bc-11)=0$$

となりますから、これらを合わせて考えれば２次方程式：

$$
\begin{aligned}
(b+X)^2+(bX-1)(bX-11) &= 0 \\
(1+b^2)X^2-10bX+b^2+11 &= 0
\end{aligned}
$$

の異なる２解が c,a であるわけですから、解と係数の関係によって

$$c+a=\frac{10b}{1+b^2},\qquad ca=\frac{11+b^2}{1+b^2}$$

が成り立っており、このとき

$$
\begin{aligned}
(ca-1)(ca-11) &= \left(\frac{11+b^2}{1+b^2}-1\right)\left(\frac{11+b^2}{1+b^2}-11\right) \\
&= \frac{(10)(-10b^2)}{(1+b^2)^2} \\
&= -\left(\frac{10b}{1+b^2}\right)^2 \\
&= -(c+a)^2
\end{aligned}
$$

ですから、これは直線 CA が放物線と接していることを意味しています。

以上から、接線は３回で元の点に戻って来ることが分かります。 □

一般的には共通接線ぐらいしか手掛かりがありませんが、それも４次方程式となって難しそうです。

また、この円も $p=\frac{5}{4}$ として放物線の焦点 $\left(0,\frac{1}{4p}\right)$ を通っています。

2.3.3 軸がずれた場合　その１　水平な共通接線がある場合

やはり共通接線が鍵でしょうか。でも４次方程式なので・・・

そこで、共通接線を１本決めてしまうことにします。まずは水平な共通接線がある場合、つまり、x-軸が放物線と円に接する場合を考えます。やはり３回で戻って来るための条件は、ある点から共通接線が引けた時に、もう１本の接線が交点で接することだと考えます。

$$
\begin{aligned}
\text{放物線：}\quad & y=px^2 \\
\text{円：}\quad & (x-x_0)^2+(y-r)^2=r^2
\end{aligned}
$$

直線 $y=0$ は共通接線です。円との接点は $(x_0,0)$ ですが、ここから放物線に引いたもう１本の接線を

$$y-pt^2=2pt(x-t)\quad (t\neq 0)$$

とすると、点 $(x_0,0)$ を通るという条件から t が求まります：

$$
\begin{aligned}
-pt^2 &= 2pt(x_0-t) \\
0 &= 2ptx_0-pt^2 \\
&= pt(2x_0-t) \\
t &= 2x_0
\end{aligned}
$$

従って放物線との接点は $(2x_0,4px_0^2)$ であり（$x_0\neq 0$)、これが円と放物線の交点である条件は、

$$
\begin{aligned}
(2x_0-x_0)^2+(4px_0^2-r)^2 &= r^2 \\
16p^2x_0^4+(1-8pr)x_0^2 &= 0 \\
16p^2x_0^2-8pr+1 &= 0
\end{aligned}
$$

となります。

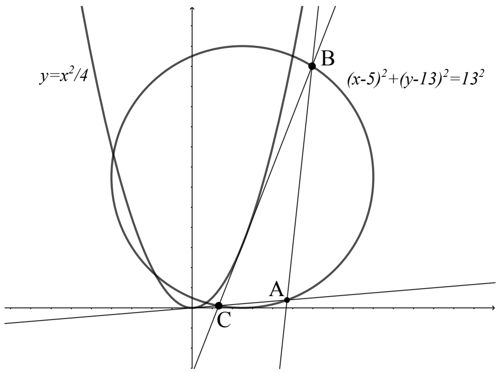
例えば $p=\frac{1}{4},r=13,x_0=5$、$p=1,r=8,x_0=\frac{3\sqrt{7}}{4}$ などです。

また、この条件式を更に変形すると次のようにも書けますから、

$$
\begin{aligned}
x_0^2-\frac{1}{2p}r+\frac{1}{16p^2} &= 0 \\
x_0^2+\left(r-\frac{1}{4p}\right)^2 &= r^2
\end{aligned}
$$

問題の円 $(x-x_0)^2+(y-r)^2=r^2$ はやはり放物線 $y=px^2$ の焦点 $\left(0,\frac{1}{4p}\right)$ を通っています。

具体例検証 7 円 $(x-5)^2+(y-13)^2=13^2$ 上の点 A から放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ に向かって接線を引き、この接線がまた円と交わった点を B とします。次に点 B から放物線に接線を引き、これがまた円と交わった点を C とするとき、直線 CA は放物線に接する事を示してください。



円周上の、放物線の外部にある異なる 3 点を有理形パラメータを使って

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}\left(13\cdot\frac{2a}{a^2+1}+5,13\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}+13\right),\\
&\mathrm{B}\left(13\cdot\frac{2b}{b^2+1}+5,13\cdot\frac{b^2-1}{b^2+1}+13\right),\\
&\mathrm{C}\left(13\cdot\frac{2c}{c^2+1}+5,13\cdot\frac{c^2-1}{c^2+1}+13\right)
\end{aligned}
$$

とします（このパラメータ表示は点 $(5,26)$ だけは表せませんが、放物線の内部にあるため結局使いませんので問題ありません)。

直線 AB の方程式は

$$
\begin{aligned}
13\left(\frac{2a}{a^2+1}-\frac{2b}{b^2+1}\right)\left(y-13\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}-13\right)&=13\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}-\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)\left(x-\frac{13\cdot 2a}{a^2+1}-5\right)\\
2(a-b)(1-ab)\left(y-13\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}-13\right)&=2(a-b)(a+b)\left(x-\frac{26a}{a^2+1}-5\right)\\
(1-ab)\left(y-13\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}-13\right)&=(a+b)\left(x-\frac{26a}{a^2+1}-5\right)
\end{aligned}
$$

から

$$(a+b)x+(ab-1)y-5a-5b-26ab=0$$

ですから、これが放物線と接する条件は（垂直な接線はありませんから $ab\neq 1$ は仮定して問題ありません）

$$
\begin{aligned}
(ab-1)y&=\frac{1}{4}(ab-1)x^2\\
-4(a+b)x+4(5a+5b+26ab)&=(ab-1)x^2\\
(1-ab)x^2-4(a+b)x+4(5a+5b+26ab)&=0
\end{aligned}
$$

の重解条件になりますから、

$$
\begin{aligned}
4(a+b)^2-(1-ab)4(5a+5b+26ab)&=0\\
(a+b)^2+(ab-1)\left\{5(a+b)+26ab\right\}&=0
\end{aligned}
$$

です。

全く同様に直線 BC が放物線に接する条件は

$$(b+c)^2+(bc-1)\left\{5(b+c)+26bc\right\}=0$$

であり、これらを合わせれば 2 次方程式：

$$
\begin{aligned}
(b+X)^2+(bX-1)\left\{5(b+X)+26bX\right\}&=0\\
(26b^2+5b+1)X^2+(5b^2-24b-5)X+b^2-5b&=0
\end{aligned}
$$

の異なる２解が c,a であることが分かりますから、解と係数の関係によって

$$c+a=-\frac{5b^2-24b-5}{26b^2+5b+1},\qquad ca=\frac{b^2-5b}{26b^2+5b+1}$$

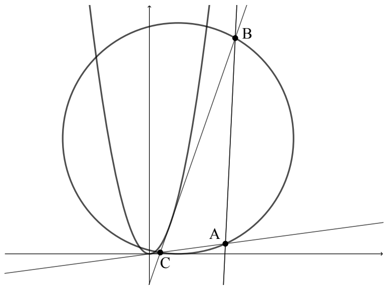
です。するとこの時

$$
\begin{aligned}
&(c+a)^2+(ca-1)\{5(c+a)+26ca\}\\
&=\frac{(5b^2-24b-5)^2}{(26b^2+5b+1)^2}+\frac{b^2-5b-(26b^2+5b+1)}{26b^2+5b+1}\left\{\frac{-5(5b^2-24b-5)+26(b^2-5b)}{26b^2+5b+1}\right\}\\
&=\frac{(5b^2-24b-5)^2}{(26b^2+5b+1)^2}+\frac{(-25b^2-10b-1)(b^2-10b+25)}{(26b^2+5b+1)^2}\\
&=\frac{(5b+1)^2(b-5)^2}{(26b^2+5b+1)^2}-\frac{(5b+1)^2(b-5)^2}{(26b^2+5b+1)^2}\\
&=0
\end{aligned}
$$

となり、これは直線 CA が放物線に接している事を示しています。

以上により、３回で戻ってきます。 □

具体例検証 8 円 $\left(x-\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2+(y-8)^2=64$ 上の点 A から放物線 $y=x^2$ に向かって接線を引き、この接線がまた円と交わった点を B とします。次に点 B から放物線に接線を引き、これがまた円と交わった点を C とするとき、直線 CA は放物線に接する事を示してください。



円周上の、放物線の外部にある異なる 3 点を有理形パラメータを使って

$$\mathrm{A}\left(8\cdot\frac{2a}{a^2+1}+\frac{3\sqrt{7}}{4},8\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}+8\right),$$
$$\mathrm{B}\left(8\cdot\frac{2b}{b^2+1}+\frac{3\sqrt{7}}{4},8\cdot\frac{b^2-1}{b^2+1}+8\right),$$
$$\mathrm{C}\left(8\cdot\frac{2c}{c^2+1}+\frac{3\sqrt{7}}{4}.8\cdot\frac{c^2-1}{c^2+1}+8\right)$$

とします（このパラメータ表示は点 $\left(\frac{3\sqrt{7}}{4},16\right)$ だけは表せませんが、放物線の内部にあるため結局使いませんので問題ありません)。

直線 AB の方程式は

$$8\left(\frac{2a}{a^2+1}-\frac{2b}{b^2+1}\right)\left(y-8\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}-8\right)=8\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}-\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)\left(x-8\cdot\frac{2a}{a^2+1}-\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$$
$$2(a-b)(1-ab)\left(y-8\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}-8\right)=2(a-b)(a+b)\left(x-8\cdot\frac{2a}{a^2+1}-\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$$
$$(1-ab)\left(y-8\cdot\frac{a^2-1}{a^2+1}-8\right)=(a+b)\left(x-8\cdot\frac{2a}{a^2+1}-\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$$

から

$$(a+b)x+(ab-1)y-\frac{3\sqrt{7}}{4}(a+b)-16ab=0$$

ですから、これが放物線と接する条件は（垂直な接線はありませんから $ab\neq 1$ は仮定して問題ありません）

$$(ab-1)y=(ab-1)x^2$$
$$-(a+b)x+\frac{3\sqrt{7}}{4}(a+b)+16ab=(ab-1)x^2$$
$$(1-ab)x^2-(a+b)x+\frac{3\sqrt{7}}{4}(a+b)+16ab=0$$

の重解条件になりますから、

$$(a+b)^2-4(1-ab)\left\{\frac{3\sqrt{7}}{4}(a+b)+16ab\right\}=0$$
$$(a+b)^2+(ab-1)\left\{3\sqrt{7}(a+b)+64ab\right\}=0$$

です。

全く同様に直線 BC が放物線に接する条件は

$$(b+c)^2+(bc-1)\left\{3\sqrt{7}(b+c)+64bc\right\}=0$$

であり、これらを合わせれば 2 次方程式：

$$(b+X)^2+(bX-1)\left\{3\sqrt{7}(b+X)+64bX\right\}=0$$
$$(64b^2+3\sqrt{7}b+1)X^2+(3\sqrt{7}b^2-62b-3\sqrt{7})X+b^2-3\sqrt{7}b=0$$

の異なる２解が c,a であることが分かりますから、解と係数の関係によって

$$c+a=-\frac{3\sqrt{7}b^2-62b-3\sqrt{7}}{64b^2+3\sqrt{7}b+1},\qquad ca=\frac{b^2-3\sqrt{7}b}{64b^2+3\sqrt{7}b+1}$$

です。するとこの時

$$\begin{aligned}&(c+a)^2+(ca-1)\{3\sqrt{7}(c+a)+64ca\}\\&=\frac{(3\sqrt{7}b^2-62b-3\sqrt{7})^2}{(64b^2+3\sqrt{7}b+1)^2}\\&\quad+\frac{b^2-3\sqrt{7}b-(64b^2+3\sqrt{7}b+1)}{64b^2+3\sqrt{7}b+1}\left\{\frac{-3\sqrt{7}(3\sqrt{7}b^2-62b-3\sqrt{7})+64(b^2-3\sqrt{7}b)}{64b^2+3\sqrt{7}b+1}\right\}\\&=\frac{(3\sqrt{7}b+1)^2(b-3\sqrt{7})^2}{(64b^2+3\sqrt{7}b+1)^2}-\frac{(63b^2+6\sqrt{7}b+1)(b^2-6\sqrt{7}b+63)}{(64b^2+3\sqrt{7}b+1)^2}\\&=0\end{aligned}$$

となり、これは直線 CA が放物線に接している事を示しています。

以上により、３回で戻ってきます。 □

2.3.4 軸がずれた場合　その２　傾き 1 の共通接線がある場合

次に、傾き 1 の共通接線がある場合ですが、放物線 $y = px^2$ の (t, pt^2) における接線の傾きは $2pt$ ですから $t = \frac{1}{2p}$ であれば良く、共通接線は $y - \frac{1}{4p} = x - \frac{1}{2p}$ です。

一方で円 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ の点 (a, b) における接線は $(a-x_0)(x-x_0) + (b-y_0)(y-y_0) = r^2$ であり、この傾きが 1 であるとすると $(b-y_0) = -(a-x_0)$ と云うことになり、接点は

$$
\begin{aligned}
(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2 &= r^2 \\
2(a-x_0)^2 &= r^2 \\
a &= x_0 \pm \frac{r}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

から 2 点 $\left(x_0 \pm \frac{r}{\sqrt{2}}, y_0 \mp \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ の可能性があります。このうち円と放物線が交わるようにすると接点は $\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}, y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ であることになります。この点が（傾き 1 の共通）接線 $y = x - \frac{1}{4p}$ 上にあるので

$$
y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}} = x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4p} \tag{2.1}
$$

が成り立っていることに注意します。

次にこの点 $\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}, y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ から放物線に引いたもう 1 本の接線を $y - pt^2 = 2pt(x-t)$ と置けば（$t \neq \frac{1}{2p}$）、これが件の点を通る条件から

$$
\begin{aligned}
y &= 2ptx - pt^2 \\
y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}} &= 2pt\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - pt^2 \\
t^2 - 2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)t + \frac{1}{p}\left(y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

ですが、(2.1) によればこれは

$$
\begin{aligned}
0 &= t^2 - 2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)t + \frac{1}{p}\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4p}\right) \\
&= t^2 - 2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)t + \frac{1}{2p}\left\{2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2p}\right\} \\
&= \left(t - \frac{1}{2p}\right)\left(t - 2\left\{x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right\} + \frac{1}{2p}\right)
\end{aligned}
$$

と因数分解されますから、放物線との接点は $t = 2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2p}$ に対応した点

$$
\begin{aligned}
&\left(2\left\{x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right\} - \frac{1}{2p}, p\left\{2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2p}\right\}^2\right) \\
&= \left(2\left\{x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right\} - \frac{1}{2p}, 4p\left\{y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right\}^2\right)
\end{aligned}
$$

と云うことになりますからこの点が円との交点である条件は

$$
\begin{aligned}
\left\{2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2p} - x_0\right\}^2 + \left(p\left\{2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2p}\right\}^2 - y_0\right)^2 &= r^2 \\
\left\{2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2p} - x_0\right\}^2 + \left\{4p\left(y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 - y_0\right\}^2 &= r^2
\end{aligned}
$$

となります。つまり先の (2.1) と合わせて

$$
\begin{cases}
y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}} = x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4p} \\
\left\{2\left(x_0 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2p} - x_0\right\}^2 + \left\{4p\left(y_0 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 - y_0\right\}^2 = r^2
\end{cases}
$$

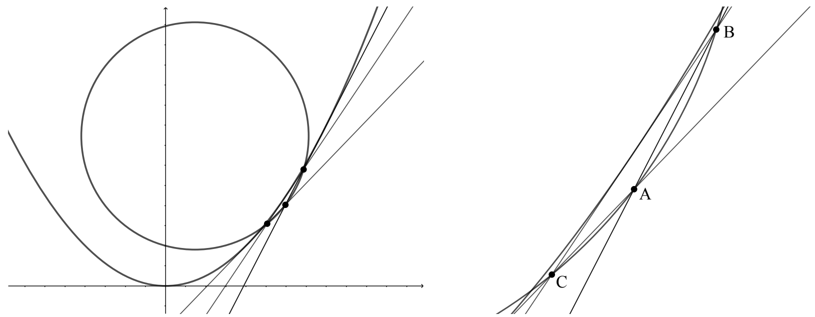
が条件となります。

例えば $p = \frac{1}{4}, r = 2\sqrt{2}, x_0 = \sqrt{3} - 1, y_0 = \sqrt{3} + 2$ などです。

この方法で、一般の共通接線の傾き毎に条件を出すことが出来そうです。また、この共通接線の傾きを固定する方法は、今まで手が出なかった他の場合にも光明となりそうです。

具体例検証 9 円 $\left(x - \sqrt{3} + 1\right)^2 + \left(y - \sqrt{3} - 2\right)^2 = 8$ 上の点 A から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に向かって接線を引き、この接線がまた円と交わった点を B とします。次に点 B から放物線に接線を引き、これがまた円と交わった点を C とするとき、直線 CA

は放物線に接する事を示してください。



円周上の放物線の外部にある異なる３点を、有理形パラメータによって

$$\mathrm{A}\left(\sqrt{3}-1+2\sqrt{2}\cdot\frac{1-a^2}{1+a^2},\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}\cdot\frac{2a}{1+a^2}\right),$$
$$\mathrm{B}\left(\sqrt{3}-1+2\sqrt{2}\cdot\frac{1-b^2}{1+b^2},\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}\cdot\frac{2b}{1+b^2}\right),$$
$$\mathrm{C}\left(\sqrt{3}-1+2\sqrt{2}\cdot\frac{1-c^2}{1+c^2},\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}\cdot\frac{2c}{1+c^2}\right)$$

とします（このパラメータ表示では表せない点がありますが、放物線の内部なので問題ありません）。

直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{2}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}-\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)\left(y-\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}\cdot\frac{2a}{1+a^2}\right)\\
&\qquad=2\sqrt{2}\left(\frac{2a}{1+a^2}-\frac{2b}{1+b^2}\right)\left(x-\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}\cdot\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\\
&-2(a-b)(a+b)\left(y-\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}\cdot\frac{2a}{1+a^2}\right)\\
&\qquad=2(a-b)(1-ab)\left(x-\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}\cdot\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\\
&-(a+b)\left(y-\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}\cdot\frac{2a}{1+a^2}\right)\\
&\qquad=(1-ab)\left(x-\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}\cdot\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)
\end{aligned}$$

から

$$(1-ab)x+(a+b)y-2\sqrt{2}(1+ab)+(1-ab)(1-\sqrt{3})-(a+b)(\sqrt{3}+2)=0$$

となります。これが放物線に接するための条件は

$$\begin{aligned}
4(a+b)y&=(a+b)x^2\\
4\{(ab-1)x+2\sqrt{2}(1+ab)+(ab-1)(1-\sqrt{3})+(a+b)(\sqrt{3}+2)\}&=(a+b)x^2\\
(a+b)x^2-4(ab-1)x-4\{2\sqrt{2}(1+ab)+(ab-1)(1-\sqrt{3})+(a+b)(\sqrt{3}+2)\}&=0
\end{aligned}$$

の重解条件ですから

$$\begin{aligned}
0&=4(ab-1)^2+(a+b)4\{2\sqrt{2}(1+ab)+(ab-1)(1-\sqrt{3})+(a+b)(\sqrt{3}+2)\}\\
&=(ab-1)^2+(a+b)\left\{2\sqrt{2}(1+ab)+(ab-1)(1-\sqrt{3})+(a+b)(\sqrt{3}+2)\right\}
\end{aligned}$$

となります。

全く同様にして、直線 BC が放物線と接する条件は

$$(bc-1)^2+(b+c)\left\{2\sqrt{2}(1+bc)+(bc-1)(1-\sqrt{3})+(b+c)(\sqrt{3}+2)\right\}=0$$

であって、これらを合わせると 2 次方程式：

$$\begin{aligned}
0&=(bX-1)^2+(b+X)\left\{2\sqrt{2}(1+bX)+(bX-1)(1-\sqrt{3})+(b+X)(\sqrt{3}+2)\right\}\\
&=\left\{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}\right\}X^2\\
&\quad+\left\{(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b^2+(2\sqrt{3}+2)b-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right\}X\\
&\qquad+(\sqrt{3}+2)b^2+(-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})b+1
\end{aligned}$$

の異なる２解が c,a であることが分かります。

すると解と係数の関係から

$$\begin{aligned}
c+a&=-\frac{(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b^2+(2\sqrt{3}+2)b-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\\
ca&=\frac{(\sqrt{3}+2)b^2+(-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})b+1}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

が成り立っており、このとき、

$$\begin{aligned}
ca-1&=\frac{(1+\sqrt{3})b^2+(-2+2\sqrt{3})b-1-\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\\
ca+1&=\frac{(3+\sqrt{3})b^2+4\sqrt{2}b+3+\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

ですから、まず

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{2}(1+ca)+(ca-1)(1-\sqrt{3})+(c+a)(\sqrt{3}+2)\\
&=2\sqrt{2}\frac{(3+\sqrt{3})b^2+4\sqrt{2}b+3+\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\\
&\qquad+(1-\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3})b^2+(-2+2\sqrt{3})b-1-\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\\
&\qquad\qquad-(2+\sqrt{3})\frac{(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b^2+(2\sqrt{3}+2)b-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\\
&=\frac{(-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})b^2-(2+2\sqrt{3})b+1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

であって、従って

$$
\begin{aligned}
&(c+a)\left\{2\sqrt{2}(1+ca)+(ca-1)(1-\sqrt{3})+(c+a)(\sqrt{3}+2)\right\}\\
&=-\frac{(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b^2+(2\sqrt{3}+2)b-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\\
&\qquad\cdot\frac{(-1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})b^2-(2+2\sqrt{3})b+1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\\
&=-\frac{4+2\sqrt{3}-8b+(8-12\sqrt{3})b^2+8b^3+(4+2\sqrt{3})b^4}{\left\{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}\right\}^2}\\
&=-\left\{\frac{(1+\sqrt{3})b^2+(-2+2\sqrt{3})b-1-\sqrt{3}}{b^2+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})b+2+\sqrt{3}}\right\}^2\\
&=-(ca-1)^2
\end{aligned}
$$

が得られます。これは即ち直線 CA が放物線に接している事を示しており、従って以上から３回で元に戻って来ることが分かります。 □

ちなみにこの円 $\left(x-\sqrt{3}+1\right)^2+\left(y-\sqrt{3}-2\right)^2=8$ も、$p=\frac{1}{4}$ に対して放物線の焦点 $\left(0,\frac{1}{4p}\right)=(0,1)$ を通っていますね・・・

2.3.5　軸がずれた場合　その３　傾き k の共通接線がある場合

次に、傾き $k>0$ の共通接線がある場合ですが、放物線 $y=px^2$ の (t,pt^2) における接線の傾きは $2pt$ ですから $t=\frac{k}{2p}$ であれば良く、共通接線は

$$
\begin{aligned}
y-\frac{k^2}{4p}&=kx-\frac{k^2}{2p}\\
y&=kx-\frac{k^2}{4p}
\end{aligned}
$$

です。

一方で円 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ の点 (a,b) における接線は $(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=r^2$ であり、この傾きが k であるとすると $k(b-y_0)=-(a-x_0)$ と云うことになり、接点は

$$
\begin{aligned}
(a-x_0)^2+(b-y_0)^2&=r^2\\
(1+k^2)(b-y_0)^2&=r^2\\
b&=y_0\pm\frac{r}{\sqrt{1+k^2}}
\end{aligned}
$$

から２点 $\left(x_0\pm\frac{kr}{\sqrt{1+k^2}},y_0\mp\frac{r}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ の可能性があります。このうち円と放物線が交わるようにすると接点は $\left(x_0+\frac{kr}{\sqrt{1+k^2}},y_0-\frac{r}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ であることになります。この点が（傾き k の共通）接線 $y=kx-\frac{k^2}{4p}$ 上にあるので

$$
y_0-\frac{r}{\sqrt{1+k^2}}=kx_0+\frac{k^2r}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{k^2}{4p} \tag{2.2}
$$

