

周長・面積・体積の解析学

～ 4次元球の体積は？～

 n 次元球とは

円と球は良く似た図形であると言えるでしょう。

円は2次元空間内で(=平面上で)ある定点(=中心)からある一定の値(=半径)以内の距離にある点全体ですし、球はその3次元版と言えます。

そこで妄想を働かせると、同じノリで4次元空間で考えたらどうなるのでしょうか。また、そうして得られたものを何と呼べば良いのでしょうか。

普通、こうして考えて得られる図形の事を超球と呼んでいます：

n 次元空間において、原点が中心の半径 r の超球 $D^n(r)$ とは、 n 次元空間の点 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ のうち、次の不等式：

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2$$

を満たすものの全体であるとしています。

つまり、2次元の超球とは、 x_1 を x 、 x_2 を y と書いて、

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

を満たす点 (x, y) の全体ですから、これは皆さんよくご存知の円(円周ではなく、内部も含めた円盤の事)ですね。

また、3次元の超球とは、 $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ 、 $x_3 = z$ と書いて、

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

を満たす3次元空間の点 (x, y, z) 全体の事ですから、これもやはり良くご存知の普通の球です。

では1次元超球 $D^1(r)$ はどんな図形でしょうか？定義によれば($x_1 = x$ としますが)、 $x^2 \leq r^2$ を満たす1次元の点 x 全体ですね。この不等式は要するに $-r \leq x \leq r$ ですから、結局半径 r の1次元球とは区間 $[-r, r]$ の事なんです～

さて、ここまでは皆さんのよく知っている世界のお話だったわけですが、では $n = 4$ の場合、つまり、4次元の超球ってどんな図形なんでしょうか？残念ながら4次元の絵を描く事は出来ませんので想像するしかありません。定義は、

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r^2$$

となる様な4次元の点 (x_1, x_2, x_3, x_4) 全体です。ちょっと記号がアシなので、 $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ 、 $x_3 = z$ 、 $x_4 = w$ としましょう。すると、まあ同じことですが、不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2$$

を満たす点 (x, y, z, w) の全体と、そう言う事になるわけです。

で、体積は？

n 次元の“体積”

『体積』と言うと、皆さんは大抵『立体の体積』を思い浮かべるでしょう。球 $D^3(r)$ の体積 $V^3(r)$ は、

$$V^3(r) = \iiint_{D^3(r)} dx dy dz$$

と云う風に、“微小体積” $dx dy dz$ (縦 dx 横 dy 高さ dz の小さな直方体を考えると良いでしょう) を、積分領域 $D^3(r)$ の内部全体について足し合わせると、それがその領域の体積になります。

いわゆる積分記号 \int は、『足し合わせるのだ』と云う行為を表しており、その右下に添えられた記号 $D^3(r)$ は足し合わせる範囲を示しています。で、何を足し合わせるかと云うと、それが微小体積 $dx dy dz$ だと、そう云う事を言っているわけですね、この式は。

しかし『4次元超球の体積』と云うものを素朴に想像してみてください。それは一体どんなものなのでしょうか？ここで言う『体積』と云う単語は、明らかに3次元の立体の体積ではありません。もう少し一般的な状況を考えている様です。

まずは体積と云う言葉の意味を少しだけ拡張しておきましょう：

一般に、 n 次元空間のとある領域 D に対して、次の(n 重)積分で得られる値を D の n 次元超体積と言います：

$$(D \text{ の } n \text{ 次元超体積}) = \int \dots \int_D dx_1 \dots dx_n$$

この定義に従うと、例えば2次元球、つまり円 $D^2(r)$ の2次元超体積 $V^2(r)$ とは、

$$V^2(r) = \iint_{D^2(r)} dx dy$$

すなわち、円の面積に他なりません。

また、1次元球すなわち線分の1次元超体積とは、その線分の長さである事も分かります。

要するに、次元に応じて長さとか面積とか体積とか別々の呼び方で呼んでいたものを統一的な呼び方で呼びましょうよと、そう言うわけですね～

円の2次元超体積

2次元球(円) $D^2(r)$ の2次元超体積(=面積) $V^2(r)$ を具体的に計算してみましょう:

$$\begin{aligned} V^2(r) &= \iint_{D^2(r)} dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} dx dy \end{aligned}$$