が成り立っていることに注意します。

次にこの点 $\left(x_0+\frac{kr}{\sqrt{1+k^2}},y_0-\frac{r}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ から放物線に引いたもう１本の接線を $y-pt^2=2pt(x-t)$ と置けば（$t\neq\frac{k}{2p}$）、これが件の点を通る条件から

$$
\begin{aligned}
y&=2ptx-pt^2\\
y_0-\frac{r}{\sqrt{1+k^2}}&=2pt\left(x_0+\frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right)-pt^2\\
t^2-2\left(x_0+\frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right)t+\frac{1}{p}\left(y_0-\frac{r}{\sqrt{1+k^2}}\right)&=0
\end{aligned}
$$

ですが、(2.2) によればこれは

$$
\begin{aligned}
0 &= t^2 - 2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right)t + \frac{1}{p}\left(kx_0 + \frac{k^2 r}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{k^2}{4p}\right) \\
&= t^2 - 2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right)t + \frac{k}{2p}\left\{2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{k}{2p}\right\} \\
&= \left(t - \frac{k}{2p}\right)\left(t - 2\left\{x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right\} + \frac{k}{2p}\right)
\end{aligned}
$$

と因数分解されますから、放物線との接点は $t = 2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{k}{2p}$ に対応した点

$$
\begin{aligned}
&\left(2\left\{x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right\} - \frac{k}{2p}, p\left\{2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{k}{2p}\right\}^2\right) \\
&\qquad = \left(2\left\{x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right\} - \frac{k}{2p}, \frac{4p}{k^2}\left\{y_0 - \frac{r}{\sqrt{1+k^2}}\right\}^2\right)
\end{aligned}
$$

と云うことになります。

> このことは、極の x-座標が２接点の x-座標の真ん中であることからも導出出来ます。

この点が円との交点である条件は

$$
\begin{aligned}
&\left\{2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{k}{2p} - x_0\right\}^2 + \left(p\left\{2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{k}{2p}\right\}^2 - y_0\right)^2 = r^2 \\
&\qquad \left\{2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{k}{2p} - x_0\right\}^2 + \left\{\frac{4p}{k^2}\left(y_0 - \frac{r}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 - y_0\right\}^2 = r^2
\end{aligned}
$$

となります。つまり先の (2.2) と合わせて

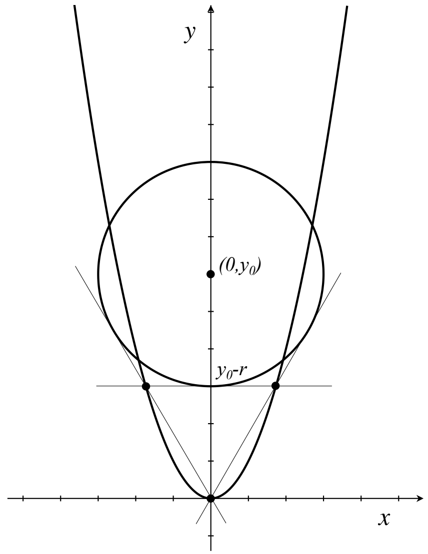
$$
\begin{cases}
y_0 - \frac{r}{\sqrt{1+k^2}} = kx_0 + \frac{k^2 r}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{k^2}{4p} \\
\left\{2\left(x_0 + \frac{kr}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{k}{2p} - x_0\right\}^2 + \left\{\frac{4p}{k^2}\left(y_0 - \frac{r}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 - y_0\right\}^2 = r^2
\end{cases}
$$

が条件となります。

ここから具体的な例を見つけ出すのは難しいですね。共通接線の条件によってかなり複雑化しているようです。

2.4 放物線から円へ接線を引く問題

2.4.1 交わる場合　その１：軸がずれない場合



放物線：$y = x^2$ から円：$x^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ に向かって接線を引きます（$y_0 > r > 0$）。図のような特別な場合に計算します。

図の水平な接線は $y = y_0 - r$ であり、これと放物線の交点は $x = \pm\sqrt{y_0 - r}$ に対応する点です。従って３回で戻ってくるためには、直線 $y = \sqrt{y_0 - r}x$ が円に接すれば良く、その条件は

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{|y_0|}{\sqrt{y_0 - r + 1}} \\
r^2(y_0 - r + 1) &= y_0^2 \\
0 &= r^3 - (y_0 + 1)r^2 + y_0^2 \\
&= (r - y_0)(r^2 - r - y_0) \\
y_0 &= r^2 - r
\end{aligned}
$$

です。特に $r > 2$ でなければならないことに注意します（$r < y_0$ より）。

例えば $y_0 = 6, r = 3$、$y_0 = 12, r = 4$ などです。

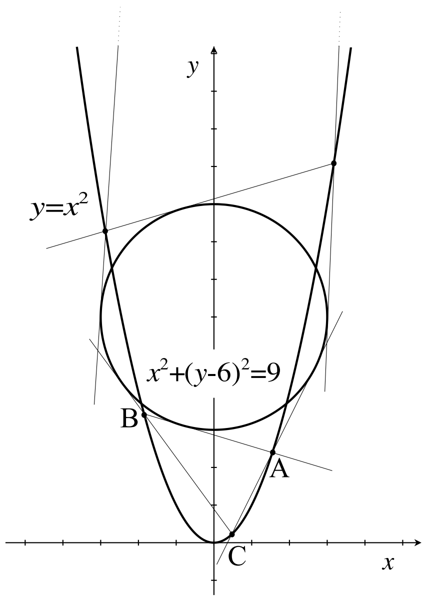
あるいは、無限遠点を利用する方法もあるのかも知れません。つまり、$y = y_0 + r$ に相当する接線と放物線の交点を求め、その点から引いた円の接線が垂直になる条件です。これを求めると

$$
\sqrt{y_0 + r} = r, \quad \text{すなわち} \quad y_0 + r = r^2
$$

となり、先に求めた条件と同じであることが分かります。この方法も道具に加えるべきでしょう。なぜなら、これを使えば y_0 と r の大小で分ける必要がなくなるからです。

具体例検証 10 放物線 $y = x^2$ 上の点 A から円 $x^2 + (y - 6)^2 = 9$ に向かって接線を引き、この接線がもう一度放物線と交わった点を B とします。次に点 B から出発してまた円に接線を引き、放物線と交わった点を C とします。このとき直線 CA

が円に接する事を示してください。ただし、点 A は円の外部にあるとします。



【特別な除外点について】接線が垂直になる場合は除外します。具体的には 2 点 $(\pm 3, 9)$ です。

また、円と放物線の交点や (これは円の外部ですからすでに除外されていますが)、接線がこの交点を通るような場合も除外します。以下これを具体的に求めてみましょう。

円と放物線の交点を求めると、

$$\begin{aligned}
x^2+(y-6)^2&=9\\
y+(y-6)^2&=9\\
y^2-11y+27&=0\\
\left(y-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{11^2}{4}+27&=0\\
\left(y-\frac{11}{2}\right)^2&=\frac{13}{4}\\
y&=\frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}
\end{aligned}$$

であって、これに対応する 4 点が交点になっています。

$$\left(\pm\sqrt{\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}, \frac{11}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right), \quad \left(\pm\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}, \frac{11}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$

4 点は y-軸対称に存在しますから、2 点 $\left(\sqrt{\frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}}, \frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ の場合のみ計算します（複号同順)。

点 $\left(\sqrt{\frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}}, \frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ での円の接線は

$$\sqrt{\frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}}x+\left(\frac{11}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}-6\right)(y-6)=9$$

であり、これがまた放物線と交わる点は、

$$\sqrt{\frac{11\pm\sqrt{13}}{2}}x+\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right)(x^2-6)=9$$

【一般的な点について】放物線上の異なる 3 点を $A(a,a^2), B(b,b^2), C(c,c^2)$ とします。

直線 AB の式は

$$\begin{aligned}
(a-b)(y-a^2)&=(a^2-b^2)(x-a)\\
y-a^2&=(a+b)(x-a)\\
0&=(a+b)x-y-ab
\end{aligned}$$

ですから、これが円と接する条件は

$$\begin{aligned}
3&=\frac{|-6-ab|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}\\
9\{(a+b)^2+1\}&=(ab+6)^2
\end{aligned}$$

となります。

全く同様に、直線 BC が円と接する条件は

$$9\{(b+c)^2+1\}=(bc+6)^2$$

ですからこれらを合わせれば 2 次方程式：

$$\begin{aligned}
9\{(X+b)^2+1\}&=(bX+6)^2\\
(9-b^2)X^2+6bX+9b^2-27&=0
\end{aligned}$$

の異なる 2 解が a, c であることが分かります。

$b^2 = 9$ のときは垂直な接線が現れ、除外されています。

すると解と係数の関係により

$$c + a = -\frac{6b}{9 - b^2}, \quad ca = \frac{9b^2 - 27}{9 - b^2}$$

ですから、

$$9\{(c+a)^2 + 1\} = 9\left\{\frac{36b^2}{(9-b^2)^2} + 1\right\} = 9 \cdot \frac{b^4 + 18b^2 + 81}{(9-b^2)^2} = 9 \cdot \frac{(b^2+9)^2}{(9-b^2)^2}$$

$$ca + 6 = \frac{9b^2 - 27}{9 - b^2} + 6 = \frac{3b^2 + 27}{9 - b^2} = 3 \cdot \frac{b^2 + 9}{9 - b^2}$$

によって

$$9\{(c+a)^2 + 1\} = (ca + 6)^2$$

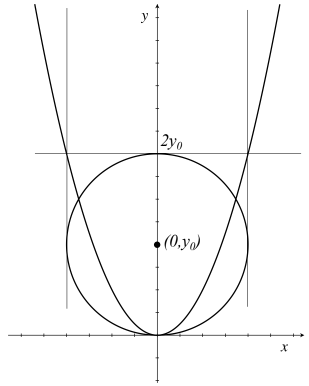
が成り立っていることが分かり、これはまさに直線 CA が円に接している条件に他なりません。

以上から３回で元に戻ってくることが分かりました。 □

次に $y_0 = r$ の場合を見てみましょう。

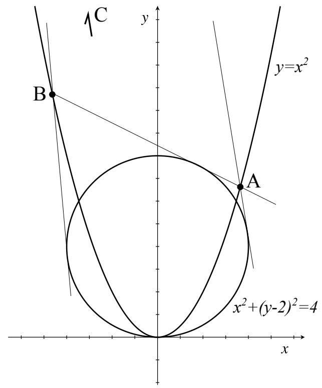
この場合は $y_0 > r$ のときのような『特別な場合』がありませんので、上手く特別なケースで計算することが出来ません。

しかし、最後に注意したように、無限遠点を使う方法が有効そうなのでこれでやってみましょう。



すると、３回で『戻ってくる』ためには、$y_0^2 = 2y_0$、従って $y_0 = 2$ でなければならないことが分かります。

具体例検証 11 放物線 $y = x^2$ 上の点 A から円 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ に向かって接線を引き、この接線がもう一度放物線と交わった点を B とします。次に点 B から出発してまた円に接線を引き、放物線と交わった点を C とします。このとき直線 CA が円に接する事を示してください。ただし、点 A は円の外部にあるとします。



放物線上の異なる 3 点を $A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2)$ とします。

直線 AB の式は

$$
\begin{aligned}
(a-b)(y-a^2) &= (a^2-b^2)(x-a) \\
y-a^2 &= (a+b)(x-a) \\
0 &= (a+b)x-y-ab
\end{aligned}
$$

ですから、これが円と接する条件は

$$
\begin{aligned}
2 &= \frac{|-2-ab|}{\sqrt{(a+b)^2+1}} \\
4\{(a+b)^2+1\} &= (ab+2)^2
\end{aligned}
$$

となります。

全く同様に、直線 BC が円と接する条件は

$$
4\{(b+c)^2+1\} = (bc+2)^2
$$

ですからこれらを合わせれば２次方程式：

$$
\begin{aligned}
4\{(X+b)^2+1\} &= (bX+2)^2 \\
(4-b^2)X^2+4bX+4b^2 &= 0
\end{aligned}
$$

の異なる２解が a, c であることが分かります。すると解と係数の関係により

$$
c+a = -\frac{4b}{4-b^2}, \quad ca = \frac{4b^2}{4-b^2}
$$

ですから、

$$
4\{(c+a)^2+1\} = 4\left\{\frac{16b^2}{(4-b^2)^2}+1\right\} = 4\cdot\frac{b^4+8b^2+16}{(4-b^2)^2} = 4\cdot\frac{(b^2+4)^2}{(4-b^2)^2}
$$

$$
ca+2 = \frac{4b^2}{4-b^2}+2 = \frac{2b^2+8}{4-b^2} = 2\cdot\frac{b^2+4}{4-b^2}
$$

によって

$$
4\{(c+a)^2+1\} = (ca+2)^2
$$

が成り立っていることが分かり、これはまさに直線 CA が円に接している条件に他なりません。

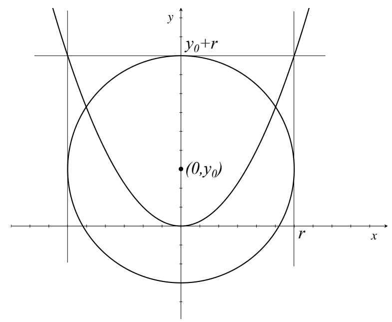
以上から３回で元に戻ってくることが分かりました。 □

最後に $y_0 < r$ の場合ですが、円と放物線が交わる場合を考えるので、少なくとも $y_0 + r > 0$ でなければなりません。

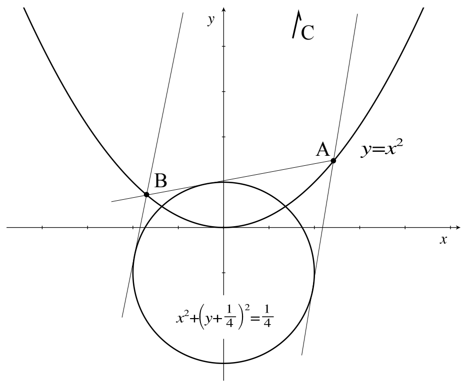
この場合も $y_0 > r$ のときのような上手い内接３角形はありませんが、やはり無限遠点を使って考えることが出来そうです。

$y = y_0 + r$ に対応する円の接線と放物線の交点が、円の垂直な接線 $x = \pm r$ との交点になることから計算すれば $r^2 = y_0 + r$ 従って $y_0 = r(r-1)$ が得られます。この条件は $r < y_0$ の場合と同じですが、$y_0 < r$ なので $r-1 < 1$、従って $r < 2$ でなければなりません。

例えば $r = \frac{3}{2}, y_0 = \frac{3}{4}$、$r = \frac{1}{2}, y_0 = -\frac{1}{4}$ などです。



具体例検証 12 放物線 $y = x^2$ 上の点 A から円 $x^2 + \left(y+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$ に向かって接線を引き、この接線がもう一度放物線と交わった点を B とします。次に点 B から出発してまた円に接線を引き、放物線と交わった点を C とします。このとき直線 CA が円に接する事を示してください。ただし、点 A は円の外部にあるとします。



【特殊な除外点について】垂直な接線が現れる場合は、問題のように３本の接線を引くことが出来ませんので除外します。具体的には $\left(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ からの接線です。

【一般的な点について】放物線上の異なる 3 点を $A(a,a^2),B(b,b^2),C(c,c^2)$ とします。

直線 AB の式は

$$\begin{aligned}(a-b)(y-a^2)&=(a^2-b^2)(x-a)\\ y-a^2&=(a+b)(x-a)\\ 0&=(a+b)x-y-ab\end{aligned}$$

ですから、これが円と接する条件は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=\frac{\left|\frac{1}{4}-ab\right|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}\\ (a+b)^2+1&=4\left(ab-\frac{1}{4}\right)^2\\ 4\{(a+b)^2+1\}&=(4ab-1)^2\end{aligned}$$

となります。

全く同様に、直線 BC が円と接する条件は

$$4\{(b+c)^2+1\}=(4bc-1)^2$$

ですからこれらを合わせれば 2 次方程式：

$$\begin{aligned}4\{(X+b)^2+1\}&=(4bX-1)^2\\ (4-16b^2)X^2+16bX+4b^2+3&=0\end{aligned}$$

の異なる２解が a,c であることが分かります。

> $b^2=\frac{1}{4}$ の場合は垂直な接線が現れ、除外されています。

すると解と係数の関係により

$$c+a=-\frac{16b}{4-16b^2},\quad ca=\frac{4b^2+3}{4-16b^2}$$

ですから、

$$\begin{aligned}4\{(c+a)^2+1\}&=4\left\{\frac{16^2b^2}{(4-16b^2)^2}+1\right\}\\ &=4\cdot\frac{16^2b^4+(16^2-16\cdot 8)b^2+16}{(4-16b^2)^2}\\ &=4\cdot 16\cdot\frac{16b^4+8b^2+1}{(4-16b^2)^2}\\ &=4\cdot\frac{(16b^2+4)^2}{(4-16b^2)^2}\\ 4ca-1&=\frac{16b^2+12}{4-16b^2}-1=\frac{32b^2+8}{4-16b^2}=2\cdot\frac{16b^2+4}{4-16b^2}\end{aligned}$$

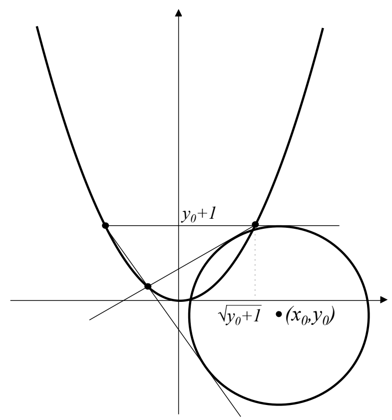
によって

$$4\{(c+a)^2+1\}=(4ca-1)^2$$

が成り立っていることが分かり、これはまさに直線 CA が円に接している条件に他なりません。

以上から３回で元に戻ってくることが分かりました。 □

2.4.2 交わる場合　その２：軸がずれる場合



放物線：$y=x^2$ から円：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1$ に接線を引きます。

図のように $y=y_0+1$ に相当する 2 点を結ぶ水平な直線が接線となる特別な場合に計算します。

放物線の $y = y_0+1$ に相当する点は $(\pm\sqrt{y_0+1}, y_0+1)$ の 2 点であり、点 $(\pm\sqrt{y_0+1}, y_0+1)$ を通る水平でない直線：

$$y-y_0-1=k(x\mp\sqrt{y_0+1}),\quad \text{即ち}\quad kx-y+y_0+1\mp k\sqrt{y_0+1}=0$$

が円と接する条件は

$$\begin{aligned}|kx_0-y_0+y_0+1\mp k\sqrt{y_0+1}|&=\sqrt{k^2+1}\\ \left\{k(x_0\mp\sqrt{y_0+1})+1\right\}^2&=k^2+1\\ k^2(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2+2k(x_0\mp\sqrt{y_0+1})&=k^2\\ k(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2+2(x_0\mp\sqrt{y_0+1})&=k\end{aligned}$$

ですから $(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2\neq 1, 0$ であれば

$$k=\frac{2(x_0\mp\sqrt{y_0+1})}{1-(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2}$$

となりますから、点 $(\pm\sqrt{y_0+1}, y_0+1)$ から円に引いたもう 1 本の接線は

$$y-y_0-1=\frac{2(x_0\mp\sqrt{y_0+1})}{1-(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2}(x\mp\sqrt{y_0+1})$$

です。これらの接線が再び放物線と交わる点は、

$$\begin{aligned}x^2-y_0-1&=\frac{2(x_0\mp\sqrt{y_0+1})}{1-(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2}(x\mp\sqrt{y_0+1})\\ (x-\sqrt{y_0+1})(x+\sqrt{y_0+1})&=\frac{2(x_0\mp\sqrt{y_0+1})}{1-(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2}(x\mp\sqrt{y_0+1})\\ x\pm\sqrt{y_0+1}&=\frac{2(x_0\mp\sqrt{y_0+1})}{1-(x_0\mp\sqrt{y_0+1})^2}\end{aligned}$$

ですから、これらが等しくなる条件を求めると

$$\begin{aligned}\frac{2(x_0-\sqrt{y_0+1})}{1-(x_0-\sqrt{y_0+1})^2}-\sqrt{y_0+1}&=\frac{2(x_0+\sqrt{y_0+1})}{1-(x_0+\sqrt{y_0+1})^2}+\sqrt{y_0+1}\\ \frac{x_0-\sqrt{y_0+1}}{1-(x_0-\sqrt{y_0+1})^2}-\frac{x_0+\sqrt{y_0+1}}{1-(x_0+\sqrt{y_0+1})^2}&=\sqrt{y_0+1}\end{aligned}$$

から左辺を通分して

$$\begin{aligned}\sqrt{y_0+1}&=\frac{\begin{array}{c}(x_0-\sqrt{y_0+1})\left\{1-(x_0+\sqrt{y_0+1})^2\right\}\\ -(x_0+\sqrt{y_0+1})\left\{1-(x_0-\sqrt{y_0+1})^2\right\}\end{array}}{\left\{1-(x_0-\sqrt{y_0+1})^2\right\}\left\{1-(x_0+\sqrt{y_0+1})^2\right\}}\\ &=\frac{\begin{array}{c}(x_0-\sqrt{y_0+1})-(x_0^2-y_0-1)(x_0+\sqrt{y_0+1})\\ -(x_0+\sqrt{y_0+1})+(x_0^2-r-1)(x_0-\sqrt{y_0+1})\end{array}}{(1-x_0^2+2x_0\sqrt{y_0+1}-y_0-1)(1-x_0^2-2x_0\sqrt{y_0+1}-y_0-1)}\\ &=\frac{-2\sqrt{y_0+1}-(x_0^2-y_0-1)2\sqrt{y_0+1}}{(-x_0^2-y_0+2x_0\sqrt{y_0+1})(-x_0^2-y_0-2x_0\sqrt{y_0+1})}\\ 1&=\frac{2(x_0^2-y_0)}{(-x_0^2-y_0+2x_0\sqrt{y_0+1})(x_0^2+y_0+2x_0\sqrt{y_0+1})}\end{aligned}$$

となり、

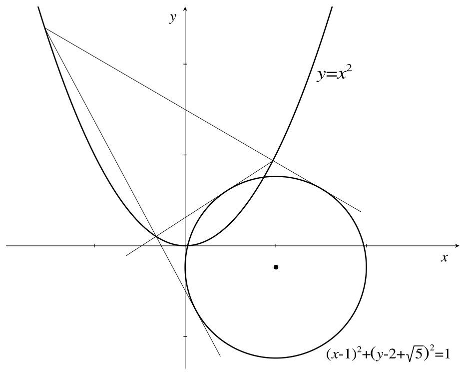
$$\begin{aligned}4x_0^2(y_0+1)-(x_0^2+y_0)^2&=2(x_0^2-y_0)\\ 4x_0^2-(x_0^2-y_0)^2&=2x_0^2-2y_0\\ 2(x_0^2+y_0)&=(x_0^2-y_0)^2\\ 2x_0^2&=y_0^2-2x_0^2y_0+x_0^4-2y_0\\ 4x_0^2+1&=y_0^2-2(x_0^2+1)y_0+x_0^4+2x_0^2+1\\ 4x_0^2+1&=\left\{y_0-(x_0^2+1)\right\}^2\end{aligned}$$

が得られます。

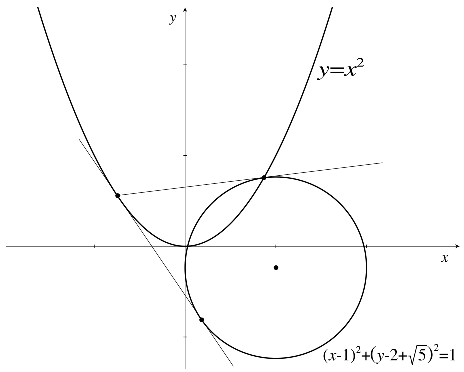
例えば、$x_0=1, y_0=2-\sqrt{5}$、$x_0=2\sqrt{3}, y_0=6$、$x_0=\sqrt{6}, y_0=2$ などです。