ここで座標を極座標 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ に変換すると、領域 $D^2(r)$ は $0 < \rho \leq r, 0 \leq \theta < 2\pi$ と云う長方形に変換されますので、

$$\begin{aligned} &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho \\ &= \int_0^r 2\pi \rho d\rho \\ &= \pi [\rho^2]_0^r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

となって皆さんがよく知っている結果が導かれます。

また、この面積の計算は別の方法でも計算する事が出来ます。それは、極座標変換をせずに件の2重積分を1つ1つ処理して行く方法です。ちょっと見てみましょう。

積分領域である半径 r の円 $D^2(r)$ を、 x 軸に平行に千切りにしてみましょう。すると、その切り口では y の値は一定ですから、 y は定数であると考えてしまいましょう。そう考えれば、切り口においては、

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2 \leq r^2 - y^2$$

と云う風になって、これは線分 $-\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2}$ ですね。もちろん y の取り方によって線分の幅は違いますが。そうしてみると、元の円はこうした線分が集まってきたと解釈する事が出来ます。

と云う事は、元々 $x^2 + y^2 \leq r^2$ と云う不等式で表現されていた円盤 $D^2(r)$ は、別の不等式:

$$\begin{cases} -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \\ -r \leq y \leq r \end{cases}$$

によっても同様に表現される事が分かります。この積分領域の別表現を使って積分を計算してみましょう。

$$\begin{aligned} V^2(r) &= \iint_{D^2(r)} dx dy \\ &= \iint_{\begin{cases} -\sqrt{r^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \\ -r \leq y \leq r \end{cases}} dx dy \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - y^2} dy \\ &= \left[y\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \sin^{-1} \frac{y}{r} \right]_{-r}^r \\ &= r^2 \{ \sin^{-1} 1 - \sin^{-1}(-1) \} \\ &= r^2 \pi \end{aligned}$$

ま、当たり前ですが同じ結果が得られました。

球の体積

次に普通の3次元の球の体積を求めてみましょう。通常球は

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

と云う不等式で表現される事が多いのですが、これもやはり xy -平面に平行な平面で切る事によって、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2 \\ -r \leq z \leq r \end{cases}$$

と書く事が出来ます。この積分領域表現を使って積分を計算すると、

$$\begin{aligned} V^3(r) &= \iiint \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2 \\ -r \leq z \leq r \end{array} \right. dx dy dz \\ &= \int_{-r}^r \left\{ \iint_{x^2+y^2 \leq r^2-z^2} dx dy \right\} dz \end{aligned}$$

ですが、この中の積分は要するに2次元球 $D^2(\sqrt{r^2 - z^2})$ の2次元体積ですから、

$$\begin{aligned} &= \int_{-r}^r \left\{ \iint_{D^2(\sqrt{r^2-z^2})} dx dy \right\} dz \\ &= \int_{-r}^r V^2(\sqrt{r^2 - z^2}) dz \\ &= \int_{-r}^r \pi(r^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left[r^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-r}^r \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} r^3 + \frac{2}{3} r^3 \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

となってこれもよく知られた結果ですね。

ここで注目すべきなのはココです↓

$$V^3(r) = \int_{-r}^r V^2(\sqrt{r^2 - z^2}) dz$$

3次元球の体積は2次元球の体積を積分する事で計算出来ると、そう云う事ですね～

4次元超球の超体積

同じノリで4次元超球の4次元超体積を求めてみましょう。4次元超球を

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2$$

ではなく、 xyz -空間に平行な3次元空間で切って、

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 - w^2 \\ -r \leq w \leq r \end{array} \right.$$

と表してみましよう。これを使って積分を計算すると、

$$\begin{aligned} V^4(r) &= \iiint \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 - w^2 \\ -r \leq w \leq r \end{array} \right. dx dy dz dw \\ &= \int_{-r}^r \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2-w^2} dx dy dz \right\} dw \end{aligned}$$