具体例検証 **13** 放物線 $y=x^2$ 上の点 A から円 $(x-1)^2+(y-2+\sqrt{5})^2=1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度放物線と交わった点を B とします。今度は点 B から円に接線を引き、また放物線と交わった点を C とします。このとき点 C から円に引いた接線は点 A を通ることを示してください。

ただし、点 A は円の外部にあるものとします。



【特殊な点について】放物線から円に引いた接線の接点が円と放物線の交点になってしまっている場合には、次の接線を引くことができませんので、そういう場合は除外します。これが具体的にどんな場合であるのか計算しようとしても



放物線と円の交点は $y=x^2$ を円の方程式に代入して得られる 4 次方程式：

$$(x-1)^2+(x^2-2+\sqrt{5})^2=1$$
$$x^4+\{2(-2+\sqrt{5})+1\}x^2-2x+(-2+\sqrt{5})^2=0$$

を解かねばならず、具体的に交点の座標を求める事自体難しいと言わざるを得ません。

では、具体的に点の座標を求めずに、接点が交点の場合に共通接線が現れる事を示すことは出来ないでしょうか？

また、放物線上の点から円に引いた接線が垂直になってしまい、放物線と２度と交わらない場合もあります。具体的には放物線上の点 $(0,0),(2,4)$ から始めた場合がそうですが、このような場合は除外します。

【一般的な点について】放物線上の異なる 3 点 $A(a,a^2),B(b,b^2),C(c,c^2)$ に対し、直線 AB の式は

$$\begin{aligned}(a-b)(y-a^2)&=(a^2-b^2)(x-a)\\ y-a^2&=(a+b)(x-a)\\ (a+b)x-y-ab&=0\end{aligned}$$

であり、これが問題の円に接する条件は

$$\begin{aligned}1&=\frac{|(a+b)-(2-\sqrt{5})-ab|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}\\ (a+b)^2+1&=\{(a+b)-(2-\sqrt{5})-ab\}^2\end{aligned}$$

ですから、同様に直線 BC が円に接する条件は

$$(b+c)^2+1=\{(b+c)-(2-\sqrt{5})-bc\}^2$$

です。これらを合わせれば次の 2 次方程式：

$$(X+b)^2+1=\{(X+b)-(2-\sqrt{5})-Xb\}^2$$

の異なる２解が a,c であることが分かります。これは整理すると

$$b(b-2)X^2+2\{(b-2+\sqrt{5})(1-b)-b\}X+2(-2+\sqrt{5})b+(-2+\sqrt{5})^2-1=0$$

ですから（$b=0,2$ は除外されていることに注意）解と係数の関係から

$$c+a=\frac{2\{b-(b-2+\sqrt{5})(1-b)\}}{b(b-2)},\quad ca=\frac{2(-2+\sqrt{5})b+(-2+\sqrt{5})^2-1}{b(b-2)}$$

であって、

$$\begin{aligned}(c+a)^2&=\frac{4\{b^2-(2-\sqrt{5})b+(2-\sqrt{5})\}^2}{b^2(b-2)^2}\\ &=\frac{4\{b^4-2(2-\sqrt{5})b^3+(13-6\sqrt{5})b^2-2(9-4\sqrt{5})b+(9-\sqrt{5})\}}{b^2(b-2)^2}\\ (c+a)^2+1&=\frac{5b^4+(-20+8\sqrt{5})b^3+4(14-6\sqrt{5})b^2-8(9-4\sqrt{5})b+4(9-4\sqrt{5})}{b^2(b-2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(c+a)-(2-\sqrt{5})-ca \\
&=\frac{2\{b^2-(2-\sqrt{5})b+2-\sqrt{5}\}-(2-\sqrt{5})b(b-2)+2(2-\sqrt{5})b-4(2-\sqrt{5})}{b(b-2)} \\
&=\frac{\sqrt{5}b^2+2(2-\sqrt{5})b-2(2-\sqrt{5})}{b(b-2)} \\
&\{(c+a)-(2-\sqrt{5})-ca\}^2 \\
&=\frac{5b^4+4(-5+2\sqrt{5})b^3+8(7-3\sqrt{5})b^2-8(9-4\sqrt{5})b+4(9-4\sqrt{5})}{b^2(b-2)^2}
\end{aligned}$$

によれば

$$(c+a)^2+1=\{(c+a)-(2-\sqrt{5})-ca\}^2$$

が成り立っており、これはまさに直線 CA が円に接する条件に他なりません。

以上により、３回で元に戻ってくることが示されました。 □

2.4.3 交わらない場合

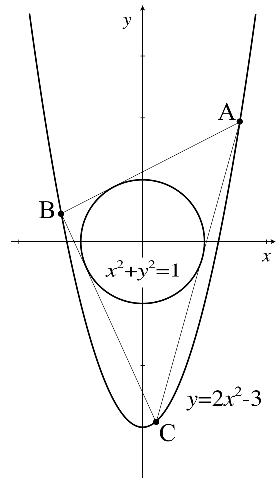
放物線 $y=px^2-r\,(p,r>0)$ と円 $x^2+y^2=1$ の場合に、放物線上の点から円に接線を引いてゆき、3 回で元に戻るための p,r の条件を求めてみます。特に $y=1$ に相当する 2 点 $\left(\pm\sqrt{\frac{1+r}{p}},1\right)$ を結ぶ直線は円に接しますから、放物線の頂点 $(0,-r)$ とこれら 2 点を結ぶ直線が円に接する条件を求めれば良いでしょう。

直線：$y+r=\frac{1+r}{\sqrt{\frac{1+r}{p}}}x$ が円：$x^2+y^2=1$ と接する条件は、

$$\begin{aligned}
r^2&=\frac{(1+r)^2}{\frac{1+r}{p}}+1 \\
r^2&=p(1+r)+1 \\
r^2-pr-p-1&=0 \\
(r-p-1)(r+1)&=0 \\
r&=p+1
\end{aligned}$$

となります（$r>0$ に注意)。

具体例検証 14 放物線 $y=2x^2-3$ 上の点 A から円 $x^2+y^2=1$ に接線を引き、その接線がまた放物線と交わった点を B とします。次に点 B から円に接線を引き、これがまた放物線と交わった点を C とすると、直線 CA は円に接する事を示して下さい。



放物線上の異なる 3 点を $A(a,2a^2-3),B(b,2b^2-3),C(c,2c^2-3)$ とします。ただし、2 点 $(1,-1),(-1,-1)$ から接線を引くと一方は垂直な直線となって２度と放物線と交わらないので、この 2 点を含む場合は除外して考えます。

直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned}
(a-b)(y-2a^2+3)&=(2a^2-3-2b^2+3)(x-a) \\
y-2a^2+3&=2(a+b)(x-a) \\
2(a+b)x-y-2ab-3&=0
\end{aligned}$$

ですからこれが円と接する条件は

$$\begin{aligned}
1&=\frac{|-2ab-3|}{\sqrt{4(a+b)^2+1}} \\
4(a+b)^2+1&=(2ab+3)^2
\end{aligned}$$

です。従って直線 BC が円と接する条件は

$$4(b+c)^2+1=(2bc+3)^2$$

です。これらを合わせると 2 次方程式：

$$\begin{aligned}
4(X+b)^2+1&=(2bX+3)^2 \\
4(1-b^2)X^2-4bX+4b^2-8&=0
\end{aligned}$$

の異なる 2 解が a, c と云うことが分かり、解と係数の関係から

$$c + a = \frac{b}{1-b^2}, \quad ca = \frac{b^2-2}{1-b^2}$$

です。すると

$$4(c+a)^2 + 1 = \frac{4b^2}{(1-b^2)^2} + 1 = \frac{b^4+2b^2+1}{(1-b^2)^2} = \frac{(b^2+1)^2}{(1-b^2)^2}$$

$$2ca + 3 = 2 \cdot \frac{b^2-2}{1-b^2} + 3 = \frac{2b^2-4+3-3b^2}{1-b^2} = \frac{-b^2-1}{1-b^2}$$

から

$$4(c+a)^2 + 1 = (2ca+3)^2$$

が成り立っていることが分かり、これは直線 CA が円に接する事を意味します。

以上から 3 回で元に戻ることが分かりました。 □

2.5 2 放物線の問題

2.5.1 x-軸を共通接線とする場合

放物線 $y = q(x-x_0)^2$ から放物線 $y = px^2$ に接線を引きます。

放物線 $y = q(x-x_0)^2$ 上の点 $(x_0, 0)$ から放物線 $y = px^2$ へ引いた（x-軸でない）接線を

$$y - pt^2 = 2pt(x-t)$$

であるとすると、点 $(x_0, 0)$ を通る条件から

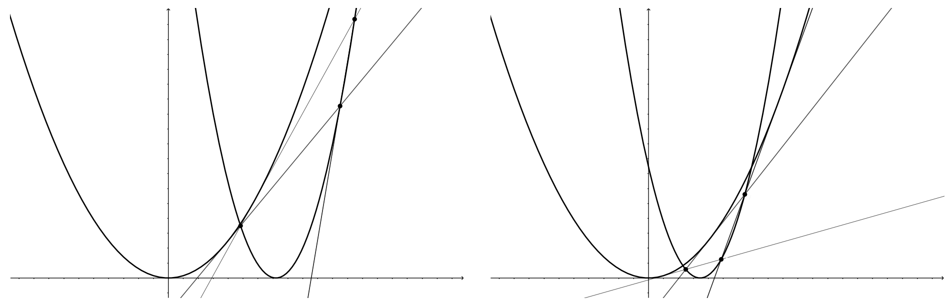
$$\begin{aligned} -pt^2 &= 2pt(x_0 - t) \\ -t &= 2x_0 - 2t \\ t &= 2x_0 \end{aligned}$$

が分かり、接点は $(2x_0, 4px_0^2)$ です。

この点が 2 放物線の交点となる条件は、

$$\begin{aligned} 4px_0^2 &= q(2x_0 - x_0)^2 \\ 4px_0^2 &= qx_0^2 \\ 4p &= q \end{aligned}$$

であって、$x_0 \neq 0$ は任意の値で良いことが分かります。



2.5.2 軸が一致している場合

放物線 $y = qx^2 - y_0\,(y_0 \neq 0)$ から放物線 $y = px^2$ に向かって接線を引きます。図のような特別な場合で計算してみると、放物線 $y = qx^2 - y_0$ 上の $y = 0$ に対応する点は

$\left(\pm\sqrt{\frac{y_0}{q}}, 0\right)$ であり、2 点 $(0, -y_0)$, $\left(\sqrt{\frac{y_0}{q}}, 0\right)$ を通る直線は

$$y + y_0 = \frac{y_0}{\sqrt{\frac{y_0}{q}}}x$$
$$y = \sqrt{qy_0}x - y_0$$

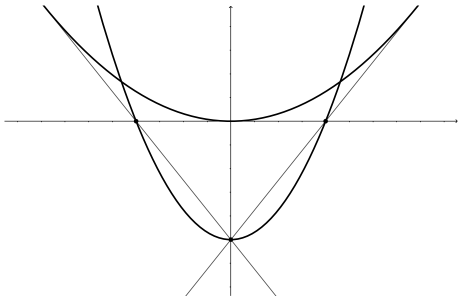
であり、これが放物線 $y = px^2$ に接する条件は

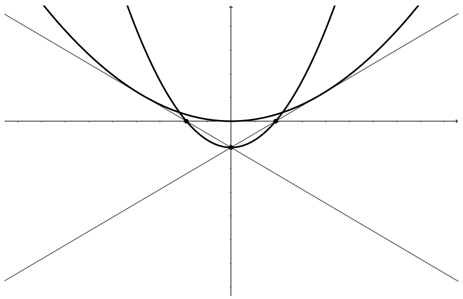
$$\sqrt{qy_0}x - y_0 = px^2$$
$$px^2 - \sqrt{qy_0} + y_0 = 0$$

の重解条件であり、$y_0 \neq 0$ ですから

$$qy_0 - 4py_0 = 0$$
$$q = 4p$$

です。先のケースと同じ条件になっています。





2.5.3 $p = \frac{1}{4}$, $q = 1$ の場合

今見た２つの例は非常に興味深いですね。頂点が x-軸方向にずれても、y-軸方向にずれても、ずれの量には関係なく３回で戻って来ます。何なんでしょうねこの２つの放物線は。

ひょっとして任意のずれで行けるんじゃないでしょうか？　ちょっと計算してみましょう。

> **具体例検証 15** 放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ 上の点 A から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に向かって接線を引きます。このときこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を B として、今度はこの点 B から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接線を引きます。さらにこの接線がもう一度放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ と交わった点を C としたときに、直線 CA が放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接する事を示してください。

放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ 上の異なる 3 点 A, B, C を

$$A(a, (a - x_0)^2 + y_0), \quad B(b, (b - x_0)^2 + y_0), \quad C(c, (c - x_0)^2 + y_0)$$

とし、これらの点は全て放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の外部にあるものと仮定します。

直線 AB の式は

$$(a - b)\{y - (a - x_0)^2 - y_0\} = \{(a - x_0)^2 - (b - x_0)^2\}(x - a)$$
$$(a - b)\{y - (a - x_0)^2 - y_0\} = \{a^2 - b^2 - 2(a - b)x_0\}(x - a)$$
$$y = (a + b - 2x_0)(x - a) + (a - x_0)^2 + y_0$$
$$y = (a + b - 2x_0)x + x_0^2 + y_0 - ab$$

ですからこれが放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に接するための条件は

$$\frac{1}{4}x^2 = (a + b - 2x_0)x + x_0^2 + y_0 - ab$$
$$0 = \frac{1}{4}x^2 - (a + b - 2x_0)x - x_0^2 - y_0 + ab$$

の重解条件となり、それは

$$0 = (a + b - 2x_0)^2 - (-x_0^2 - y_0 + ab)$$
$$ab - x_0^2 - y_0 = (a + b - 2x_0)^2$$

となります。

全く同様にして直線 BC が放物線に接する条件は

$$bc - x_0^2 - y_0 = (b + c - 2x_0)^2$$

ですからこれらを合わせて２次方程式：

$$bX - x_0^2 - y_0 = (b + X - 2x_0)^2$$
$$0 = X^2 + (b - 4x_0)X + (b - 2x_0)^2 + x_0^2 + y_0$$

の異なる２解が c, a であることが分かります。

すると解と係数の関係によって

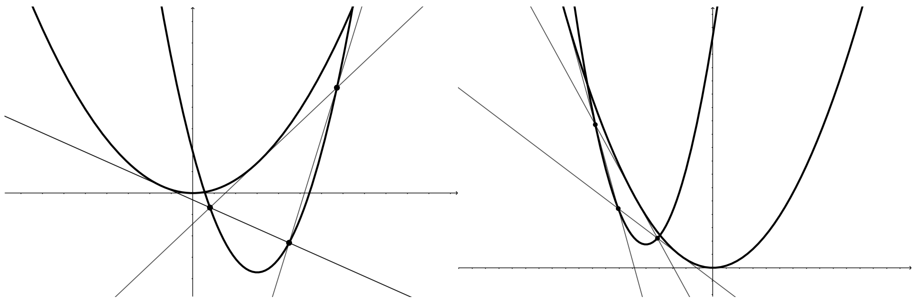
$$c + a = 4x_0 - b, \qquad ca = (b - 2x_0)^2 + x_0^2 + y_0$$

であることが分かりますが、このとき

$$\begin{aligned} ca - x_0^2 - y_0 &= (b - 2x_0)^2 \\ &= (4x_0 - b - 2x_0)^2 \\ &= (c + a - 2x_0)^2 \end{aligned}$$

であって、これは直線 CA が放物線に接している事を意味しています。

以上により、３回で元に戻って来ることが示されました。 □



位置関係が（もちろん交わらないといけませんが）どうであっても３回で戻って来るという結果は衝撃的です。他のケースでは決してそんなことはありませんでしたからね。やはりこの２つの放物線は特別な間柄にあるようです。ではそのような特別な間柄はこの２本だけのことなのでしょうか？　一般の場合を調べてみる必要があります。

2.5.4　一般の場合

放物線 $y = (x - x_0)^2 + y_0$ から放物線 $y = px^2$ に接線を引く場合を考えます。ただし $0 < p \neq 1$ とし、２放物線は異なる２点で交わる場合のみ考えます。

$$\begin{cases} y = px^2 & ：放物線 P_1 \\ y = (x - x_0)^2 + y_0 & ：放物線 P_2 \end{cases}$$

まず２放物線の交点を求めます。

$$\begin{aligned} px^2 &= (x - x_0)^2 + y_0 \\ 0 &= (1 - p)x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y_0 \\ &= x^2 - 2\frac{x_0}{1-p}x + \frac{x_0^2 + y_0}{1-p} \\ &= \left(x - \frac{x_0}{1-p}\right)^2 - \frac{x_0^2}{(1-p)^2} + \frac{x_0^2 + y_0}{1-p} \\ \left(x - \frac{x_0}{1-p}\right)^2 &= \frac{px_0^2 + (p-1)y_0}{(1-p)^2} \\ x &= \frac{x_0 \pm \sqrt{px_0^2 + (p-1)y_0}}{1-p} \end{aligned}$$

ただし、ここで $px_0^2 + (p-1)y_0 > 0$ でなければ題意のようには交わりません。

従って２交点のうち x-座標の大きい方を A とすれば

$$A : (x_A, y_A) = (x_A, px_A^2) = \left(\frac{x_0 + \sqrt{px_0^2 + (p-1)y_0}}{1-p}, p\left(\frac{x_0 + \sqrt{px_0^2 + (p-1)y_0}}{1-p}\right)^2\right)$$

です。

次にこの点 A での放物線 P_1 の接線の方程式は

$$y = 2px_Ax - px_A^2$$

ですから、この接線と放物線 P_2 の交点のうち点 A でない点 B を求めると

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + y_0 &= 2px_Ax - px_A^2 \\ x^2 - (2x_0 + 2px_A)x + px_A^2 + x_0^2 + y_0 &= 0 \end{aligned}$$

の１つの解が $x = x_A$ であることから

$$x_B = 2x_0 + 2px_A - x_A = 2x_0 + (2p - 1)x_A$$

であって、更に

$$y_B = 2px_Ax_B - px_A^2 = px_A(2x_B - x_A)$$

です。

最後に点 B から放物線 P_1 に引いたもう１本の接線の接点を $C(x_C, y_C)$ とすれば、放物線の極線の性質から

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_B$$
$$x_C = 2x_B - x_A$$
$$y_C = px_C^2$$

です。

すると直線 BC の傾きは放物線 P_1 の接線であることから $2px_C$ であり、これが放物線 P_2 の点 B での接線の傾き $2(x_B - x_0)$ に一致すれば直線 BC は共通接線ということになりますから、その条件は

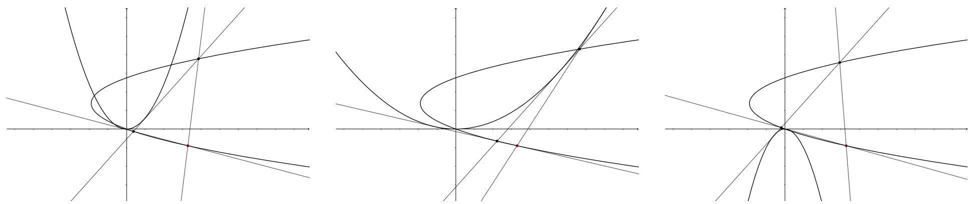
$$\begin{aligned}
2(x_B - x_0) &= 2px_C \\
x_B - x_0 &= px_C \\
x_B - x_0 &= p(2x_B - x_A) \\
px_A - x_0 &= (2p-1)x_B \\
&= (2p-1)\{2x_0 + (2p-1)x_A\} \\
2(1-2p)x_0 - x_0 &= \{(2p-1)^2 - p\}x_A \\
(1-4p)x_0 &= (4p-1)(p-1)x_A \\
(1-4p)\{x_0 - (1-p)x_A\} &= 0 \\
(1-4p)\left\{x_0 - x_0 - \sqrt{px_0^2 + (p-1)y_0}\right\} &= 0 \\
(1-4p)\sqrt{px_0^2 + (p-1)y_0} &= 0
\end{aligned}$$

ですが、最初に注意したようにルートの中身は 0 ではない場合を考えていますから、結局条件は $p = \frac{1}{4}$ と云うことになります。

従って、軸が平行で同じ開き方向の２放物線で３回で戻って来るのはやはり $y = \frac{1}{4}x^2$ と $y = (x - x_0)^2 + y_0$ のペアしかないことが分かりました。凄いですね。

2.5.5　軸が垂直な場合　その１　偶然の例

これは色々いじっているうちにとんでもないことを発見しました：



２本の放物線：

$$\begin{cases} y = px^2 \\ x = (y - y_0)^2 + x_0 \end{cases}$$

を考えていましたが、ある p, x_0, y_0 で３回で戻って来るとすると、同じ (x_0, y_0) で、任意の p で（マイナスでも OK です）３回で戻って来そうな気配があります。

そこで、何か特別な計算できるケースはないかと探してみたところ、

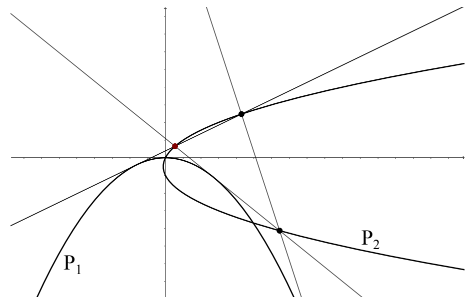
$$\begin{cases} y = px^2 \\ x = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \end{cases}$$

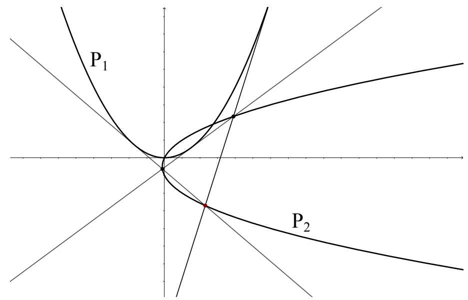
が上手く行きそうです。

具体例検証 16 放物線 $P_2 : x = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$ 上の、放物線 $P_1 : y = px^2\ (p \neq 0)$ の外部にある点 A から放物線 P_1 に向かって接線を引き、この接線がまた放物線 P_2 と交わった点を B とします。

次に点 B から放物線 P_1 に接線を引き、また放物線 P_2 と交わった点を C とします。

このとき直線 CA が放物線 P_1 に接することを示してください。





異なる３点 A, B, C を

$$A\left(\left(a+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}, a\right),\quad B\left(\left(b+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}, b\right),\quad C\left(\left(c+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}, c\right)$$

とします。このとき a, b, c は全て異なります。

直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned}
\left\{\left(a+\frac{1}{4}\right)^2-\left(b+\frac{1}{4}\right)^2\right\}(y-a) &= (a-b)\left\{x-\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\right\}\\
(a-b)\left(a+b+\frac{1}{2}\right)(y-a) &= (a-b)\left\{x-\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\right\}\\
\left(a+b+\frac{1}{2}\right)(y-a) &= x-\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\\
\left(a+b+\frac{1}{2}\right)(y-a)+\left(a+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16} &= x\\
\left(a+b+\frac{1}{2}\right)y-ab &= x
\end{aligned}$$

であり、これが放物線 P_1 に接する条件は

$$\begin{aligned}
y &= p\left\{\left(a+b+\frac{1}{2}\right)y-ab\right\}^2\\
&= p\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2y^2-2pab\left(a+b+\frac{1}{2}\right)y+pa^2b^2\\
0 &= p\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2y^2-\left\{2pab\left(a+b+\frac{1}{2}\right)+1\right\}y+pa^2b^2
\end{aligned}$$

の重解条件であって、判別式により

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{2pab\left(a+b+\frac{1}{2}\right)+1\right\}^2-4p\left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2pa^2b^2\\
&= 4pab\left(a+b+\frac{1}{2}\right)+1
\end{aligned}$$

です。

全く同様にして、直線 BC が接する条件は

$$0 = 4pbc\left(b+c+\frac{1}{2}\right)+1$$

となりますから、これらを合わせれば２次方程式

$$\begin{aligned}
0 &= 4pbX\left(X+b+\frac{1}{2}\right)+1\\
&= 4pbX^2+2pb(2b+1)X+1
\end{aligned}$$