となります。このままでも積分は出来るのですが、もう少し工夫してみましょう。内側の3重積分の積分領域は半径 $\sqrt{r^2 - w^2}$ の球ですが、これを xy -平面に平行な平面群でスライスすると

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq r^2 - w^2 - z^2 \\ -\sqrt{r^2 - w^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - w^2} \end{array} \right.$$

と書けますから更にもう1次元分の積分を切り離せば

$$= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-w^2}}^{\sqrt{r^2-w^2}} \left\{ \iint_{x^2+y^2 \leq r^2-w^2-z^2} dx dy \right\} dz dw$$

となり、内側の2重積分は半径 $\sqrt{r^2 - w^2 - z^2}$ の円の面積に他なりません。したがってこれは

$$= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-w^2}}^{\sqrt{r^2-w^2}} \pi(r^2 - w^2 - z^2) dz dw$$

となり、更にこの残った2重積分の積分領域も (zw -平面内の) 半径 r の円ですから

$$z = \rho \cos \theta, \quad w = \rho \sin \theta$$

と云う風に極座標に変換すれば (原点からの距離が通常使われる r ではなく ρ で表されています。なぜなら記号 r が定数として既に使用中だからです)、

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \pi \rho (r^2 - \rho^2) d\rho d\theta \\ &= 2\pi^2 \int_0^r \rho (r^2 - \rho^2) d\rho \\ &= 2\pi^2 \left[-\frac{1}{4} (r^2 - \rho^2)^2 \right]_0^r \\ &= \frac{\pi^2}{2} r^4 \end{aligned}$$

となる事が分かります。

n 次元超球の超体積

一応今までの計算で分かっているのは

$$V^1(r) = 2r, \quad V^2(r) = \pi r^2, \quad V^3(r) = \frac{4\pi}{3} r^3, \quad V^4(r) = \frac{\pi^2}{2} r^4$$

ですが、今見たように1つ1つ次元を上げて行く事が出来、それは次のような漸化式にまとめられそうな雰囲気です：

$$V^{n+1}(r) = \int_{-r}^r V^n(\sqrt{r^2 - x^2}) dx$$

あとはこれを解けば良いだけのよう思えます。

流れから言って、 $V^n(r)$ は r^n の定数倍になっていますが、 $r = 1$ とした時の体積こそがその定数ですから $V^n(r) = V^n(1)r^n$ でしょう。別の言い方をすれば、半径 r の n 次元球の超体積は、半径が 1 の場合の r^n 倍である、と、そう云う事でして、これはまあそりゃそうだろうと云った感じですね。すると、上の漸化式は

$$\begin{aligned} V^n(r) &= \int_{-r}^r V^{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2}) dx \\ &= \int_{-r}^r V^{n-1}(1) (r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx \\ &= V^{n-1}(1) r^{n-1} \int_{-r}^r \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} dx \\ &= V^{n-1}(1) r^{n-1} \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} dx \end{aligned}$$

と変形出来ます。 n 次元超球の超体積と $n-1$ 次元超球の超体積の比が分かったと云うわけなのですが、この比であるところの最後の積分がどうにもなりません。まあ、やってみて下さい、苦労します。これは実はベータ関数やらガンマ関数やらそう云った特殊な関数が絡んでいますので幾ら計算したところで皆さんの思う様な『簡単な形』になる事はありません。

しかし、ここがポイントですが、4次元超球の計算の時にやったように2次元分の積

分を切り離して2個飛ばしの漸化式にすると事情が激変します。実際、

$$\begin{aligned} V^n(r) &= \int \cdots \int_{D^n(r)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int \cdots \int \begin{cases} x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2 - x_1^2 \\ -r \leq x_1 \leq r \end{cases} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{-r}^r \left\{ \int \cdots \int_{D^{n-1}(\sqrt{r^2 - x_1^2})} dx_2 \cdots dx_n \right\} dx_1 \\ &= \int_{-r}^r V^{n-1}(\sqrt{r^2 - x_1^2}) dx_1 \end{aligned}$$