の異なる２解が c, a であることが分かります。

すると解と係数の関係から

$$c+a = -\frac{2pb(2b+1)}{4pb} = -b-\frac{1}{2},\quad ca = \frac{1}{4pb}$$

であって、このとき

$$4pca\left(c+a+\frac{1}{2}\right)+1 = \frac{1}{b}(-b)+1 = 0$$

となっていますが、これは直線 CA が放物線 P_1 に接する条件そのものですから、以上によって３回で元に戻って来ることが分かりました。　□

任意の p で良いというところが凄いですね。軸が平行な場合と対照的です。

2.5.6　軸が垂直な場合　その２　原点を通る場合

しかしこの例はどのようにして見つけられたのでしたでしょうか。

２放物線の交点は一般に 4 点ありますから４次方程式が出て来るわけですが、簡単な場合と云うことでまず原点を通る場合を考え、更に係数が簡単になるように $\frac{1}{p}$ を考えたのでした。従ってそのプロセスでは特に『３回で戻って来る』条件のようなものは使っておらず、まさにたまたま見つかったとしか言いようがありませんでした。

どうやら原点を通ることがポイントのようですが・・・

研究課題 4 原点を通る放物線 $P_2: x=(y-y_0)^2-y_0^2$ 上の、放物線 $P_1: y=px^2\ (p\neq 0)$ の外部にある点 A から放物線 P_1 に向かって接線を引き、この接線がまた放物線 P_2 と交わった点を B とします。

次に点 B から放物線 P_1 に接線を引き、また放物線 P_2 と交わった点を C とします。

このとき直線 CA が放物線 P_1 に接することを示してください。

異なる３点 A, B, C を

$$A\left(a^2-2y_0a, a\right), \quad B\left(b^2-2y_0b, b\right), \quad C\left(c^2-2y_0c, c\right)$$

とします。このとき a, b, c は全て異なります。

直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned}\left\{a^2-2y_0a-b^2+2y_0b\right\}(y-a) &= (a-b)\left\{x-a^2+2y_0a\right\} \\ (a-b)(a+b-2y_0)(y-a) &= (a-b)\left\{x-a^2+2y_0a\right\} \\ (a+b-2y_0)(y-a) &= x-a^2+2y_0a \\ (a+b-2y_0)(y-a)+a^2-2y_0a &= x \\ (a+b-2y_0)y-ab &= x\end{aligned}$$

であり、これが放物線 P_1 に接する条件は

$$\begin{aligned}y &= p\left\{(a+b-2y_0)y-ab\right\}^2 \\ &= p(a+b-2y_0)^2y^2-2pab(a+b-2y_0)y+pa^2b^2 \\ 0 &= p(a+b-2y_0)^2y^2-\left\{2pab(a+b-2y_0)+1\right\}y+pa^2b^2\end{aligned}$$

の重解条件であって、判別式により

$$\begin{aligned}0 &= \left\{2pab(a+b-2y_0)+1\right\}^2-4p(a+b-2y_0)^2pa^2b^2 \\ &= 4pab(a+b-2y_0)+1\end{aligned}$$

です。

全く同様にして、直線 BC が接する条件は

$$0 = 4pbc(b+c-2y_0)+1$$

となりますから、これらを合わせれば２次方程式

$$\begin{aligned}0 &= 4pbX(X+b-2y_0)+1 \\ &= 4pbX^2+4pb(b-2y_0)X+1\end{aligned}$$

の異なる２解が c, a であることが分かります。

すると解と係数の関係から

$$c+a = -\frac{4pb(b-2y_0)}{4pb} = 2y_0-b, \quad ca = \frac{1}{4pb}$$

であって、このとき

$$4pca(c+a-2y_0)+1 = \frac{1}{b}(-b)+1 = 0$$

となっていますが、これは直線 CA が放物線 P_1 に接する条件そのものですから、以上によって３回で元に戻って来ることが分かりました。 □

やはり、原点を通ることが重要だったようです。これは、ターゲットの放物線の頂点を通ると云うことです。

2.5.7 交点から引いた接線の詳細

２放物線は原点で交わっていますが、原点における放物線 P_1 の接線は x-軸であり、この接線は放物線 P_2 と１点（原点）でしか交わりません（P_2 の軸が x-軸と平行なため）。

また、２放物線は最大で４点を共有しており、交点は連立方程式：

$$\begin{cases} y = px^2 \\ x = (y-y_0)^2-y_0^2 \end{cases}$$

を満たしています。従って交点の x 座標は４次方程式：

$$\begin{aligned}x &= (px^2-y_0)^2-y_0^2 \\ 0 &= p^2x^4-2py_0x^2-x \\ &= x(p^2x^3-2py_0x-1)\end{aligned}$$

を満たしています。

そこで原点でない交点の１つを $A(a, pa^2)$ としたとき、$a \neq 0$ は

$$p^2a^3-2py_0a-1 \tag{2.3}$$

を満たしています。

点 $A(a, pa^2)$ での放物線 P_1 の接線は

$$\begin{aligned}y-pa^2 &= 2pa(x-a) \\ y &= 2pax-pa^2\end{aligned}$$

であり、この接線と放物線 P_2 の交点の x 座標は

$$
\begin{aligned}
x &= (2pax - pa^2 - y_0)^2 - y_0^2 \\
&= 4p^2a^2x^2 - 4pa(pa^2 + y_0)x + (pa^2 + y_0)^2 - y_0^2 \\
0 &= 4p^2a^2x^2 - (4p^2a^3 + 4pay_0 + 1)x + (pa^2 + y_0)^2 - y_0^2 \\
&= (x - a)\left(4p^2a^2x - \{4pay_0 + 1\}\right) + (pa^2 - y_0)^2 - y_0^2 - a
\end{aligned}
$$

を満たしますが、この最後の項は、点 $A(a, pa^2)$ が P_2 上にある条件から 0 となって、結局、

$$(x - a)\left(4p^2a^2x - \{4pay_0 + 1\}\right) = 0 \tag{2.4}$$

を満たします。

ここで

$$4p^2a^3 - 4py_0a - 1 = 0$$

が成り立っている場合は上の方程式は $(x - a)^2 = 0$ であり、この接線は P_2 にも接していることが分かります。このような場合は、先に見た a の満たす条件 (2.3) と合わせて

$$
\begin{cases}
p^2a^3 - 2py_0a - 1 = 0 \\
4p^2a^3 - 4py_0a - 1 = 0
\end{cases}
$$

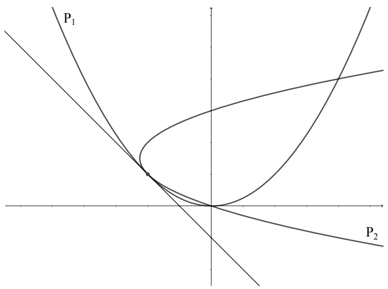
が成り立っており、第 1 式を第 2 式に代入して

$$0 = 4(2py_0a + 1) - 4py_0a - 1 = 4py_0a + 3$$

から $y_0 \neq 0$ であって

$$a = -\frac{3}{4py_0}$$

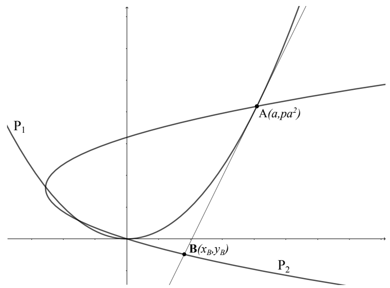
です。これは 2 放物線の接点です。



点 A が 2 放物線の接点でない交点であると仮定すると、点 $A(a, pa^2)$ での放物線 P_1 の接線は点 A でない点 $B(x_B, y_B)$ で放物線 P_2 と交わりますが、(2.4) によればその x 座標は

$$x_B = \frac{4pay_0 + 1}{4p^2a^2}$$

です。



ここで、$(x_B, y_B) = (-y_0^2, y_0)$ である可能性を探ると、

$$
\begin{aligned}
(x_B, y_B) = (-y_0^2, y_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_B &= x_0 \\
4pay_0 + 1 &= -4p^2a^2y_0^2 \\
4p^2a^2y_0^2 + 4pay_0 + 1 &= 0 \\
(2py_0 + 1)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

ですが、(2.3) によれば

$$(p^2a^3)^2 = 0$$

と云うことになり、$p, a \neq 0$ なのでこれはあり得ません。

従って点 $B(x_B, y_B)$ での放物線 P_2 の接線は

$$(x + y_0^2) + (x_B + y_0^2) = 2(y_B - y_0)(y - y_0)$$

であり、この接線は y 軸に垂直ではない（$y_B \neq y_0$）ので放物線 P_1 と交わりますが、その交点は連立方程式：

$$
\begin{cases}
x = (y - y_0)^2 - y_0^2 \\
(x + y_0^2) + (x_B + y_0^2) = 2(y_B - y_0)(y - y_0)
\end{cases}
$$

の解であり、その x 座標は

$$
\begin{aligned}
x+y_0^2 &= (y-y_0)^2 \\
4(y_B-y_0)^2(x+y_0^2) &= 4(y_B-y_0)^2(y-y_0)^2 \\
4(y_B-y_0)^2(x+y_0^2) &= \left\{(x+y_0^2)+(x_B+y_0^2)\right\}^2 \\
0 &= (x+y_0^2)^2+2\left\{(x_B+y_0^2)-2(y_B-y_0)^2\right\}(x+y_0^2)+(x_B+y_0^2)^2
\end{aligned}
$$

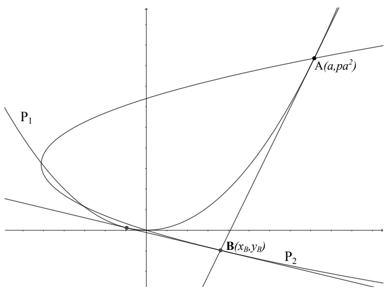
を満たしています。しかしここで点 B が放物線 P_2 上にあることによれば

$$x_B+y_0^2=(y_B-y_0)^2$$

が成り立っていますので更に

$$
\begin{aligned}
0 &= (x+y_0^2)^2-2(x_B+y_0^2)(x+y_0^2)+(x_B+y_0^2)^2 \\
&= \left\{(x+y_0^2)-(x_B+y_0^2)\right\}^2
\end{aligned}
$$

が分かり、放物線 P_1 との交点はただ 1 つ、つまり接していることが分かります。従ってこれは共通接線です。



2.5.8　軸が垂直な場合　その３　原点を通らない場合

さて、では原点を通ることは必要な条件なのでしょうか？

$$
\begin{cases}
y=px^2 & （放物線 P_1） \\
x=(y-y_0)^2+x_0 & （放物線 P_2）
\end{cases}
$$

放物線 P_2 が原点を通らない場合、つまり、$y_0^2+x_0\neq 0$ であるとき、P_1 の頂点（原点）での接線である x-軸は必ず 1 点で P_2 と交わりますが、この点を A とすると $A(y_0^2+x_0,0)$ です。

点 A から放物線 P_1 に引いたもう 1 本の接線の接点を $Q(x_Q,y_Q)$ とします。すると極線の性質から

$$x_Q=2x_A=2(y_0^2+x_0),\quad y_Q=px_Q^2=4px_A^2=4p(y_0^2+x_0)^2$$

従って

$$Q(2x_A,4px_A^2)=\left(2(y_0^2+x_0),4p(y_0^2+x_0)^2\right)$$

であって、接線 AQ は

$$AQ:\quad y=4px_A(x-x_A)=4p(y_0^2+x_0)(x-y_0^2-x_0)$$

です。

するとこの接線 AQ と放物線 P_2 の交点は一般に 2 点あり、一方が点 A ですから、もう一方を点 $B(x_B,y_B)$ としておきます（ただし、点 B は点 A に一致するかも知れません）。

実際に交点が 2 点あった場合、点 B から放物線 P_1 に（接線 AQ とは別の）接線を引くと、A,B でない点 C で放物線 P_2 と交わります。C は x-軸上にはなく、点 B でもありませんから、直線 CA は放物線 P_1 には接しません。従ってこの場合は３回では戻って来ません。

そうすると、３回で戻って来るためには点 A,B が一致しなければならず、直線 AQ は共通接線であることになります。

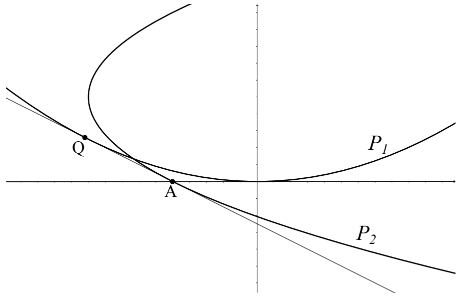
x-座標は 2 次方程式；

$$
\begin{aligned}
x &= (4px_A(x-x_A)-y_0)^2+x_0 \\
x &= 16p^2x_A^2(x-x_A)^2-8px_Ay_0(x-x_A)+y_0^2+x_0 \\
0 &= 16p^2x_A^2x^2-\{32p^2x_A^3+8px_Ay_0+1\}x+16p^2x_A^4+8px_A^2y_0+y_0^2+x_0 \\
&= (16p^2x_A^2x-16p^2x_A^3-8px_Ay_0-1)(x-x_A)
\end{aligned}
$$

の解でしたからこれの重解条件を求めると

$$
\begin{aligned}
\frac{16p^2x_A^3-8px_Ay_0-1}{16p^2x_A^2} &= x_A \\
8px_Ay_0+1 &= 0 \\
8p(y_0^2+x_0)y_0+1 &= 0
\end{aligned}
$$

となります。

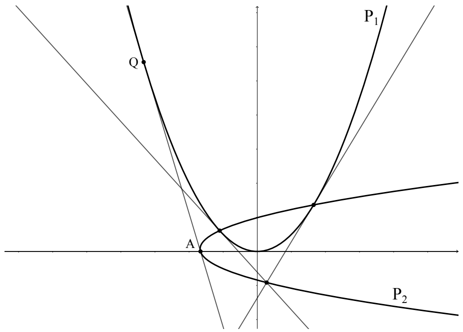


ではこの場合に本当に３回で戻って来るのでしょうか？

これは戻って来ないように思われます。

この場合はどうやら２放物線の２交点での P_1 の２接線が P_2 上の点で交わってしまいます。３回で戻って来るのはやはり一方の接線が交点を通り、もう一方が共通接線になるケースのみのようです。P_2 の軸と平行な接線がある場合は、放物線から円に接線を引く場合に有効に使いましたが、やはりそのような（平行）接線が２本必要で、無限遠点で交わると考えられなければならないのでしょうか。でも放物線には２本の平行な接線は存在しませんから出来ないわけです。

と云うことは結局、３回で戻って来るのは原点を通るときだけと云うことになります。この部分をきちんと計算で示したいのですが・・・



2.5.9 Cayley の条件

ちなみに Cayley 先生の条件では

$$\begin{cases} x - y^2 + 2y_0y - x_0 - y_0^2 = 0 & ：放物線\ P_2 \\ px^2 - y = 0 & ：放物線\ P_1 \end{cases}$$

として

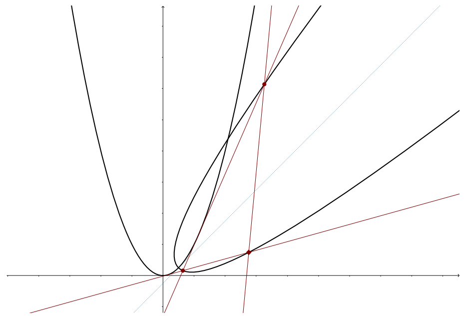
$$P_1 = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & y_0 \\ \frac{1}{2} & y_0 & -x_0 - y_0^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(t) = |tP_2 - P_1| = \begin{vmatrix} -p & 0 & \frac{1}{2}t \\ 0 & -t & y_0t + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t & y_0t + \frac{1}{2} & -(x_0 + y_0^2)t \end{vmatrix} = \frac{1}{4}t^3 - px_0t^2 + py_0t + \frac{1}{4}p$$

$$\left\{\Delta(t)^{\frac{1}{2}}\right\}''\Big|_{t=0} = -\frac{1}{4}\Delta(0)^{-\frac{3}{2}}\Delta'(0)^2 + \frac{1}{2}\Delta(0)^{-\frac{1}{2}}\Delta''(0) = -2\sqrt{p}(x_0 + y_0^2)$$

となって、やはり３回で戻って来るための（必要十分）条件は原点を通ることです。

2.5.10 軸が直交しない場合



おそらく、傾いた軸が接線になっていてちょうど（傾いた方の）頂点で２放物線が交わっていれば良いでしょう。

特別な場合に具体的に計算してみましょう。

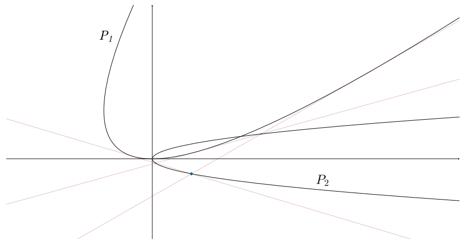
放物線 P_2 は $y^2 = x$ とし、また、放物線 $x^2 = 4py$ を $(-2p, -p)$ だけ平行移動し、更に $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた放物線 P_1 を考えます：

$$(x - y + 2\sqrt{2}p)^2 = 4\sqrt{2}p(x + y + \sqrt{2}p)$$

具体例検証 **17** 放物線 $P_2: y^2 = x$ からから放物線 P_1：

$$(x - y + 2\sqrt{2}p)^2 = 4\sqrt{2}p(x + y + \sqrt{2}p)$$

に向かって接線を引いて 3 回で元に戻って来ることを示してください。



【特別な除外点について】　引いた接線が P_2 の軸に平行な場合は次の接線を引くことが出来ません。P_1 の接線が P_2 の軸に平行になるのは原点における接線の場合のみですから、原点から出発した場合がこれに相当します。

【一般の点について】　P_2 上の異なる 3 点を：

$$A(a^2, a), \quad B(b^2, b), \quad C(c^2, c)$$

とすると、直線 AB は

$$\begin{aligned} y - a &= \frac{a-b}{a^2-b^2}(x - a^2) \\ (a+b)(y-a) &= x - a^2 \\ (a+b)y - ab &= x \end{aligned}$$

ですから、これが P_1 と接する条件は、$a + b \neq 1$ であって

$$\begin{aligned} 0 &= (x - y + 2\sqrt{2}p)^2 - 4\sqrt{2}p(x + y + \sqrt{2}p) \\ &= \left\{(a+b)y - ab - y + 2\sqrt{2}p\right\}^2 - 4\sqrt{2}p\left\{(a+b)y - ab + y + \sqrt{2}p\right\} \\ &= \left\{(a+b-1)y - ab + 2\sqrt{2}p\right\}^2 - 4\sqrt{2}p\left\{(a+b+1)y - ab + \sqrt{2}p\right\} \\ &= (a+b-1)^2y^2 - 2(a+b-1)(ab - 2\sqrt{2}p)y + (ab - 2\sqrt{2}p)^2 \\ &\qquad - 4\sqrt{2}p(a+b+1)y + 4\sqrt{2}p(ab - \sqrt{2}p) \\ &= (a+b-1)^2y^2 - 2\left\{(a+b-1)ab - 2\sqrt{2}p(a+b-1) + 2\sqrt{2}p(a+b+1)\right\}y \\ &\qquad + (ab - 2\sqrt{2}p)^2 + 4\sqrt{2}p(ab - \sqrt{2}p) \\ &= (a+b-1)^2y^2 - 2\left\{(a+b-1)ab + 4\sqrt{2}p\right\}y + a^2b^2 \end{aligned}$$

が重解をもつことですから、判別式から

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{(a+b-1)ab + 4\sqrt{2}p\right\}^2 - (a+b-1)^2a^2b^2 \\ &= 8\sqrt{2}p(a+b-1)ab + 32p^2 \\ &= (a+b-1)ab + 2\sqrt{2}p \end{aligned}$$

となります（このとき $ab \neq 0$ に注意)。

　全く同様に、直線 BC が P_1 に接する条件は $b + c \neq 1$ であって

$$0 = (b + c - 1)bc + 2\sqrt{2}p$$

となりますが、これら２式は（$b \neq 0$ でしたから）２次方程式：

$$0 = (X + b - 1)Xb + 2\sqrt{2}p = bX^2 + b(b-1)X + 2\sqrt{2}p$$

の異なる２解が a, c であることを意味していますから、解と係数の関係により

$$a + c = 1 - b, \qquad ac = \frac{2\sqrt{2}p}{b}$$

であることが分かり、このとき

$$(c + a - 1)ca + 2\sqrt{2}p = -b \cdot \frac{2\sqrt{2}p}{b} + 2\sqrt{2}p = 0$$

となりますから $(c + a - 1)ca + 2\sqrt{2}p = 0$ が成り立っており、これはまさに直線 CA が放物線 P_1 に接する条件に他なりません。

　以上から 3 回で戻ってくることが分かります。 □

一般の場合もやれそうですのでやってみましょう。

まず２つの放物線を

$$\begin{cases} x^2 = 4py & : P_0 \\ y^2 = 4qx & : P_2 \end{cases}$$

とします。

P_0 上の任意の点 $\left(2v, \frac{v^2}{p}\right)$ をとり、この点が原点に来るように P_0 を平行移動します：

$$P_{00} \,:\, (x+2v)^2 = 4p\left(y + \frac{v^2}{p}\right)$$

そしてこれを原点を中心にして角度 $-t$ だけ回転したものを P_1 とすると

$$P_1 \,:\, \{(\cos t)x - (\sin t)y + 2v\}^2 = 4p\left\{(\sin t)x + (\cos t)y + \frac{v^2}{p}\right\}$$

ここで、元々点 $\left(2v, \frac{v^2}{p}\right)$ での P_0 の接線の傾きが $\tan t$ であったとするならば、

$$\begin{aligned} 2x &= 4py' \\ 4v &= 4p\tan t \\ v &= p\tan t \end{aligned}$$

ですから、

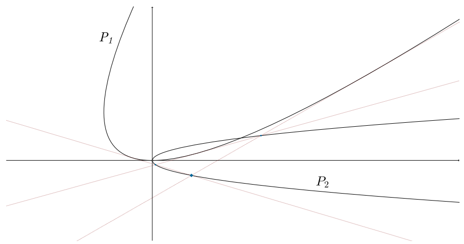
$$P_1 \,:\, \{(\cos t)x - (\sin t)y + 2p\tan t\}^2 = 4p\left\{(\sin t)x + (\cos t)y + p\tan^2 t\right\}$$

です。

研究課題 5　放物線 $P_2 : y^2 = 4qx$ からから放物線 P_1：

$$\{(\cos t)x - (\sin t)y + 2p\tan t\}^2 = 4p\left\{(\sin t)x + (\cos t)y + p\tan^2 t\right\}$$

に向かって（原点以外の点から始めて）接線を引いて３回で元に戻って来ることを示してください。ただし $0 \leq t \leq 2\pi$, $t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ とします。



P_2 上の異なる３点：

$$A\left(\frac{a^2}{q}, 2a\right), \quad B\left(\frac{b^2}{q}, 2b\right), \quad C\left(\frac{c^2}{q}, 2c\right)$$

をとります。直線 AB は

$$\begin{aligned} y - 2a &= \frac{2a-2b}{\frac{a^2}{q} - \frac{b^2}{q}}\left(x - \frac{a^2}{q}\right) \\ (a+b)(y-2a) &= 2q\left(x - \frac{a^2}{q}\right) \\ (a+b)y - 2ab &= 2qx \end{aligned}$$

であって、これが P_1 に接する条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \{(\cos t)x - (\sin t)y + 2p\tan t\}^2 - 4p\left\{(\sin t)x + (\cos t)y + p\tan^2 t\right\} \\ &= \{(\cos t)2qx - (\sin t)2qy + 4pq\tan t\}^2 - 8pq\left\{(\sin t)2qx + (\cos t)2qy + 2pq\tan^2 t\right\} \\ &= \{(\cos t)(\{a+b\}y - 2ab) - (\sin t)2qy + 4pq\tan t\}^2 \\ &\quad - 8pq\left\{(\sin t)(\{a+b\}y - 2ab) + (\cos t)2qy + 2pq\tan^2 t\right\} \\ &= \left(\{(a+b)\cos t - 2q\sin t\}\, y - 2ab\cos t + 4pq\tan t\right)^2 \\ &\quad - 8pq\left(\{(a+b)\sin t + 2q\cos t\}y - 2ab\sin t + 2pq\tan^2 t\right) \\ &= \{(a+b)\cos t - 2q\sin t\}^2 y^2 - 2\{(a+b)\cos t - 2q\sin t\}(2ab\cos t - 4pq\tan t)y \\ &\quad + (2ab\cos t - 4pq\tan t)^2 - 8pq\{(a+b)\sin t + 2q\cos t\}y \\ &\qquad + 8pq(2ab\sin t - 2pq\tan^2 t) \\ &= \{(a+b)\cos t - 2q\sin t\}^2 y^2 \\ &\quad - 2\left\{2ab(a+b)\cos^2 t - 4pq(a+b)\sin t - 4abq\sin t\cos t + 8pq^2\sin t\tan t\right\} y \\ &\qquad - 2\left\{4pq(a+b)\sin t + 8pq^2\cos t\right\} y \\ &\qquad + 4a^2b^2\cos^2 t - 16abpq\sin t + 16p^2q^2\tan^2 t + 16pqab\sin t - 16p^2q^2\tan^2 t \\ &= \{(a+b)\cos t - 2q\sin t\}^2 y^2 \\ &\quad - 2\left\{2ab(a+b)\cos^2 t - 4abq\tan t\cos^2 t + 8pq^2\frac{1}{\cos t}\right\} y + 4a^2b^2\cos^2 t \\ &= \cos^2 t\,(a+b-2q\tan t)^2 y^2 \\ &\quad - 2\left\{2ab(a+b-2q\tan t)\cos^2 t + 8pq^2\frac{1}{\cos t}\right\} y + 4a^2b^2\cos^2 t \\ &= (a+b-2q\tan t)^2 y^2 - 2\left\{2ab(a+b-2q\tan t) + \frac{8pq^2}{\cos^3 t}\right\} y + 4a^2b^2 \end{aligned}$$

の重解条件ですから

$$\begin{aligned}0 &= \left\{2ab(a+b-2q\tan t)+\frac{8pq^2}{\cos^3 t}\right\}^2 - 4a^2b^2(a+b-2q\tan t)^2\\ &= \frac{8pq^2}{\cos^3 t}\left\{4ab(a+b-2q\tan t)+\frac{8pq^2}{\cos^3 t}\right\}\\ &= 4ab(a+b-2q\tan t)+\frac{8pq^2}{\cos^3 t}\\ &= ab\cos^3 t(a+b-2q\tan t)+2pq^2\end{aligned}$$

となります。

全く同様の計算により、直線 BC が放物線 P_1 に接する条件は

$$bc\cos^3 t(b+c-2q\tan t)+2pq^2=0$$

となります。これら２式を合わせると、２次方程式：

$$\begin{aligned}0 &= Xb\cos^3 t(b+X-2q\tan t)+2pq^2\\ &= b\cos^3 tX^2+b\cos^3 t(b-2q\tan t)X+2pq^2\end{aligned}$$

の異なる２解が c, a であるということになって、解と係数の関係から

$$c+a=-(b-2q\tan t),\quad ca=\frac{2pq^2}{b\cos^3 t}$$

が分かります。従って

$$ca\cos^3 t(c+a-2q\tan t)+2pq^2=\frac{2pq^2}{b\cos^3 t}\cos^3 t\left\{-(b-2q\tan t)-2q\tan t\right\}+2pq^2=0$$

となり、これはまさに直線 CA が放物線 P_1 に接することを意味しています。

以上により 3 回で戻って来ることが示されました。 □

2.5.11 Cayley の条件

P_2 は $y^2=4qx\ (q>0)$、また P_1 は $x^2=4py\ (p>0)$ を $\begin{pmatrix} v\\ w\end{pmatrix}$ だけ平行移動してから原点を中心にして $-\theta$ 回転した（$0\leq\theta<2\pi$）ものとします。

$$\begin{aligned}P_1 &: \{(\cos\theta)x-(\sin\theta)y-v\}^2=4p\{(\sin\theta)x+(\cos\theta)y-w\}\\ P_2 &: y^2=4qx\end{aligned}$$

P_2 から P_1 に接線を引く場合、

$$P_1=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -v\cos\theta-2p\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & v\sin\theta-2p\cos\theta\\ -v\cos\theta-2p\sin\theta & v\sin\theta-2p\cos\theta & v^2+4pw\end{pmatrix},$$

$$P_2=\begin{pmatrix}0&0&-2q\\0&1&0\\-2q&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= |tP_2-P_1|\\ &= \begin{vmatrix}-\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & t-\sin^2\theta & -v\sin\theta+2p\cos\theta\\ -2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta & -v\sin\theta+2p\cos\theta & -v^2-4pw\end{vmatrix}\\ &= \cos^2\theta(t-\sin^2\theta)(v^2+4pw)\\ &\quad +\cos\theta\sin\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)\\ &\quad +\cos\theta\sin\theta(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)(-v\sin\theta+2p\cos\theta)\\ &\quad -(t-\sin^2\theta)(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)^2\\ &\quad +(v^2+4pw)\cos^2\theta\sin^2\theta\\ &\quad +\cos^2\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)^2\\ &= \cos^2\theta(t-\sin^2\theta)(v^2+4pw)\\ &\quad +2\cos\theta\sin\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)\\ &\quad -(t-\sin^2\theta)(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)^2\\ &\quad +(v^2+4pw)\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(0) &= -\cos^2\sin^2\theta(v^2+4pw)\\&\quad+2\cos\theta\sin\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)(v\cos\theta+2p\sin\theta)\\&\quad+\sin^2\theta(v\cos\theta+2p\sin\theta)^2\\&\quad+(v^2+4pw)\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)^2\\&=2\cos\theta\sin\theta(-v^2\sin\theta\cos\theta-2pv\sin^2\theta+2pv\cos^2\theta+4p^2\cos\theta\sin\theta)\\&\quad+\sin^2\theta(v^2\cos^2\theta+4pv\cos\theta\sin\theta+4p^2\sin^2\theta)\\&\quad+\cos^2\theta(v^2\sin^2\theta-4pv\sin\theta\cos\theta+4p^2\cos^2\theta)\\&=2\cos\theta\sin\theta(4p^2\cos\theta\sin\theta)+\sin^2\theta(4p^2\sin^2\theta)+\cos^2\theta(4p^2\cos^2\theta)\\&=4p^2(\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)\\&=4p^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'(t) &= \cos^2\theta(v^2+4pw)-4q\cos\theta\sin\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)\\&\quad-(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)^2+4q(t-\sin^2\theta)(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)\\\Delta'(0) &= \cos^2\theta(v^2+4pw)-4q\cos\theta\sin\theta(-v\sin\theta+2p\cos\theta)\\&\quad-(v\cos\theta+2p\sin\theta)^2-4q\sin^2\theta(v\cos\theta+2p\sin\theta)\\&=(v^2+4pw)\cos^2\theta+4qv\cos\theta\sin^2\theta-8pq\cos^2\theta\sin\theta\\&\quad-(v^2\cos^2\theta+4pv\cos\theta\sin\theta+4p^2\sin^2\theta)-(4qv\sin^2\theta\cos\theta+8pq\sin^3\theta)\\&=4pw\cos^2\theta-8pq\cos^2\theta\sin\theta-(4pv\cos\theta\sin\theta+4p^2\sin^2\theta)-8pq\sin^3\theta\\&=4p\left(w\cos^2\theta-2q\cos^2\theta\sin\theta-v\cos\theta\sin\theta-p\sin^2\theta-2q\sin^3\theta\right)\\&=4p\left(w\cos^2\theta-2q\sin\theta-v\cos\theta\sin\theta-p\sin^2\theta\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta''(t) &= 8q(-2qt+v\cos\theta+2p\sin\theta)-8q^2(t-\sin^2\theta)\\\Delta''(0) &= 8q(v\cos\theta+2p\sin\theta)+8q^2\sin^2\theta\\&=8q(v\cos\theta+2p\sin\theta+q\sin^2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{\Delta(t)}\right\}''\Big|_{t=0} &= -\frac{1}{4}\Delta(0)^{-\frac{3}{2}}\Delta'(0)^2+\frac{1}{2}\Delta(0)^{-\frac{1}{2}}\Delta''(0)\\&=-\frac{1}{32p^3}16p^2\left(w\cos^2\theta-2q\sin\theta-v\cos\theta\sin\theta-p\sin^2\theta\right)^2\\&\quad+\frac{1}{4p}8q(v\cos\theta+2p\sin\theta+q\sin^2\theta)\\&=-\frac{1}{2p}\left(w\cos^2\theta-2q\sin\theta-v\cos\theta\sin\theta-p\sin^2\theta\right)^2\\&\quad+\frac{2q}{p}(v\cos\theta+2p\sin\theta+q\sin^2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-2p\left\{\sqrt{\Delta(t)}\right\}''\Big|_{t=0}\\&=\left(w\cos^2\theta-2q\sin\theta-v\cos\theta\sin\theta-p\sin^2\theta\right)^2-4q(v\cos\theta+2p\sin\theta+q\sin^2\theta)\\&=w^2\cos^4\theta+4q^2\sin^2\theta+v^2\cos^2\theta\sin^2\theta+p^2\sin^4\theta\\&\quad-4qw\cos^2\theta\sin\theta-2vw\cos^4\theta\sin\theta-2pw\cos^2\theta\sin^2\theta\\&\quad+4qv\cos\theta\sin^2\theta+4pq\sin^3\theta+2pv\cos\theta\sin^3\theta\\&\quad-4qv\cos\theta-8pq\sin\theta-4q^2\sin^2\theta\\&=w^2\cos^4\theta+v^2\cos^2\theta\sin^2\theta+p^2\sin^4\theta\\&\quad-4qw\cos^2\theta\sin\theta-2vw\cos^4\theta\sin\theta-2pw\cos^2\theta\sin^2\theta\\&\quad+4qv\cos\theta\sin^2\theta+4pq\sin^3\theta+2pv\cos\theta\sin^3\theta-4qv\cos\theta-8pq\sin\theta\end{aligned}$$

【$\theta=0$（軸が垂直）のとき】

$$\begin{aligned}P_1 &: (x-v)^2=4p(y-w)\\P_2 &: y^2=4qx\end{aligned}$$

$$\left\{\sqrt{\Delta(t)}\right\}''\Big|_{t=0}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0=w^2-4qv \quad\Leftrightarrow\quad P_2 \text{ は } P_1 \text{ の頂点を通る}$$

【$\theta=\pi$（軸が垂直）のとき】

$$\begin{aligned}P_1 &: (x+v)^2=-4p(y+w)\\P_2 &: y^2=4qx\end{aligned}$$

$$\left\{\sqrt{\Delta(t)}\right\}''\Big|_{t=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = w^2 + 4qv \quad \Leftrightarrow \quad P_2 \text{ は } P_1 \text{ の頂点を通る}$$

【$\theta = \frac{\pi}{2}$（軸が平行、同じ向き）のとき】

$$P_1 : (y+v)^2 = 4p(x-w)$$
$$P_2 : y^2 = 4qx$$

$$\left\{\sqrt{\Delta(t)}\right\}''\Big|_{t=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = p^2 - 4pq \quad \Leftrightarrow \quad p = 4q$$

【$\theta = \frac{3\pi}{2}$（軸が平行、逆向き）のとき】

$$P_1 : (y-v)^2 = -4p(x+w)$$
$$P_2 : y^2 = 4qx$$

$$\left\{\sqrt{\Delta(t)}\right\}''\Big|_{t=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = p^2 - 4pq + 8pq \quad \Leftrightarrow \quad p = -4q \quad \text{（あり得ない）}$$

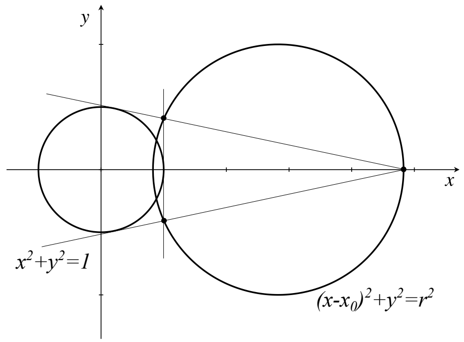
【】

2.6　２円の問題

円と円の場合は軸がずれるかどうかは考慮する必要がありません。

2.6.1　交わる場合

円周：$(x-x_0)^2 + y^2 = r^2\,(x_0 > 0)$ 上の点から単位円に接線を引く場合を考えます。図のような特別な場合を考えて計算してみましょう。



円周 $(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$ 上の $x = 1$ に対応する点は $\left(1, \pm\sqrt{r^2 - (1-x_0)^2}\right)$ であり、点 $(x_0 + r, 0)$ と点 $\left(1, \sqrt{r^2 - (1-x_0)^2}\right)$ を結ぶ直線は

$$\begin{aligned}(1 - x_0 - r)y &= \sqrt{r^2 - (1-x_0)^2}(x - x_0 - r)\\ 0 &= \sqrt{r^2 - (1-x_0)^2}x + (x_0 + r - 1)y - (x_0 + r)\sqrt{r^2 - (1-x_0)^2}\end{aligned}$$

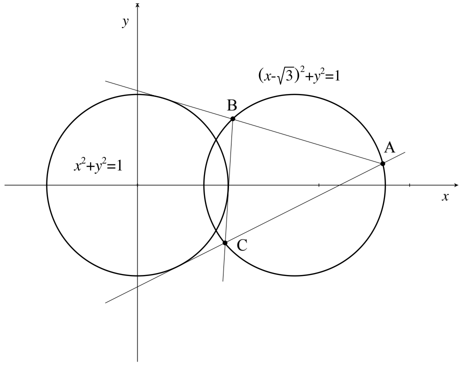
ですから、これが単位円と接する条件は

$$\begin{aligned}1 &= \frac{|-(x_0+r)\sqrt{r^2-(1-x_0)^2}|}{\sqrt{r^2-(1-x_0)^2+(x_0+r-1)^2}}\\ r^2-(1-x_0)^2+(x_0+r-1)^2 &= (x_0+r)^2\{r^2-(1-x_0)^2\}\\ (x_0+r-1)^2 &= \{(x_0+r)^2-1\}\{r^2-(1-x_0)^2\}\\ &= (x_0+r-1)(x_0+r+1)(r-1+x_0)(r+1-x_0)\\ 1 &= (r+1+x_0)(r+1-x_0)\\ 1 &= (r+1)^2 - x_0^2\end{aligned}$$

となります（$x_0 + r > 1$ に注意）。例えば $r = 1, x_0 = \sqrt{3}$、$r = 2, x_0 = 2\sqrt{2}$ などです。

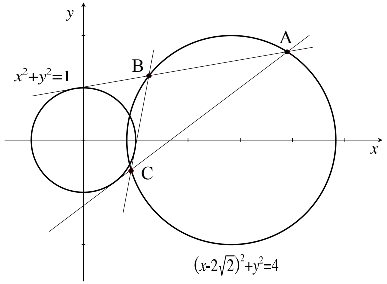
具体例検証 18 円周 $C_1 : (x-\sqrt{3})^2+y^2=1$ 上の点 A から円 $C_2 : x^2+y^2=1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度円周 C_1 と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円 C_2 に接線を引き（さっきとは別の接線にします)、また円周 C_1 と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円 C_2 に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は円 C_2 の外部にあるとします。



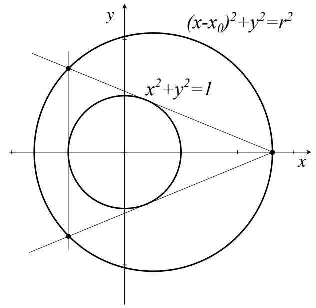
具体例検証 19 円周 $C_1 : (x-2\sqrt{2})^2+y^2=4$ 上の点 A から円 $C_2 : x^2+y^2=1$ に向かって接線を引き、その接線がもう一度円周 C_1 と交わった点を B とします。今度は点 B から同様に円 C_2 に接線を引き（さっきとは別の接線にします)、また円周 C_1 と交わった点を C とします。

このとき、点 C から円 C_2 に引いた接線は点 A を通ることを示して下さい。ただし、点 A は円 C_2 の外部にあるとします。



2.6.2 交わらない（内部にある）場合

円周：$(x-x_0)^2+y^2=r^2$ $(x_0-r<-1, 1<x_0+r$ 上の点から単位円に接線を引く場合を考えます。図のような特別な場合を考えて計算してみましょう。



円周 $(x-x_0)^2+y^2=r^2$ 上の $x=-1$ に対応する点は $\left(-1, \pm\sqrt{r^2-(-1-x_0)^2}\right)$ であり、点 $(x_0+r, 0)$ と点 $\left(-1, \sqrt{r^2-(-1-x_0)^2}\right)$ を結ぶ直線は

$$
\begin{aligned}
(-1-x_0-r)y &= \sqrt{r^2-(1+x_0)^2}(x-x_0-r) \\
0 &= \sqrt{r^2-(1+x_0)^2}x+(x_0+r+1)y-(x_0+r)\sqrt{r^2-(1+x_0)^2}
\end{aligned}
$$

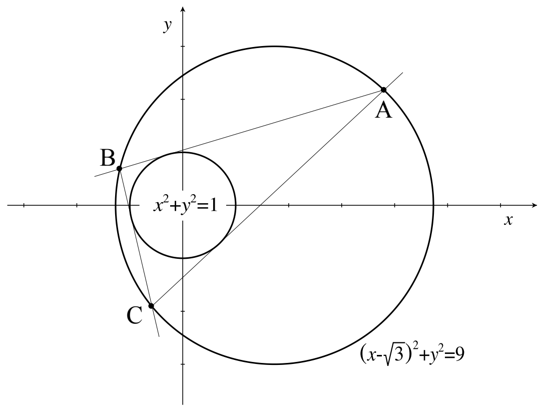
ですから、これが単位円と接する条件は

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{|-(x_0+r)\sqrt{r^2-(1+x_0)^2}|}{\sqrt{r^2-(1+x_0)^2+(x_0+r+1)^2}} \\
r^2-(1+x_0)^2+(x_0+r+1)^2 &= (x_0+r)^2\{r^2-(1+x_0)^2\} \\
(x_0+r+1)^2 &= \{(x_0+r)^2-1\}\{r^2-(1+x_0)^2\} \\
&= (x_0+r-1)(x_0+r+1)(r-1-x_0)(r+1+x_0) \\
1 &= (r-1+x_0)(r-1-x_0) \\
1 &= (r-1)^2-x_0^2
\end{aligned}
$$

となります（$x_0+r>1$ に注意)。例えば $r=2, x_0=0$、$r=3, x_0=\sqrt{3}$ などです。

具体例検証 20 円周 $(x-\sqrt{3})^2+y^2=9$ 上の点 A から単位円に向かって接線を引き、その接線がまた外の円周と交わった点を B とします。つぎに点 B から単位円に接線を引き、これがまた外の円周と交わった点を C とします。このとき直線 CA

が単位円に接する事を示してください。



【特殊な点について】垂直な接線、すなわち、直線 $x=\pm 1$ が現れる場合を考えておきます。

外の円周上の点で $x=\pm 1$ に対応する点は

$$\begin{aligned} y^2 &= 9-(\pm 1-\sqrt{3})^2 \\ &= 5\pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

ですから、例えば点 $\left(\pm 1, \sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}\right)$ と点 $(\sqrt{3}\mp 3, 0)$ を結ぶ直線は

$$\begin{aligned} (\pm 1-\sqrt{3}\pm 3)y &= (5\pm 2\sqrt{3})(x-\sqrt{3}\pm 3) \\ 0 &= \sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}x-(\pm 4-\sqrt{3})y+\sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}(-\sqrt{3}\pm 3) \end{aligned}$$

であり、これと原点との距離は

$$\begin{aligned} \frac{|\sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}(-\sqrt{3}\pm 3)|}{\sqrt{\sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}^2+(\pm 4-\sqrt{3})^2}} &= \frac{\sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}(3\mp\sqrt{3})}{\sqrt{5\pm 2\sqrt{3}+19\mp 8\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{(5\pm 2\sqrt{3})(12\mp 6\sqrt{3})}}{\sqrt{24\mp 6\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{24\mp 6\sqrt{3}}}{\sqrt{24\mp 6\sqrt{3}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となりますから、この直線は単位円の接線であることが分かります（対称性から、y-座標がマイナスの方も同様であることが分かります）。

以上により、3 点が

$$\left(\pm 1, \sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}\right), \left(\pm 1, -\sqrt{5\pm 2\sqrt{3}}\right), (\sqrt{3}\mp 3, 0)$$

を含む場合は３回で元に戻って来ることが分かりました。

【一般の点について】上で見た特殊な点は除きます。外の円周上の有理形パラメータ表示を使い、3 点を

$$A\left(3\frac{1-a^2}{1+a^2}+\sqrt{3}, 3\frac{2a}{1+a^2}\right),\quad B\left(3\frac{1-b^2}{1+b^2}+\sqrt{3}, 3\frac{2b}{1+b^2}\right),\quad C\left(3\frac{1-c^2}{1+c^2}+\sqrt{3}, 3\frac{2c}{1+c^2}\right)$$

と置きます。このとき
直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned} &\left(3\frac{1-a^2}{1+a^2}-3\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)\left(y-3\frac{2a}{1+a^2}\right) \\ &\qquad = \left(3\frac{2a}{1+a^2}-3\frac{2b}{1+b^2}\right)\left(x-3\frac{1-a^2}{1+a^2}-\sqrt{3}\right) \\ &\left\{(1-a^2)(1+b^2)-(1-b^2)(1+a^2)\right\}\left(y-3\frac{2a}{1+a^2}\right) \\ &\qquad = 2\left\{a(1+b^2)-b(1+a^2)\right\}\left(x-3\frac{1-a^2}{1+a^2}-\sqrt{3}\right) \\ &-2(a^2-b^2)\left(y-3\frac{2a}{1+a^2}\right) = 2(a-b)(1-ab)\left(x-3\frac{1-a^2}{1+a^2}-\sqrt{3}\right) \\ &-(a+b)\left(y-3\frac{2a}{1+a^2}\right) = (1-ab)\left(x-3\frac{1-a^2}{1+a^2}-\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

すなわち

$$(1-ab)x+(a+b)y+\left(\sqrt{3}-3\right)ab-\left(3+\sqrt{3}\right)=0$$

であり、これが単位円と接する条件は

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\left|\left(\sqrt{3}-3\right)ab-\left(3+\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{(1-ab)^2+(a+b)^2}} \\ (1-ab)^2+(a+b)^2 &= \left\{\left(\sqrt{3}-3\right)ab-\left(3+\sqrt{3}\right)\right\}^2 \end{aligned}$$

となります。

全く同様に直線 BC が単位円と接する条件は

$$(1-bc)^2+(b+c)^2=\left\{\left(\sqrt{3}-3\right)bc-\left(3+\sqrt{3}\right)\right\}^2$$

であり、これらを合わせると、２次方程式：

$$\begin{aligned}(1-bX)^2+(b+X)^2&=\left\{\left(\sqrt{3}-3\right)bX-\left(3+\sqrt{3}\right)\right\}^2\\ 0&=\left\{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1\right\}X^2+12bX+11+6\sqrt{3}-b^2\end{aligned}$$

の異なる２解が c, a であることが分かります。

> X^2 の係数が 0 となるのは、除外した特殊点であることに注意。
>
> $$\begin{aligned}\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2&=1\\ b^2&=\frac{1}{11-6\sqrt{3}}\end{aligned}$$
>
> $$\begin{aligned}3\frac{1-b^2}{1+b^2}+\sqrt{3}&=3\frac{1-\frac{1}{11-6\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{11-6\sqrt{3}}}+\sqrt{3}\\ &=3\frac{11-6\sqrt{3}-1}{11-6\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}\\ &=\frac{30-18\sqrt{3}+12\sqrt{3}-18}{12-6\sqrt{3}}\\ &=\frac{12-6\sqrt{3}}{12-6\sqrt{3}}\\ &=1\end{aligned}$$

すると解と係数の関係から

$$c+a=\frac{-12b}{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1},\quad ca=\frac{11+6\sqrt{3}-b^2}{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1}$$

であり、

$$1-ca=\frac{\left(12-6\sqrt{3}\right)b^2-\left(12+6\sqrt{3}\right)}{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1}$$

なので

$$\begin{aligned}(1-ca)^2+(c+a)^2&=\frac{\left\{\left(12-6\sqrt{3}\right)b^2-\left(12+6\sqrt{3}\right)\right\}^2+12^2b^2}{\left\{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1\right\}^2}\\ &=\frac{\left\{\left(12-6\sqrt{3}\right)b^2+\left(12+6\sqrt{3}\right)\right\}^2}{\left\{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1\right\}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-3\right)ca-\left(3+\sqrt{3}\right)&=\frac{\left(\sqrt{3}-3\right)\left(11+6\sqrt{3}-b^2\right)-\left(3+\sqrt{3}\right)\left\{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1\right\}}{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1}\\ &=-\frac{\left(12-6\sqrt{3}\right)b^2+12+6\sqrt{3}}{\left(11-6\sqrt{3}\right)b^2-1}\end{aligned}$$

によって

$$(1-ca)^2+(c+a)^2=\left\{\left(\sqrt{3}-3\right)ca-\left(3+\sqrt{3}\right)\right\}^2$$

が得られ、これは直線 CA が単位円に接している事を示しています。

以上により、３回で元に戻って来ます。 □

3 より一般的な条件を求めて

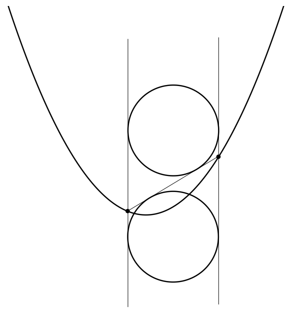
3.1 放物線から円に接線を引く場合のより一般的な設定

全ての放物線は相似なので放物線は $y = x^2$ のみ考え、円の中心をずらしたものを考えれば良いのですが、いずれ楕円を扱いたい場合を考えて $y = px^2$ でやります。

放物線 $y = px^2$ 上の点から円周

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

に向かって接線を引きます。３回で元に戻って来るための条件は何でしょうか。無限遠点を使って計算すれば、円が内部にあろうと交わっていようと、更には軸がずれていようと同じ計算で済ませることが出来ます。



放物線上の $x = x_0 \pm r$ に対応する点は $(x_0 \pm r, p(x_0 \pm r)^2)$ であり、これらの点を結んだ直線は

$$\begin{aligned}
\{(x_0 + r) - (x_0 - r)\}\{y - p(x_0 + r)^2\} &= \{p(x_0 + r)^2 - p(x_0 - r)^2\}\{x - (x_0 + r)\} \\
2r\{y - p(x_0 + r)^2\} &= 4prx_0\{x - (x_0 + r)\} \\
y - p(x_0 + r)^2 &= 2px_0\{x - (x_0 + r)\} \\
0 &= 2px_0x - y + p(x_0 + r)^2 - 2px_0(x_0 + r) \\
&= 2px_0x - y + p(x_0 + r)(r - x_0) \\
&= 2px_0x - y + p(r^2 - x_0^2)
\end{aligned}$$

となりますから、これと円周が接する条件は

$$\begin{aligned}
r &= \frac{|2px_0^2 - y_0 + p(r^2 - x_0^2)|}{\sqrt{4p^2x_0^2 + 1}} \\
r^2(4p^2x_0^2 + 1) &= \{p(x_0^2 + r^2) - y_0\}^2 \\
y_0 &= p(x_0^2 + r^2) \pm r\sqrt{4p^2x_0^2 + 1}
\end{aligned}$$

です。

これは少し変形すれば

$$\begin{aligned}
r^2(4p^2x_0^2 + 1) &= \{p(x_0^2 + r^2) - y_0\}^2 \\
&= p^2(x_0^2 + r^2)^2 - 2y_0p(x_0^2 + r^2) + y_0^2 \\
4p^2r^2x_0^2 + r^2 &= p^2(x_0^2 - r^2)^2 - 2y_0p(x_0^2 - r^2) + y_0^2 + 4p^2r^2x_0^2 - 4py_0r^2 \\
r^2 + 4py_0r^2 &= \{p(x_0^2 - r^2) - y_0\}^2 \\
r^2(4py_0 + 1) &= (px_0^2 - pr^2 - y_0)^2
\end{aligned}$$

と書き換えることが出来ます。

3.1.1 Cayley の条件

$$P : px^2 - y = 0, \quad C : x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

それぞれの特性行列は

$$P = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ -x_0 & -y_0 & x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{pmatrix}$$

ですから

$$\begin{aligned}
\Delta(t) &= |tP - C| \\
&= \begin{vmatrix} pt - 1 & 0 & x_0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}t + y_0 \\ x_0 & -\frac{1}{2}t + y_0 & -x_0^2 - y_0^2 + r^2 \end{vmatrix} \\
&= (pt - 1)(x_0^2 + y_0^2 - r^2) + x_0^2 - (pt - 1)\left(\frac{1}{2}t - y_0\right)^2 \\
&= (pt - 1)(x_0^2 + y_0^2 - r^2) + x_0^2 - (pt - 1)\left(\frac{1}{4}t^2 - y_0t + y_0^2\right) \\
&= -(pt - 1)\left(\frac{1}{4}t^2 - y_0t - x_0^2 + r^2\right) + x_0^2 \\
&= -\frac{1}{4}pt^3 + \left(py_0 + \frac{1}{4}\right)t^2 + (px_0^2 - y_0 - pr^2)t + r^2
\end{aligned}$$

となって

$$
\begin{aligned}
\Delta(0) &= r^2 \\
\Delta'(t) &= -\frac{3}{4}pt^2 + \left(2py_0 + \frac{1}{2}\right)t + px_0^2 - y_0 - pr^2 \\
\Delta'(0) &= px_0^2 - y_0 - pr^2 \\
\Delta''(t) &= -\frac{3}{2}pt + 2py_0 + \frac{1}{2} \\
\Delta''(0) &= 2py_0 + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

です。従って

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\Delta(t)}''\Big|_{t=0} &= -\frac{1}{4}\Delta(0)^{-\frac{3}{2}}\Delta'(0)^2 + \frac{1}{2}\Delta(0)^{-\frac{1}{2}}\Delta''(0) \\
&= -\frac{1}{4}r^{-3}(px_0^2 - y_0 - pr^2)^2 + \frac{1}{2}r^{-1}\left(2py_0 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}r^{-3}\left\{r^2(4py_0+1) - (px_0^2 - pr^2 - y_0)^2\right\}
\end{aligned}
$$

ですから Cayley の条件は

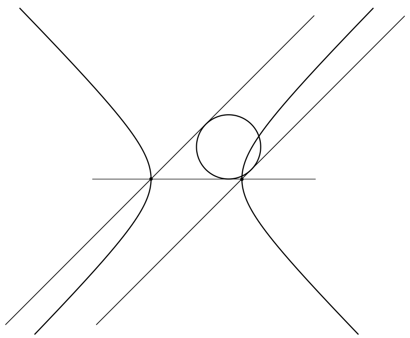
$$
r^2(4py_0+1) = (px_0^2 - pr^2 - y_0)^2
$$

となることが分かります。

3.2 双曲線から円に接線を引く場合のより一般的な設定

放物線の場合に軸と平行な接線が鍵となったように、双曲線の場合には漸近線と平行な接線が鍵となるでしょう。これを使えば、交わる場合も交わらない場合もどちらも統一的に扱うことが出来、更に軸がずれている場合にも対応出来そうです。

座標軸方向の拡大・縮小によって、ターゲットが楕円の場合も含んでいます。



双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ から円 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ に接線を引きます。

円の接線の傾きが $\frac{b}{a}$ になる点は $\mathrm{A}_\pm\left(x_0 \pm \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_0 \mp \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ の 2 点であり、これらの点での接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
\pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}(x-x_0) \mp \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}(y-y_0) &= r^2 \\
\frac{x-x_0}{a} - \frac{y-y_0}{b} &= \pm\frac{r\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \\
\frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \pm \frac{r\sqrt{a^2+b^2}}{ab}
\end{aligned}
$$

です。ここで右辺を $c_\pm$ と置けば

$$
\mathrm{A}_\pm \text{ での円の接線： } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c_\pm
$$

です。

3.2.1 円が漸近線と接しない場合

$c_+ = 0$ もしくは $c_- = 0$ の場合はこの接線は双曲線の漸近線そのものであり、双曲線と交わらないためこの後の議論が出来ません。

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ が円と接する} \quad &\Leftrightarrow \quad bx - ay = 0 \text{ と } (x_0, y_0) \text{ の距離が } r \\
&\Leftrightarrow \quad r = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2+b^2)r^2 = (bx_0 - ay_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2} = \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad c_+ = 0 \text{ または } c_- = 0
\end{aligned}
$$

従って $c_+ = 0$ であるか $c_- = 0$ である場合、つまり、円が傾き $\frac{b}{a}$ の漸近線に接している場合は、代わりに接線の傾きが $-\frac{b}{a}$ になる 2 点 $\mathrm{D}_\pm\left(x_0 \pm \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}, y_0 \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ を考え、これらの点での接線を考えます：

$$
\begin{aligned}
\pm\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}(x-x_0) \pm \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}(y-y_0) &= r^2 \\
\frac{x-x_0}{a} + \frac{y-y_0}{b} &= \pm\frac{r\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \\
\frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \pm \frac{r\sqrt{a^2+b^2}}{ab}
\end{aligned}
$$

です。ここで右辺を $f_\pm$ と置きます。

$$\mathrm{D}_\pm \text{ での円の接線：}\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=f_\pm$$

もちろんこの場合も円が漸近線に接しているかも知れません。

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ が円と接する} \quad\Leftrightarrow\quad f_+=0 \text{ または } f_-=0$$

円が２本の漸近線双方に接している場合はこの回避策も上手く行きません。

従って、まずは、円が双曲線の漸近線と接しない場合のみを考えます。

$c_+\neq 0,\ c_-\neq 0$ の場合は、これらの接線と双曲線の交点 $\mathrm{B}_\pm$ では

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}&=1\\
\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=1\\
c_\pm\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=1\\
\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{1}{c_\pm}
\end{aligned}$$

を満たしますから、

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=c_\pm\\[2mm] \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c_\pm}\end{cases}$$

が成り立っており、双曲線の交点 $\mathrm{B}_\pm$ の座標は

$$\mathrm{B}_\pm\left(\frac{a}{2}\left\{\frac{1}{c_\pm}+c_\pm\right\},\frac{b}{2}\left\{\frac{1}{c_\pm}-c_\pm\right\}\right)$$

です。

これら２点を結ぶ直線は

$$\begin{aligned}
y-\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c_+}-c_+\right)&=\frac{\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c_+}-c_+-\frac{1}{c_-}+c_-\right)}{\frac{a}{2}\left(\frac{1}{c_+}+c_+-\frac{1}{c_-}-c_-\right)}\left\{x-\frac{a}{2}\left(\frac{1}{c_+}+c_+\right)\right\}\\
&=\frac{b(c_--c_+^2c_--c_++c_+c_-^2)}{a(c_-+c_+^2c_--c_+-c_+c_-^2)}\left\{x-\frac{a}{2}\left(\frac{1}{c_+}+c_+\right)\right\}\\
&=\frac{b(1+c_+c_-)}{a(1-c_+c_-)}\left\{x-\frac{a}{2}\left(\frac{1}{c_+}+c_+\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$a(1-c_+c_-)\left\{y-\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c_+}-c_+\right)\right\}=b(1+c_+c_-)\left\{x-\frac{a}{2}\left(\frac{1}{c_+}+c_+\right)\right\}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
b(1+c_+c_-)x-a(1-c_+c_-)y+\frac{ab}{2}(1-c_+c_-)\left(\frac{1}{c_+}-c_+\right)-\frac{ab}{2}(1+c_+c_-)\left(\frac{1}{c_+}+c_+\right)&=0\\
b(1+c_+c_-)x-a(1-c_+c_-)y+\frac{ab}{2}\left\{\frac{1}{c_+}-c_+-c_-+c_+^2c_--\frac{1}{c_+}-c_+-c_--c_+^2c_-\right\}&=0\\
b(1+c_+c_-)x-a(1-c_+c_-)y-ab(c_++c_-)&=0
\end{aligned}$$

です。

$$\mathrm{B}_\pm \text{ を結ぶ直線：}\quad b(1+c_+c_-)x-a(1-c_+c_-)y-ab(c_++c_-)=0$$

> この最終形は $c_\pm=0$ の場合にも形式的には成立しており、例えば $c_+=0$ のときには
>
> $$\begin{aligned}bx-ay-abc_-&=0\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=c_-\end{aligned}$$
>
> であり、A_- における接線に一致しています。同様に $c_-=0$ の場合は A_+ における接線に一致します。
>
> この場合、以下に見る円に接する条件は明らかに満たされています。

この直線が円に接する条件は

$$r=\frac{|b(1+c_+c_-)x_0-a(1-c_+c_-)y_0-ab(c_++c_-)|}{\sqrt{b^2(1+c_+c_-)^2+a^2(1-c_+c_-)^2}}$$

ですが、ここで

$$\begin{aligned}
c_++c_-&=2\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\\
ab(c_++c_-)&=2(bx_0-ay_0)
\end{aligned}$$

なので、条件は

$$\begin{aligned}
r &= \frac{|b(1+c_+c_-)x_0 - a(1-c_+c_-)y_0 - ab(c_+ + c_-)|}{\sqrt{b^2(1+c_+c_-)^2 + a^2(1-c_+c_-)^2}} \\
&= \frac{|b(1+c_+c_-)x_0 - a(1-c_+c_-)y_0 - 2(bx_0 - ay_0)|}{\sqrt{b^2(1+c_+c_-)^2 + a^2(1-c_+c_-)^2}} \\
&= \frac{|b(-1+c_+c_-)x_0 - a(-1-c_+c_-)y_0|}{\sqrt{b^2(1+c_+c_-)^2 + a^2(1-c_+c_-)^2}} \\
&= \frac{|b(c_+c_- - 1)x_0 + a(c_+c_- + 1)y_0|}{\sqrt{b^2(c_+c_- + 1)^2 + a^2(c_+c_- - 1)^2}}
\end{aligned}$$

となり、自乗して

$$r^2\{b^2(c_+c_- + 1)^2 + a^2(c_+c_- - 1)^2\} = \{b(c_+c_- - 1)x_0 + a(c_+c_- + 1)y_0\}^2$$

を得ます。これは

$$\begin{aligned}
0 = (r^2b^2 - a^2y_0^2)(c_+c_- + 1)^2 \\
- 2abx_0y_0(c_+c_- + 1)(c_+c_- - 1) \\
+ (r^2a^2 - b^2x_0^2)(c_+c_- - 1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2abr^2(c_+c_- + 1)(c_+c_- - 1) = \{(rb - ay_0)(c_+c_- + 1) + (ra - bx_0)(c_+c_- - 1)\} \\
\{(rb + ay_0)(c_+c_- + 1) + (ra + bx_0)(c_+c_- - 1)\}
\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{(r^2b^2 - a^2y_0^2) - 2abx_0y_0 + (r^2a^2 - b^2x_0^2)\right\}(c_+c_-)^2 \\
&\quad + \left\{2(r^2b^2 - a^2y_0^2) - 2(r^2a^2 - b^2x_0^2)\right\}c_+c_- \\
&\quad + \left\{(r^2b^2 - a^2y_0^2) + 2abx_0y_0 + (r^2a^2 - b^2x_0^2)\right\} \\
&= \left\{r^2(a^2+b^2) - (bx_0 + ay_0)^2\right\}(c_+c_-)^2 \\
&\quad + 2\left\{r^2(b^2 - a^2) + b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right\}c_+c_- + \left\{r^2(a^2+b^2) - (bx_0 - ay_0)^2\right\}
\end{aligned}$$

と変形され、ここで

$$\begin{aligned}
c_+c_- &= \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)^2 - \frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2} \\
a^2b^2c_+c_- &= (bx_0 - ay_0)^2 - r^2(a^2+b^2) \\
f_+f_- &= \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)^2 - \frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2} \\
a^2b^2f_+f_- &= (bx_0 + ay_0)^2 - r^2(a^2+b^2)
\end{aligned}$$

でしたからこれは

$$0 = -a^2b^2f_+f_-(c_+c_-)^2 + 2\left\{r^2(b^2 - a^2) + b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right\}c_+c_- - a^2b^2c_+c_-$$

と書くことが出来ます。

更にこれは $c_+c_- \neq 0$ で割れば

$$0 = a^2b^2f_+f_-c_+c_- - 2\left\{r^2(b^2 - a^2) + b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right\} + a^2b^2 \tag{3.1}$$

と書けることに注意しておきます。

これを全て a, b, x_0, y_0, r で表せば

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{(bx_0 + ay_0)^2 - r^2(a^2+b^2)\right\}a^2b^2c_+c_- \\
&\quad - 2a^2b^2\left\{r^2(b^2 - a^2) + b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right\} + a^4b^4 \\
&= \left\{(bx_0 + ay_0)^2 - r^2(a^2+b^2)\right\}\left\{(bx_0 - ay_0)^2 - r^2(a^2+b^2)\right\} \\
&\quad - 2a^2b^2\left\{r^2(b^2 - a^2) + b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right\} + a^4b^4 \\
&= (a^2+b^2)^2r^4 - \left\{(bx_0 - ay_0)^2 - (bx_0 + ay_0)^2\right\}(a^2+b^2)r^2 \\
&\quad + (bx_0 + ay_0)^2(bx_0 - ay_0)^2 - 2a^2b^2(b^2 - a^2)r^2 + 2a^2b^2(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + a^4b^4 \\
&= (a^2+b^2)^2r^4 - 2\left\{\left(b^2x_0^2 + a^2y_0^2\right)(a^2+b^2) + a^2b^2(b^2 - a^2)\right\}r^2 \\
&\quad + (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)^2 - 2a^2b^2(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + a^4b^4 \\
&= (a^2+b^2)^2r^4 \\
&\quad - 2\left\{\left(b^2x_0^2 + a^2y_0^2\right)(a^2+b^2) + a^2b^2(b^2 - a^2)\right\}r^2 + \left\{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) - a^2b^2\right\}^2 \\
&= (a^2+b^2)^2r^4 - 2\left\{a^2b^2x_0^2 + a^4y_0^2 + b^4x_0^2 + a^2b^2y_0^2 + a^2b^4 - a^4b^2\right\}r^2 \\
&\quad + \left\{b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2\right\}^2
\end{aligned}$$

です。ここで

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2)(b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2) &= a^2b^2x_0^2 - a^4y_0^2 - a^4b^2 + b^4x_0^2 - a^2b^2y_0^2 - a^2b^4 \\
&= a^2b^2x_0^2 + a^4y_0^2 + b^4x_0^2 + a^2b^2y_0^2 + a^2b^4 - a^4b^2 \\
&\quad - 2a^4y_0^2 - 2a^2b^2y_0^2 - 2a^2b^4
\end{aligned}$$

によれば

$$\begin{aligned}
0 &= (a^2+b^2)^2r^4 - 2\{(a^2+b^2)(b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2) + 2a^4y_0^2 + 2a^2b^2y_0^2 + 2a^2b^4\}r^2 \\
&\quad + \left\{b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2\right\}^2 \\
&= \{(a^2+b^2)r^2 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2)\}^2 - 4(a^4y_0^2 + a^2b^2y_0^2 + a^2b^4)r^2
\end{aligned}$$

となって結局

$$\left\{(a^2+b^2)r^2-(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)\right\}^2=4a^2r^2\left\{(a^2+b^2)y_0^2+b^4\right\} \tag{3.2}$$

が得られます。これは変形すると

$$\left\{\frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+1\right\}^2=4\frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}+4\frac{r^2}{a^2}$$

とも書くことが出来ます。$a=b=1,\ x_0=y_0=\frac{1}{\sqrt{2}},\ r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合などです。

また、$y_0=0$ の場合は右辺が平方となり簡単になります：

$$\begin{aligned}\left\{\frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+1\right\}^2&=4\frac{r^2}{a^2}\\ \left|\frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+1\right|&=2\frac{r}{a}\\ \frac{r^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+1&=\pm2\frac{r}{a}\\ \frac{a^2}{b^2}r^2+r^2-x_0^2+a^2&=\pm2ar\\ \frac{a^2}{b^2}r^2+(r\mp a)^2&=x_0^2\end{aligned}$$

ただし、複号は絶対値の中身の正負によります。

3.2.2 円が漸近線に接する場合

円が $\mathrm{A}_\pm$ において漸近線 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ に接する場合 $c_\pm=0$ であり、このとき $\mathrm{A}_\mp$ における接線も漸近線に平行であり、これが別の点で双曲線と交わってしまうとそこからまた接線が引けることになって３回では戻って来ません。従って $\mathrm{A}_\mp$ における接線が双曲線と交わる点は $\mathrm{A}_\mp$ でなければなりません。つまり、$\mathrm{A}_\mp$ は双曲線と円の交点になっていなければならないでしょう。

$\mathrm{A}_\mp$ が双曲線上にある

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \frac{\left(x_0\mp\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y_0\pm\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{b^2}=1\\ &\Leftrightarrow\quad \left(bx_0\mp\frac{b^2r}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2-\left(ay_0\pm\frac{a^2r}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=a^2b^2\\ &\Leftrightarrow\quad \left(bx_0+ay_0\mp\frac{b^2r}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm\frac{a^2r}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\ &\qquad\qquad \left(bx_0-ay_0\mp\frac{b^2r}{\sqrt{a^2+b^2}}\mp\frac{a^2r}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=a^2b^2\\ &\Leftrightarrow\quad \left(bx_0+ay_0\mp\frac{(b^2-a^2)r}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(bx_0-ay_0\mp r\sqrt{a^2+b^2}\right)=a^2b^2\end{aligned}$$

ですが、

$$c_\pm=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\pm\frac{r\sqrt{a^2+b^2}}{ab}=0\quad\Leftrightarrow\quad bx_0-ay_0=\mp r\sqrt{a^2+b^2}$$

だったので、この条件のもとでは

$\mathrm{A}_\mp$ が双曲線上にある

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad 2\left(bx_0+ay_0+\frac{(b^2-a^2)r^2}{\mp r\sqrt{a^2+b^2}}\right)(bx_0-ay_0)=a^2b^2\\ &\Leftrightarrow\quad 2\left(bx_0+ay_0+\frac{(b^2-a^2)r^2}{bx_0-ay_0}\right)(bx_0-ay_0)=a^2b^2\\ &\Leftrightarrow\quad 2\{b^2x_0^2-a^2y_0^2+(b^2-a^2)r^2\}=a^2b^2\\ &\Leftrightarrow\quad \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)r^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となりますから、結局、

$$c_\pm=0\ \text{かつ}\ \mathrm{A}_\mp\ \text{が双曲線上にある}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\pm\dfrac{r\sqrt{a^2+b^2}}{ab}=0\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}+\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)r^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

です。従って円が漸近線 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ に接する場合に３回で元に戻って来るための条件は、

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)^2-\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)r^2=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}+\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)r^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

です。これは

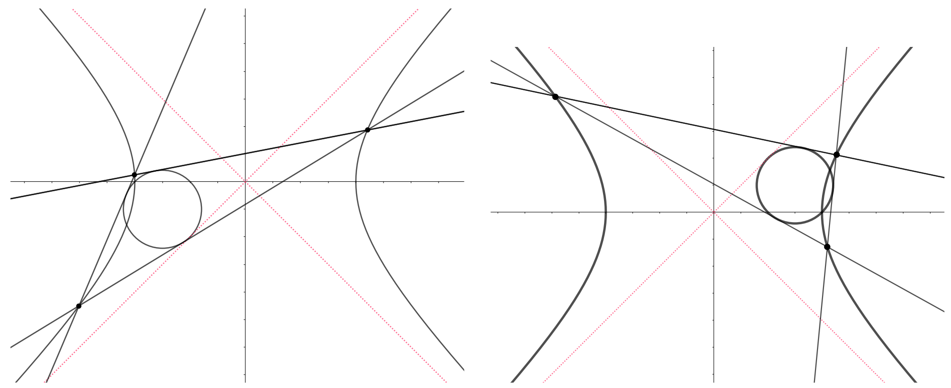
$$\begin{cases} (bx_0-ay_0)^2-(a^2+b^2)r^2=0 \\ 2\left\{b^2x_0^2-a^2y_0^2+(b^2-a^2)r^2\right\}=a^2b^2 \end{cases} \tag{3.3}$$

とも書くことが出来ます。

例えば簡単のために $a=b$ なら、この条件は

$$(x_0-y_0)^2=2r^2,\quad 2(x_0^2-y_0^2)=a^2$$

となりますから、$x_0=\mp 3, y_0=\mp 1, r=\sqrt{2}, a=b=4$ などが例になります。



対称性によれば、もう一方の漸近線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ に円が接する場合は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)^2-\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)r^2=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}+\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)r^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

が３回で戻って来るための条件です。

双方の漸近線に接するような具体例は $a=b=2\sqrt{2}, x_0=2, y_0=0, r=\sqrt{2}$ や、$a=1, b=2, x_0=0, y_0=1+\frac{\sqrt{5}}{2}, r=\frac{\sqrt{5}}{2}$ などがあります。

3.2.3 統合

先に得た円が漸近線 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ と接しない場合の条件式 (3.2)：

$$\left\{(a^2+b^2)r^2-(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)\right\}^2=4a^2r^2\left\{(a^2+b^2)y_0^2+b^4\right\}$$

は、もちろん、$c_+c_-\neq 0$ のときに成り立つ式でしたが、これは元々 (3.1)：

$$0=a^2b^2f_+f_-c_+c_--2\left\{r^2(b^2-a^2)+b^2x_0^2-a^2y_0^2\right\}+a^2b^2$$

と同値であり、従って形式的には $c_+c_-=0$ のときには今得た漸近線に接する場合の条件式 (3.3) に一致しています。全く同様に、円が漸近線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ に接する場合、つまり、$f_+f_-=0$ の場合にも有効であることが見て取れます。

従って、漸近線と接する場合も接しない場合もどちらも１つの式：

$$\left\{(a^2+b^2)r^2-(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)\right\}^2=4a^2r^2\left\{(a^2+b^2)y_0^2+b^4\right\}$$

を条件式と考えることが出来ます。この条件はまた書き直すことが出来て（！）

$$
\begin{aligned}
&（左辺）= \left\{(a^2+b^2)r^2-(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)\right\}^2\\
&\quad = (a^2+b^2)^2r^4-2(a^2+b^2)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)r^2+(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)^2\\
&\quad = (a^2-b^2)^2r^4+4a^2b^2r^4\\
&\qquad +2(a^2-b^2)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)r^2-4a^2(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)r^2\\
&\qquad +(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)^2\\
&\quad = \left\{(a^2-b^2)r^2+(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)\right\}^2\\
&\qquad -4a^2r^2\{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2-b^2r^2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&（右辺）+4a^2r^2\{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2-b^2r^2\}\\
&= 4a^2r^2\left\{(a^2+b^2)y_0^2+b^4\right\}+4a^2r^2\left\{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2-b^2r^2\right\}\\
&= 4a^2r^2\left\{b^2x_0^2+b^2y_0^2+b^4-a^2b^2-b^2r^2\right\}\\
&= 4a^2b^2r^2(x_0^2+y_0^2+b^2-a^2-r^2)
\end{aligned}
$$

によって

$$\left\{(a^2-b^2)r^2+b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2\right\}^2 = 4a^2b^2r^2(x_0^2+y_0^2+b^2-a^2-r^2)$$

となることに注意します。なぜって？・・・・

3.2.4 Cayley の条件

双曲線：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \text{すなわち}\quad b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$$

を行列：

$$A=\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0\\ 0 & 0 & -a^2b^2\end{pmatrix}$$

で表し、円：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\quad \text{すなわち}\quad x^2-2x_0x+y^2-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

を行列：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0\\ 0 & 1 & -y_0\\ -x_0 & -y_0 & x_0^2+y_0^2-r^2\end{pmatrix}$$

で表現し、行列式：

$$\Delta(t)=|tA-B|=\begin{vmatrix} tb^2-1 & 0 & x_0\\ 0 & -ta^2-1 & y_0\\ x_0 & y_0 & -ta^2b^2-x_0^2-y_0^2+r^2\end{vmatrix}$$

を計算すると

$$\Delta(t)=a^4b^4t^3+a^2b^2(x_0^2+y_0^2+b^2-a^2-r^2)t^2+\left\{(a^2-b^2)r^2+b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2\right\}t+r^2$$

であって、$\sqrt{\Delta(t)}$ の Taylor 展開を

$$\sqrt{\Delta(t)}=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$$

としたとき、

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sqrt{\Delta(t)}\bigg|_{t=0}\\
2c_2 &= -\frac{1}{4}\Delta(0)^{-\frac{3}{2}}\Delta'(0)^2+\frac{1}{2}\Delta(0)^{-\frac{1}{2}}\Delta''(0)\\
&= -\frac{1}{4}r^{-3}\left\{(a^2-b^2)r^2+b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2\right\}^2\\
&\quad +\frac{1}{2}r^{-1}2a^2b^2(x_0^2+y_0^2+b^2-a^2-r^2)\\
8r^3c_2 &= -\left\{(a^2-b^2)r^2+b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2\right\}^2+4a^2b^2r^2(x_0^2+y_0^2+b^2-a^2-r^2)
\end{aligned}
$$

となりますから、先の条件は $c_2=0$ と同値であることが分かります。

やっぱ、Cayley って天才だわ。

3.3 円から楕円に接線を引く場合のより一般的な設定

楕円から楕円に向かって接線を引く場合も、拡大・縮小によって円から楕円に接線を引く問題に変換できます。

軸が斜めになっている場合もやりたいですが、まずは軸が一致している場合、平行な場合から徐々にやって行きましょう。

3.4 円から放物線に接線を引く場合のより一般的な設定

3.4.1 初等幾何の定理

定理 3.1 [Lambert's theorem] 放物線の３つの異なる接線の交点の作る３角形の外接円は焦点を通ります。

【証明】 放物線 $P: x^2 = 4py$ の焦点は $F(0, p)$ です。

放物線上の異なる 3 点

$$A\left(2a, \frac{a^2}{p}\right), \quad B\left(2b, \frac{b^2}{p}\right), \quad C\left(2c, \frac{c^2}{p}\right)$$

を通る円周 E の方程式を

$$x^2 + y^2 + 2lx + 2my + n = 0$$

として、示すべき式は

$$p^2 + 2mp + n = 0$$

です。

A, B に対応する極は $P_1\left(a+b, \frac{ab}{p}\right)$ であり、B, C に対応した極は $P_2\left(b+c, \frac{bc}{p}\right)$、$C, A$ に対応した極は $P_3\left(c+a, \frac{ca}{p}\right)$ です。

円 E が P_1 を通ることから

$$(a+b)^2 + \frac{a^2b^2}{p^2} + 2l(a+b) + 2m\frac{ab}{p} + n = 0$$

が成り立ち、同様に P_2, P_3 を通ることから

$$(b+c)^2 + \frac{b^2c^2}{p^2} + 2l(b+c) + 2m\frac{bc}{p} + n = 0$$
$$(c+a)^2 + \frac{c^2a^2}{p^2} + 2l(c+a) + 2m\frac{ca}{p} + n = 0$$

が成り立ちます。

第１・２式から l を消去すると

$$\begin{aligned}
0 &= (b+c)(a+b)^2 - (a+b)(b+c)^2 \\
&\quad + \frac{a^2b^2}{p^2}(b+c) - \frac{b^2c^2}{p^2}(a+b) + 2m\frac{ab}{p}(b+c) - 2m\frac{bc}{p}(a+b) + n(b+c) - n(a+b) \\
&= (a+b)(b+c)(a-c) + \frac{b^2}{p^2}\{b(a^2-c^2) + ac(a-c)\} + 2m\frac{b}{p}b(a-c) - n(a-c) \\
&= (a+b)(b+c) + \frac{b^2}{p^2}(ab+bc+ca) + 2\frac{b^2}{p}m - n
\end{aligned}$$

となりますが、全く同様に第２・３式から l を消去すると

$$0 = (b+c)(c+a) + \frac{c^2}{p^2}(ab+bc+ca) + 2\frac{c^2}{p}m - n$$

が得られます。この２つの式から m, n を求めると、

$$\begin{aligned}
(b+c)(b-c) + \frac{b^2-c^2}{p^2}(ab+bc+ca) + \frac{2}{p}(b^2-c^2)m &= 0 \\
1 + \frac{ab+bc+ca}{p^2} + \frac{2}{p}m &= 0 \\
p^2 + (ab+bc+ca) + 2mp &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)(b+c)c^2 - (b+c)(c+a)b^2 - (c^2-b^2)n &= 0 \\
(b+c)(c^2a + bc^2 - b^2c - ab^2) - (c^2-b^2)n &= 0 \\
(b+c)\{a(c^2-b^2) + bc(c-b)\} - (c^2-b^2)n &= 0 \\
(c^2-b^2)(ab+bc+ca-n) &= 0
\end{aligned}$$

となります。

ここで a, b, c のうち（少なくとも）いずれか２つは値だけでなく絶対値も等しくないので、あらかじめそのような２つを取り出したと考え、ここでは $b \neq -c$ と仮定します。すると $n = ab + bc + ca$ ですから

$$p^2 + n + 2mp = 0$$

が成り立っています。 □

事実 3.2 放物線 P の焦点 F を通る円周 E_1 上の点 A から放物線に接線が引けてこの接線は A でない点 B でもう一度円 E_1 と交わるとします。また、点 B から放物線に引いたもう 1 本の接線も B でない点 C で再び円 E_1 と交わると仮定します。このとき点 C から引いた放物線 P の接線は点 A を通ります。

3 点 A, B, F を通る円はただ 1 つに確定します。

点 A から放物線 P に引いた別の接線と円 E_1 の交点を D とすると、3 接線 AB、BC、AD の 3 交点の作る 3 角形の外接円 E_2 は Lambert's theorem により放物線 P の焦点 F を通ります。

このとき、3 角形の 2 頂点は A, B ですから（もう 1 つは AD と BC の交点です）、この外接円 E_2 は A, B, F を通ることになり、これは元の円 E_1 に一致します。

これは点 C, D が一致することを意味しますから題意は示されました。 □

事実 3.3 円 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ から放物線 $y=px^2$ に接線を引いて 3 回で元に戻って来るための条件は、円が放物線の焦点を通ること、すなわち

$$x_0^2+\left(y_0-\frac{1}{4p}\right)^2=r^2$$

です。

3.4.2 Cayley の条件

ちなみに Cayley 先生はこうおっしゃっております：

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 & \text{（円 } C\text{）}\\ y=px^2 & \text{（放物線 } P\text{）}\end{cases}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&-x_0\\0&1&-y_0\\-x_0&-y_0&x_0^2+y_0^2-r^2\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}p&0&0\\0&0&-\frac12\\0&-\frac12&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta(t)=|tC-P|&=\begin{vmatrix}t-p&0&-x_0t\\0&t&-y_0t+\frac12\\-x_0t&-y_0t+\frac12&(x_0^2+y_0^2-r^2)t\end{vmatrix}\\&=-r^2t^3+(pr^2-px_0^2+y_0)t^2-\left(py_0+\frac14\right)t+\frac{p}{4}\\\Delta(0)&=\frac{p}{4}\\\Delta'(t)&=-3r^2t^2+2(pr^2-px_0^2+y_0)t-py_0-\frac14\\\Delta'(0)&=-py_0-\frac14\\\Delta''(t)&=-6r^2t+2(pr^2-px_0^2+y_0)\\\Delta''(0)&=2(pr^2-px_0^2+y_0)\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{\Delta(t)}\right\}''\Big|_{t=0}&=-\frac14\Delta(0)^{-\frac32}\{\Delta'(0)\}^2+\frac12\Delta(0)^{-\frac12}\Delta''(0)\\&=-\frac14\left(\frac4p\right)^{\frac32}\left(py_0+\frac14\right)^2+\frac12\left(\frac4p\right)^{\frac12}2(pr^2-px_0^2+y_0)\\&=-\frac{2}{p\sqrt p}\left(py_0+\frac14\right)^2+\frac{2}{\sqrt p}(pr^2-px_0^2+y_0)\\&=\frac{2}{p\sqrt p}\left\{p(pr^2-px_0^2+y_0)-\left(py_0+\frac14\right)^2\right\}\\&=\frac{2}{p\sqrt p}\left\{p^2(r^2-x_0^2)-\left(py_0-\frac14\right)^2\right\}\\&=2\sqrt p\left\{r^2-x_0^2-\left(y_0-\frac{1}{4p}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

となって、3 回で元に戻って来るための Cayley の条件は

$$x_0^2+\left(y_0-\frac{1}{4p}\right)^2=r^2$$

です。これは要するに、円 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ が放物線 $y=px^2$ の焦点 $\left(0,\frac{1}{4p}\right)$ を通るという条件に他なりません。

3.5 ２放物線の問題

3.5.1 軸が垂直な場合

> **事実 3.4** 放物線 P_1 の頂点以外の異なる 3 点における 3 接線の交点が作る 3 角形を R とします。P_1 と軸の垂直な放物線 P_2 で R に外接するものがただ 1 つ存在し、放物線 P_1 の頂点を通ります。

P_1 を $x^2 = 4py$ とし、P_1 上の（頂点でない）異なる 3 点

$$A\left(2a, \frac{a^2}{p}\right), \quad B\left(2b, \frac{b^2}{p}\right), \quad C\left(2c, \frac{c^2}{p}\right)$$

での３接線を考えます（$abc \neq 0$）。

A, B に対応する極は $Q_1\left(a+b, \frac{ab}{p}\right)$ であり、B, C に対応した極は $Q_2\left(b+c, \frac{bc}{p}\right)$、$C, A$ に対応した極は $Q_3\left(c+a, \frac{ca}{p}\right)$ です。

軸が y 軸と垂直な放物線は一般に

$$y^2 + lx + my + n = 0 \quad (l \neq 0)$$

で表されますが、3 点 Q_1, Q_2, Q_3 を通る条件は

$$\begin{cases} \frac{a^2b^2}{p^2} + (a+b)l + \frac{ab}{p}m + n = 0 \\ \frac{b^2c^2}{p^2} + (b+c)l + \frac{bc}{p}m + n = 0 \\ \frac{c^2a^2}{p^2} + (c+a)l + \frac{ca}{p}m + n = 0 \end{cases}$$

であり、行列で書くと

$$\begin{pmatrix} a+b & \frac{ab}{p} & 1 \\ b+c & \frac{bc}{p} & 1 \\ c+a & \frac{ca}{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{a^2b^2}{p^2} \\ \frac{b^2c^2}{p^2} \\ \frac{c^2a^2}{p^2} \end{pmatrix}$$

となります。ここで左辺の行列式は

$$\begin{vmatrix} a+b & \frac{ab}{p} & 1 \\ b+c & \frac{bc}{p} & 1 \\ c+a & \frac{ca}{p} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{p}(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$$

ですから解自体は必ず存在し、$l = 0$ でなければ放物線を表すことになります。

$$\begin{pmatrix} a+b & \frac{ab}{p} & 1 \\ b+c & \frac{bc}{p} & 1 \\ c+a & \frac{ca}{p} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{p}{(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{pmatrix} \frac{c(b-a)}{p} & \frac{a(c-b)}{p} & \frac{b(a-c)}{p} \\ a-b & b-c & c-a \\ \frac{c^2(a-b)}{p} & \frac{a^2(b-c)}{p} & \frac{b^2(c-a)}{p} \end{pmatrix}$$

なので、実際に計算してみると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} a+b & \frac{ab}{p} & 1 \\ b+c & \frac{bc}{p} & 1 \\ c+a & \frac{ca}{p} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a^2b^2}{p^2} \\ \frac{b^2c^2}{p^2} \\ \frac{c^2a^2}{p^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{p}{(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{pmatrix} \frac{c(b-a)}{p} & \frac{a(c-b)}{p} & \frac{b(a-c)}{p} \\ a-b & b-c & c-a \\ \frac{c^2(a-b)}{p} & \frac{a^2(b-c)}{p} & \frac{b^2(c-a)}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a^2b^2}{p^2} \\ \frac{b^2c^2}{p^2} \\ \frac{c^2a^2}{p^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p^2(a-b)(b-c)(c-a)} \begin{pmatrix} c(b-a) & a(c-b) & b(a-c) \\ p(a-b) & p(b-c) & p(c-a) \\ c^2(a-b) & a^2(b-c) & b^2(c-a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2b^2 \\ b^2c^2 \\ c^2a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2(a-b)(b-c)(c-a)\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c(b-a) & a(c-b) & b(a-c) \\ p(a-b) & p(b-c) & p(c-a) \\ c^2(a-b) & a^2(b-c) & b^2(c-a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2b^2 \\ b^2c^2 \\ c^2a^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} abc\{ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c)\} \\ p\{a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)\} \\ a^2b^2c^2(a-b+b-c+c-a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} abc(ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a) \\ p(a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - b^2c^3 + c^3a^2 - c^2a^3) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} abc\{b^2(a-c) + b(c^2-a^2) + ca(a-c)\} \\ p\{b^2(a^3-c^3) + b^3(c^2-a^2) + a^2c^2(c-a)\} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p^2(a-b)(b-c)\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} abc\{-b^2+b(c+a)-ca\} \\ p\{-b^2(c^2+ca+a^2)+b^3(c+a)+a^2c^2\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} abc\{b(c-b)+a(b-c)\} \\ p\{b^2c(b-c)-a^2(b^2-c^2)+b^2a(b-c)\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
p^2(a-b)\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} abc(a-b) \\ p\{b^2c-a^2(b+c)+b^2a\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} abc(a-b) \\ p\{-c(a^2-b^2)-ab(a-b)\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
p^2\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} abc \\ p\{-c(a+b)-ab\} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{abc}{p^2} \\ -\frac{ab+bc+ca}{p} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります。$abc \neq 0$ から $l \neq 0$ となって確かに放物線が存在し、$n=0$ から P_1 の頂点である原点を通ります。

参考までに P_2 の方程式は以下の通りです：

$$
\begin{aligned}
P_2\ : \quad y^2+\frac{abc}{p^2}x-\frac{ab+bc+ca}{p}y &= 0 \\
\left(y-\frac{ab+bc+ca}{2p}\right)^2 &= -\frac{abc}{p^2}\left\{x-\frac{(ab+bc+ca)^2}{4abc}\right\}
\end{aligned}
$$

□

問題 **3.5** 『極線が交点を通るとき、接線の一方が共通接線になる』ための条件を、特に軸がずれている場合に具体的に書けるだろうか？　そしてそれは３回で戻って来るための条件に一致するのだろうか？　放物線は『無限遠直線に接している』ことと合わせて考える必要があるかも知れない。

4 一般的な理論

4.1 接線と極線

4.2 (α, β) が曲線上にある場合 〜接線〜

事実 4.1 [2 次曲線の接線]

(1) 楕円 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ 上の点 (α,β) における接線：

$$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1.$$

(2) 放物線 $y-y_0=p(x-x_0)^2$ 上の点 (α,β) における接線：

$$(y-y_0)+(\beta-y_0)=2p(\alpha-x_0)(x-x_0).$$

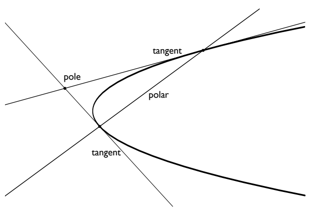
(3) 双曲線 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ 上の点 (α,β) における接線：

$$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1.$$

どれも点 (α,β) を通り、傾きが微分（など）によって求まるものと一致しているので確かに接線になっています。

4.3 (α, β) が外部にある場合 〜極線〜

定義 4.2 2 次曲線に外部の点 P から引いた 2 本の接線の 2 接点を通る直線を l とするとき、直線 l は点 P を極（pole）とする極線（polar）と言い、点 P は直線 l を極線とする極と言います。



楕円 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ の外部の点 (α,β) から引いた 2 本の接線の接点を $(v_1,w_1),(v_2,w_2)$ とおけば、それぞれの点での接線は

$$\frac{(v_1-x_0)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(w_1-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$$
$$\frac{(v_2-x_0)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(w_2-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$$

ですが、どちらも極である (α,β) を通りますから

$$\begin{cases}\dfrac{(v_1-x_0)(\alpha-x_0)}{a^2}+\dfrac{(w_1-y_0)(\beta-y_0)}{b^2}=1\\ \dfrac{(v_2-x_0)(\alpha-x_0)}{a^2}+\dfrac{(w_2-y_0)(\beta-y_0)}{b^2}=1\end{cases}$$

が成り立っており、これは直線：

$$\frac{(x-x_0)(\alpha-x_0)}{a^2}+\frac{(y-y_0)(\beta-y_0)}{b^2}=1$$

が 2 点 $(v_1,w_1),(v_2,w_2)$ を通る事を意味しており、従ってこれが極線の方程式です。

放物線・双曲線の場合も全く同様です。ただし、『外部』とは、焦点を含まない側とします。

事実 4.3 [2 次曲線の極線]

(1) 楕円 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ の、外部の点 (α,β) を極とする極線：

$$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1.$$

(2) 放物線 $y-y_0=p(x-x_0)^2$ の外部の点 (α,β) を極とする極線：

$$(y-y_0)+(\beta-y_0)=2p(\alpha-x_0)(x-x_0).$$

(3) 双曲線 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ の外部の点 (α,β) を極とする極線：

$$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1.$$

双曲線の外部の点のうち、漸近線上からは接線を 2 本引くことができませんので注意が必要です。ただ、その場合でも上の直線の式は何らかの直線を表しています。無限遠方で漸近線と接すると考えれば・・・

4.4 (α, β) が内部にある場合 〜拡張された極線〜

例えば楕円の場合、直線

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

は、点 (α, β) が楕円上にあれば接線を表し、楕円外にあれば極線を表していました。では点 (α, β) が楕円の内部にある場合、この直線は一体どんな直線なのでしょうか？ ただし $(\alpha, \beta) = (x_0, y_0)$ の場合はこの方程式は直線を表さないので除外しておきます。

4.4.1 交点：楕円の場合

まずこの直線と楕円の交点を考えます。直接計算するのも面白いですが、煩雑です。平行移動・拡大縮小しても交点の数の状況に変化はないので、特別な場合：

$$\text{楕円 :} x^2 + y^2 = 1, \qquad \text{直線 :} \alpha x + \beta y = 1 \quad ((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

に計算すれば十分でしょう。

$\beta \neq 0$ であれば、直線の式から $y = \frac{1}{\beta}(1 - \alpha x)$ ですから、これを楕円の式に代入して

$$x^2 + \frac{(1 - \alpha x)^2}{\beta^2} = 1$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2\alpha x + 1 - \beta^2 = 0$$

が得られますから、$(\alpha, \beta) = (0, 0)$ よりこれは２次方程式であって、判別式 D は

$$D = \alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(1 - \beta^2) = \beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - 1)$$

となります。

従って (α, β) が楕円の内部の点であれば $D < 0$ ですから、この直線は楕円と交わりません。また、点 (α, β) が楕円の外部の点であれば $D > 0$ であってこの直線は楕円と異なる２点で交わり、点 (α, β) が楕円上の点ならば $D = 0$ となって、この直線は楕円と１点のみで交わり、接線であることが分かるわけです。

また $\beta = 0$ の場合は、$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ から直線は $x = \frac{1}{\alpha}$ であり、$(\alpha, 0)$ が楕円の内部の点であれば $|\alpha| < 1$ なので直線は楕円の外部にあり交わりません。$(\alpha, 0)$ が楕円上の点であれば $\alpha = \pm 1$ であって、直線は楕円に接しています。また、$(\alpha, 0)$ が楕円の外部の点であれば $|\alpha| > 1$ なので、直線は楕円と異なる２点で交わります。

事実 4.4 楕円：$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ と直線：$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2} + \frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2} = 1$ の交点について、以下が成り立ちます（$(\alpha, \beta) \neq (x_0, y_0)$）。

(i) 点 (α, β) が楕円外にある ⇔ 異なる２点で交わる。
(ii) 点 (α, β) が楕円内にある ⇔ 交わらない。
(iii) 点 (α, β) が楕円上にある ⇔ １点で接する。

4.4.2 交点：双曲線の場合

次に双曲線と直線の交点ですが、平行移動・拡大縮小しても交点の数の状況に変化はないので、やはり特別な場合：

$$\text{双曲線 :} x^2 - y^2 = 1, \qquad \text{直線 :} \alpha x - \beta y = 1 \quad ((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

に計算すれば十分でしょう。

$\beta \neq 0$ であれば $y = \frac{1}{\beta}(\alpha x - 1)$ ですから、これを双曲線の式に代入して

$$x^2 - \frac{(\alpha x - 1)^2}{\beta^2} = 1$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha x + 1 + \beta^2 = 0$$

が得られます。

まず $|\alpha| = |\beta|$ の場合、つまり点 (α, β) が漸近線上にある場合は、直線は漸近線に平行であり、$x = \frac{1+\beta^2}{2\alpha}$ から交点はただ１つであることが分かります。

$|\alpha| \neq |\beta|$ であればこれは２次方程式であって、判別式 D は

$$D = \alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)(1 + \beta^2) = -\beta^2(\alpha^2 - \beta^2 - 1)$$

となります。ここで

$$\text{点 } (\alpha, \beta) \text{ が双曲線の内部} \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 > 1$$

に注意すれば、(α, β) が双曲線の内部の点であれば $D < 0$ ですから、この直線は双曲線と交わりません。また、点 (α, β) が双曲線の外部の点（であり、かつ、漸近線上の点

でない）であれば $D>0$ であってこの直線は双曲線と異なる２点で交わり、点 (α,β) が双曲線上の点ならば $D=0$ となって、この直線は双曲線と１点のみで交わり、接線であることが分かるわけです。

また $\beta=0$ の場合は、$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ から直線は $x=\frac{1}{\alpha}$ であり、$(\alpha,0)$ が双曲線の内部の点であれば $|\alpha|>1$ なので直線は双曲線の外部にあり交わりません。$(\alpha,0)$ が双曲線上の点であれば $\alpha=\pm 1$ であって、直線は双曲線に接しています。また、$(\alpha,0)$ が双曲線の外部の点であれば $|\alpha|<1$ なので、直線は双曲線と異なる２点で交わります。

【直接計算】　双曲線：$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ と直線：$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$ の交点を考えます。

$$\text{点 } (\alpha,\beta) \text{ が双曲線の内部} \Leftrightarrow \frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)^2}{b^2}>1$$

に注意します。

$\beta\neq y_0$ である場合は直線の式を変形して

$$\frac{y-y_0}{b}=\frac{b}{\beta-y_0}\left\{\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}-1\right\}$$

双曲線の式に代入すれば方程式：

$$\begin{aligned}
\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}&=1\\
\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{b^2}{(\beta-y_0)^2}\left\{\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}-1\right\}^2&=1\\
\frac{1}{a^2}\left\{1-\frac{b^2(\alpha-x_0)^2}{a^2(\beta-y_0)^2}\right\}(x-x_0)^2+2\frac{b^2(\alpha-x_0)}{a^2(\beta-y_0)^2}(x-x_0)-\frac{b^2}{(\beta-y_0)^2}-1&=0
\end{aligned}$$

が得られますが、２次の係数が 0 である可能性があります。それは

$$\frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2}=\frac{(\beta-y_0)^2}{b^2}\quad \text{すなわち、}\quad \frac{\alpha-x_0}{a}\pm\frac{\beta-y_0}{b}=0$$

つまり、点 (α,β) が漸近線上にある場合です。この場合は $\beta\neq y_0$ は $\alpha-x_0\neq 0$ を意味するので方程式は１次式であって、

$$x=\frac{a^2\left\{b^2+(\beta-y_0)^2\right\}}{2b^2(\alpha-x_0)}=\frac{a^2+(\alpha-x_0)^2}{2(\alpha-x_0)}$$

となって交点は１つです。

点 (α,β) が漸近線上にない場合は、これは２次方程式であって、判別式 D は

$$\begin{aligned}
D&=\frac{b^4(\alpha-x_0)^2}{a^4(\beta-y_0)^4}+\frac{1}{a^2}\left\{1-\frac{b^2(\alpha-x_0)^2}{a^2(\beta-y_0)^2}\right\}\left\{\frac{b^2}{(\beta-y_0)^2}+1\right\}\\
&=\frac{b^4}{a^2(\beta-y_0)^4}\left(-\frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2}+\left\{\frac{(\beta-y_0)^2}{b^2}-\frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2}\right\}\left\{1+\frac{(\beta-y_0)^2}{b^2}\right\}\right)\\
&=\frac{b^4}{a^2(\beta-y_0)^4}\frac{(\beta-y_0)^2}{b^2}\left\{\frac{(\beta-y_0)^2}{b^2}-\frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2}+1\right\}\\
&=-\frac{b^2}{a^2(\beta-y_0)^2}\left\{\frac{(\alpha-x_0)^2}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)^2}{b^2}-1\right\}
\end{aligned}$$

です。

従って (α,β) が双曲線の内部の点であれば $D<0$ ですから、この直線は双曲線と交わりません。また、点 (α,β) が双曲線の外部の点（であり、かつ、漸近線上の点でない）であれば $D>0$ であってこの直線は双曲線と異なる２点で交わり、点 (α,β) が双曲線上の点ならば $D=0$ となって、この直線は双曲線と１点のみで交わり、接線であることが分かるわけです。

$\beta=y_0$ の場合は $(\alpha,\beta)=(x_0,y_0)$ から $\alpha\neq x_0$ であって、直線は

$$x=x_0+\frac{a^2}{\alpha-x_0}=x_0+a\frac{a}{\alpha-x_0}$$

です。

(α,y_0) が双曲線の内部の点であれば $|\alpha-x_0|>a$ なので、直線は双曲線の外部にあり交わりません。(α,y_0) が双曲線上の点であれば $\alpha=x_0\pm a$ であって、直線は双曲線に接しています。また、(α,y_0) が双曲線の外部の点であれば $|\alpha-x_0|<a$ なので、直線は双曲線と異なる２点で交わります。

事実 4.5 双曲線：$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ と直線：$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$ の交点について、以下が成り立ちます（$(\alpha,\beta)\neq(x_0,y_0)$）。

(i) 点 (α,β) が双曲線外にあって、漸近線上にない $\Leftrightarrow$ 異なる２点で交わる。
(ii) 点 (α,β) が双曲線外にあって、漸近線上にある $\Leftrightarrow$ １点で交わる。
(iii) 点 (α,β) が双曲線内にある $\Leftrightarrow$ 交わらない。
(iv) 点 (α,β) が双曲線上にある $\Leftrightarrow$ １点で接する。

4.4.3 交点：放物線の場合

平行移動・拡大縮小しても交点の数の状況に変化はないので、特別な場合：

$$放物線 : y = x^2, \qquad 直線 : y + \beta = 2\alpha x$$

に計算すれば十分です。$y = 2\alpha x - \beta$ として放物線の式に代入すれば

$$\begin{aligned} 2\alpha x - \beta &= x^2 \\ 0 &= x^2 - 2\alpha x + \beta \end{aligned}$$

であり、判別式は

$$D = \alpha^2 - \beta$$

ですから、点 (α, β) が放物線の内部にあれば、$D < 0$ であり、直線と放物線は交わりません。点 (α, β) が放物線上にあれば、$D = 0$ であって、1 点で接しています。また、点 (α, β) が放物線の外部にあれば、$D > 0$ であり、直線と放物線は異なる 2 点で交わっています。

放物線は軸と平行な直線とは 1 点で接せずに交わりますが、問題の直線は y 軸に平行な直線をあらかじめ含んでいませんので、これが問題になることはありません。

事実 4.6 放物線 : $y - y_0 = p(x - x_0)^2$ と直線 : $(y - y_0) + (\beta - y_0) = 2p(\alpha - x_0)(x - x_0)$. の交点について、以下が成り立ちます。

(i) 点 (α, β) が放物線外にある $\Leftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる。

(ii) 点 (α, β) が放物線内にある $\Leftrightarrow$ 交わらない。

(iii) 点 (α, β) が放物線上にある $\Leftrightarrow$ 1 点で接する。

4.4.4 極線との関係

次に、自明な次の事実に注目すれば：

事実 4.7

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1 \text{ 上に点 } (A, B) \text{ がある}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(A - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(B - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1 \text{ 上に点 } (\alpha, \beta) \text{ がある}$$

楕円内部に点 (α, β) があるとき、直線

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

は、楕円外部の点 (A, B) のうち、この点を極とした場合の極線が点 (α, β) を通るような点全体のなす直線であることが分かります。

事実 4.8 楕円 : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ とその内部にある点 $(\alpha, \beta) \neq (x_0, y_0)$ に対して、直線 :

$$\frac{(\alpha - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(\beta - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

は、点 (α, β) を通る任意の極線の極の全体です。

この場合も、この直線のことを極 (α, β) に関する極線と言うことにします。

定義 4.9 楕円 C とその内部の点 P が与えられたとき、点 P を通る極線の（外部）極全体のなす直線を、点 P を（内部）極としたときの楕円 C の極線と言います。

この様に、外部極に関する極線を使って内部極に関する極線が定義されますが、これらを統一的に扱うのであれば、上の吟味において実は点 (α, β) が楕円の『内部』にある必要はなく、外部の点であっても全く同じことが言えることに注目すれば、次の様に定義し直すことも可能です：

定義 4.10 ２次曲線 C と点 P が与えられたとき、点 P を通り C と２点で交わる直線で、その２交点における C の接線が平行でないものが存在するとき、それら接線の交点はある一定の直線上にあり、この直線のことを点 P を極としたときの２次曲線 C の極線と言います。

また、２次曲線 C と直線 l があたえられたとき、直線 l 上の点で C へ２本の接線が引ける点が存在するならば、その２接点を結ぶ直線はある１点を共有しており、この点を直線 l を極線としたときの２次曲線 C の極と言います。

例外	
楕円	中心を極とする極線はない。
放物線	軸と平行な直線を極線とする極はない。
双曲線	中心を極とする極線はない。 漸近線を極線とする極はない。

放物線では任意の点に対してその点を極とした場合の極線が存在しますが、楕円、双曲線では中心においてのみ極線が存在しません。無限遠直線なるものを考えれば・・・

内部の点ということで、最も気になるのは焦点でしょうか。

事実 4.11 ２次曲線の焦点を極としたときの極線は準線です。

4.5 極線上の点からの極線

事実 4.12 点 P を極とする楕円の極線が点 Q を通るならば、点 Q を極とする楕円の極線は点 P を通ります。

楕円を

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

とし、$P(\alpha,\beta)$ とすると、極線は

$$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$$

です。更に点 Q を $Q(A,B)$ とおけば、

$$\frac{(\alpha-x_0)(A-x_0)}{a^2}+\frac{(\beta-y_0)(B-y_0)}{b^2}=1 \tag{4.1}$$

が成り立っています。

一方、Q を極とする極線は

$$\frac{(A-x_0)(x-x_0)}{a^2}+\frac{(B-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$$

ですから、(4.1) はこの極線が点 $P(\alpha,\beta)$ を通ることを示しています。 □

事実 4.13 点 P を極とする放物線の極線が点 Q を通るならば、点 Q を極とする放物線の極線は点 P を通ります。

放物線を

$$y-y_0=p(x-x_0)^2$$

とし、$P(\alpha,\beta)$ とすると、極線は

$$(y-y_0)+(\beta-y_0)=2p(\alpha-x_0)(x-x_0)$$

です。更に点 Q を $Q(A,B)$ とおけば、

$$(B-y_0)+(\beta-y_0)=2p(\alpha-x_0)(A-x_0) \tag{4.2}$$

が成り立っています。

一方、Q を極とする極線は

$$(y-y_0)+(B-y_0)=2p(A-x_0)(x-x_0)$$

ですから、(4.2) はこの極線が点 $P(\alpha,\beta)$ を通ることを示しています。 □

事実 4.14 点 P を極とする双曲線の極線が点 Q を通るならば、点 Q を極とする双曲線の極線は点 P を通ります。

双曲線を

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

とし、$P(\alpha,\beta)$ とすると、極線は

$$\frac{(\alpha-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$$

です。更に点 Q を $Q(A,B)$ とおけば、

$$\frac{(\alpha-x_0)(A-x_0)}{a^2}-\frac{(\beta-y_0)(B-y_0)}{b^2}=1 \tag{4.3}$$

が成り立っています。

一方、Q を極とする極線は

$$\frac{(A-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\frac{(B-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1$$

ですから、(4.3) はこの極線が点 $P(\alpha,\beta)$ を通ることを示しています。 □

事実 4.15 極が準線上にあることと、焦点が極線上にあることは同値です。

4.6 極と極線の中点を結ぶ直線

事実 4.16 楕円の外部の点を極とする極線の（２接点の）中点と極を結ぶ直線は楕円の中心を通ります。

これは円の場合に証明して拡大・縮小すれば良いことは明白です。そうするとこの問題は自明であることに気がつくでしょう。 □

事実 4.17 放物線の外部の点を極とする極線の（２接点の）中点と極を結ぶ線分は放物線の軸に平行であり、放物線と中点で交わります。

放物線を $y-y_0=p(x-x_0)^2$ とし、極を (α,β) とします。放物線の軸は y-軸に平行です。

$$\begin{cases}(y-y_0)+(\beta-y_0)=2p(\alpha-x_0)(x-x_0)\\ y-y_0=p(x-x_0)^2\end{cases}$$

から、

$$\begin{aligned}p(x-x_0)^2+(\beta-y_0)&=2p(\alpha-x_0)(x-x_0)\\ px^2-2px_0x+px_0^2-2p(\alpha-x_0)x+2p(\alpha-x_0)x_0+\beta-y_0&=0\\ px^2-2p\alpha x+px_0^2+2p(\alpha-x_0)x_0+\beta-y_0&=0\end{aligned}$$

となり、確かに極線の中点の x-座標は α です。題意は示されました。更に２接点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned}p(x-\alpha)^2-p\alpha^2+px_0^2+2p(\alpha-x_0)x_0+\beta-y_0&=0\\ p(x-\alpha)^2-p(\alpha-x_0)(\alpha+x_0)+p(\alpha-x_0)2x_0+\beta-y_0&=0\\ p(x-\alpha)^2-p(\alpha-x_0)^2+\beta-y_0&=0\\ p(x-\alpha)^2&=p(\alpha-x_0)^2-\beta+y_0\end{aligned}$$

ですから

$$x=\alpha\pm\sqrt{(\alpha-x_0)^2-\frac{1}{p}(\beta-y_0)}$$

です。

また、極線の中点の y-座標は

$$\begin{aligned}(y-y_0)+(\beta-y_0)&=2p(\alpha-x_0)^2\\ \frac{y+\beta}{2}&=p(\alpha-x_0)^2+y_0\end{aligned}$$

を満たしており、この中点と極を結ぶ線分は、放物線上の $x=\alpha$ に対応する点で２等分されることが分かります。

□

事実 4.18 双曲線の外部の点を極とする極線の（２接点の）中点と極を結ぶ直線は双曲線の中心を通ります。

２接線の方程式は

$$\begin{cases}\dfrac{(v_1-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\dfrac{(w_1-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1\\[2ex] \dfrac{(v_2-x_0)(x-x_0)}{a^2}-\dfrac{(w_2-y_0)(y-y_0)}{b^2}=1\end{cases}$$

ですから、交点すなわち極の座標は

$$\begin{aligned}\frac{1}{w_1-y_0}\left\{\frac{(v_1-x_0)(x-x_0)}{a^2}-1\right\}&=\frac{1}{w_2-y_0}\left\{\frac{(v_2-x_0)(x-x_0)}{a^2}-1\right\}\\ (w_2-y_0)(v_1-x_0)(x-x_0)-(w_2-y_0)a^2&=(w_1-y_0)(v_2-x_0)(x-x_0)-(w_1-y_0)a^2\\ x-x_0&=\frac{a^2(w_2-w_1)}{(w_2-y_0)(v_1-x_0)-(w_1-y_0)(v_2-x_0)}\\ &=\frac{a\frac{w_2-w_1}{b}}{\frac{w_2-y_0}{b}\frac{v_1-x_0}{a}-\frac{w_1-y_0}{b}\frac{v_2-x_0}{a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_1-x_0}\left\{1+\frac{(w_1-y_0)(y-y_0)}{b^2}\right\}&=\frac{1}{v_2-x_0}\left\{1+\frac{(w_2-y_0)(y-y_0)}{b^2}\right\}\\ (v_2-x_0)(w_1-y_0)(y-y_0)+(v_2-x_0)b^2&=(v_1-x_0)(w_2-y_0)(y-y_0)+(v_1-x_0)b^2\\ y-y_0&=\frac{b^2(v_1-v_2)}{(v_2-x_0)(w_1-y_0)-(v_1-x_0)(w_2-y_0)}\\ &=\frac{b\frac{v_1-v_2}{a}}{\frac{v_2-x_0}{a}\frac{w_1-y_0}{b}-\frac{v_1-x_0}{a}\frac{w_2-y_0}{b}}\end{aligned}$$

となりますが、ここで $x-x_0$ の分母は

$$\begin{aligned}&\frac{w_2-y_0}{b}\frac{v_1-x_0}{a}-\frac{w_1-y_0}{b}\frac{v_2-x_0}{a}\\ &=\left(\frac{w_2-y_0}{b}-\frac{w_1-y_0}{b}\right)\left(\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}\right)-\frac{w_2-y_0}{b}\frac{v_2-x_0}{a}+\frac{w_1-y_0}{b}\frac{v_1-x_0}{a}\\ &=\left(\frac{w_2-y_0}{b}+\frac{w_1-y_0}{b}\right)\left(\frac{v_1-x_0}{a}-\frac{v_2-x_0}{a}\right)+\frac{w_2-y_0}{b}\frac{v_2-x_0}{a}-\frac{w_1-y_0}{b}\frac{v_1-x_0}{a}\end{aligned}$$

と２通りに変形されますので

$$\begin{aligned}x-x_0&=\frac{2a\frac{w_2-w_1}{b}}{\left(\frac{w_2-y_0}{b}-\frac{w_1-y_0}{b}\right)\left(\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}\right)+\left(\frac{w_2-y_0}{b}+\frac{w_1-y_0}{b}\right)\left(\frac{v_1-x_0}{a}-\frac{v_2-x_0}{a}\right)}\\ &=\frac{2a}{\left(\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}\right)+\left(\frac{w_2-y_0}{b}+\frac{w_1-y_0}{b}\right)\frac{\frac{v_1-x_0}{a}-\frac{v_2-x_0}{a}}{\frac{w_2-y_0}{b}-\frac{w_1-y_0}{b}}}\end{aligned}$$

ですが、接点 $(v_1,w_1),(v_2,w_2)$ は双曲線上にあるので

$$\begin{cases}\dfrac{(v_1-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(w_1-y_0)^2}{b^2}=1\\ \dfrac{(v_2-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(w_2-y_0)^2}{b^2}=1\end{cases}$$

を辺々引いて

$$\begin{aligned}\frac{(v_1-x_0)^2}{a^2}-\frac{(v_2-x_0)^2}{a^2}&=\frac{(w_1-y_0)^2}{b^2}-\frac{(w_2-y_0)^2}{b^2}\\ \frac{\frac{v_1-x_0}{a}-\frac{v_2-x_0}{a}}{\frac{w_1-y_0}{b}-\frac{w_2-y_0}{b}}&=\frac{\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}}{\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}}\end{aligned}$$

が成り立っているので、これを代入すれば

$$\begin{aligned}x-x_0&=\frac{2a}{\left(\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}\right)-\left(\frac{w_2-y_0}{b}+\frac{w_1-y_0}{b}\right)\frac{\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}}{\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}}}\\ &=\frac{2a\left(\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}\right)}{\left(\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{w_2-y_0}{b}+\frac{w_1-y_0}{b}\right)^2}\\ &=\frac{4}{\left(\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{w_2-y_0}{b}+\frac{w_1-y_0}{b}\right)^2}\left(\frac{v_1+v_2}{2}-x_0\right)\end{aligned}$$

です。また $y-y_0$ の分母も

$$\begin{aligned}&\frac{v_2-x_0}{a}\frac{w_1-y_0}{b}-\frac{v_1-x_0}{a}\frac{w_2-y_0}{b}\\ &=\left(\frac{v_2-x_0}{a}+\frac{v_1-x_0}{a}\right)\left(\frac{w_1-y_0}{b}-\frac{w_2-y_0}{b}\right)+\frac{v_2-x_0}{a}\frac{w_2-y_0}{b}-\frac{v_1-x_0}{a}\frac{w_1-y_0}{b}\\ &=\left(\frac{v_2-x_0}{a}-\frac{v_1-x_0}{a}\right)\left(\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}\right)-\frac{v_2-x_0}{a}\frac{w_2-y_0}{b}+\frac{v_1-x_0}{a}\frac{w_1-y_0}{b}\end{aligned}$$

と２通りに変形されますので、同様に

$$
\begin{aligned}
y-y_0 &= \frac{2b\frac{v_1-v_2}{a}}{\left(\frac{v_2-x_0}{a}-\frac{v_1-x_0}{a}\right)\left(\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}\right)+\left(\frac{v_2-x_0}{a}+\frac{v_1-x_0}{a}\right)\left(\frac{w_1-y_0}{b}-\frac{w_2-y_0}{b}\right)} \\
&= \frac{-2b}{\left(\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}\right)+\left(\frac{v_2-x_0}{a}+\frac{v_1-x_0}{a}\right)\frac{\frac{w_1-y_0}{b}-\frac{w_2-y_0}{b}}{\frac{v_2-x_0}{a}-\frac{v_1-x_0}{a}}} \\
&= \frac{-2b}{\left(\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}\right)-\left(\frac{v_2-x_0}{a}+\frac{v_1-x_0}{a}\right)\frac{\frac{v_1-x_0}{a}+\frac{v_2-x_0}{a}}{\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}}} \\
&= \frac{-2b\left(\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}\right)}{\left(\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}\right)^2-\left(\frac{v_2-x_0}{a}+\frac{v_1-x_0}{a}\right)^2} \\
&= \frac{4}{\left(\frac{v_2-x_0}{a}+\frac{v_1-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{w_1-y_0}{b}+\frac{w_2-y_0}{b}\right)^2}\left(\frac{w_1+w_2}{2}-y_0\right)
\end{aligned}
$$

です。

以上から双曲線の中心 (x_0, y_0) と極と２接点の中点 $\left(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}\right)$ は１直線上にあることが分かりました。 □

> こんな複雑な計算は必要なく、平行移動・拡大縮小して特別な場合に示せば十分です。

4.7 Pencil

２次曲線とは一般に

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{4.4}$$

の形の方程式で表される曲線であり、次の対称行列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

をその特性行列と呼びます。

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けることに注意し、時にこの行列を２次曲線と同一視することもあります。

一般に方程式 (4.4) の表す曲線は円錐曲線（円・楕円・放物線・双曲線）とは限らず、空集合 ($x^2+y^2+1=0$ など)、1 点 ($x^2+y^2=0$ など)、２直線 ($x^2-y^2=(x-y)(x+y)=0$ など。１直線のこともある）の場合がありますが、空集合である場合は除いて（そもそも考慮の対象にすらなりませんので）、1 点あるいは２直線になる場合を退化した２次曲線と呼びます。

> ただし、複素数の範囲で考えれば空集合ということはあり得ず、虚の楕円等になります。統一的に扱うにはやはり複素数の範囲で考える必要があるのでしょうが、ここでは実数の範囲でのみ考えます。

実対称行列は直交行列によって対角化されますから、(4.4) の表す曲線が空集合でない限り、特性行列が正則であれば（固有値 0 をもたなければ）円錐曲線になり、正則でなければ退化していることが分かります。

２つの２次曲線 C_1, C_2 に対して、$tC_1 - C_2$ の表す２次曲線群（t はパラメータ）を C_1, C_2 の定めるペンシル（Pencil）と言い、C_1 と C_2 の交点を通っています。

方程式 $\det(tC_1 - C_2) = 0$ は t の３次方程式であり、少なくとも１つの実数解をもちます。このとき２次曲線 $tC_1 - C_2$ は退化しており、これは一般に C_1 と C_2 の交点を通る２直線を表すことになります。

C を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ だけ並行移動した曲線 $\tilde{C}$ の特性行列は

$$\tilde{C} = {}^tTCT, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ですから、C_1, C_2 双方を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ だけ並行移動すると

$$\det\left(t\tilde{C_1} - \tilde{C_2}\right) = \det\left(t{}^tTC_1T - {}^tTC_2T\right) = \det\left({}^tT\{tC_1 - C_2\}T\right) = \det(tC_1 - C_2)$$

となって、方程式は変わりません。