からもう一歩進んで

$$\begin{aligned} &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} V^{n-2}(\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} V^{n-2}(1) \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}^{n-2} dx_2 dx_1 \\ &= V^{n-2}(1) \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}^{n-2} dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

とします。ここで積分領域が $x_1 x_2$ -平面の半径 r の円 $D^2(r)$ であることから極座標に変換してしまえば

$$\begin{aligned} &= V^{n-2}(1) \iint_{D^2(r)} \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}^{n-2} dx_2 dx_1 \\ &= V^{n-2}(1) \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - \rho^2}^{n-2} \rho d\theta d\rho \\ &= 2\pi V^{n-2}(1) \int_0^r \rho (r^2 - \rho^2)^{\frac{n}{2}-1} d\rho \\ &= 2\pi V^{n-2}(1) \left[-\frac{1}{n} (r^2 - \rho^2)^{\frac{n}{2}} \right]_0^r \\ &= \frac{2\pi}{n} V^{n-2}(1) r^n \\ &= \frac{2\pi}{n} r^2 V^{n-2}(r) \end{aligned}$$

である事が分かります。

改めて得られた漸化式を書けば

$$V^n(r) = \left\{ \int_{-r}^r \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} dx \right\} V^{n-1}(r), \quad V^n(r) = \frac{2\pi}{n} r^2 V^{n-2}(r)$$

です。n が偶数の場合はこの漸化式は簡単に解けて、

$$\begin{aligned} V^{2n}(r) &= \frac{\pi}{n} r^2 V^{2n-2}(r) \\ &= \frac{\pi}{n} r^2 \frac{\pi}{n-1} r^2 V^{2n-4}(r) \\ &\vdots \\ &= \frac{\pi}{n} \frac{\pi}{n-1} \dots \frac{\pi}{2} r^{2n-2} V^2(r) \\ &= \frac{\pi}{n} \frac{\pi}{n-1} \dots \frac{\pi}{2} r^{2n-2} \pi r^2 \\ &= \frac{\pi^n}{n!} r^{2n} \end{aligned}$$

である事が分かります。一方 n が奇数の時は

$$\begin{aligned} V^{2n+1}(r) &= \frac{2\pi}{2n+1} r^2 V^{2n-1}(r) \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} r^2 \frac{2\pi}{2n-1} r^2 V^{2n-3}(r) \\ &\vdots \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{2\pi}{2n-1} \dots \frac{2\pi}{3} r^{2n} V^1(r) \\ &= \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \frac{\pi}{n - \frac{1}{2}} \dots \frac{\pi}{\frac{3}{2}} r^{2n} 2r \\ &= \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \frac{\pi}{n - \frac{1}{2}} \dots \frac{\pi}{\frac{3}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}} r^{2n+1} \end{aligned}$$

ですからちょっとよく分かりませんね。偶数の場合と強引に合わせると

$$V^{2n+1}(r) = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \frac{\pi}{n - \frac{1}{2}} \dots \frac{\pi}{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} r^{2n+1} = \frac{\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{\left(\frac{2n+1}{2}\right) \left(\frac{2n+1}{2} - 1\right) \dots \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}} r^{2n+1}$$

でしょうか。 $\frac{2n+1}{2}$ の“階乗”のようなものが出て来ていますが…

取り敢えず偶数次元だけははっきり分かりました：

半径 r の 2n 次元超球 $D^{2n}(r)$ の (2n 次元) 超体積 $V^{2n}(r)$ は

$$V^{2n}(r) = \frac{\pi^n}{n!} r^{2n}$$

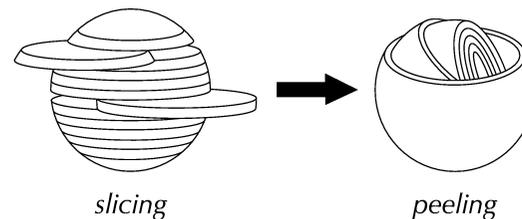
である。

スライスから皮むきへ

また別の計算方法を考えてみましょう。

玉葱を思い出して下さい。これを超球だと思いましょう。今までやって来た体積の計算は、1つ下の次元の超球の体積を利用していましたが、これは要するに玉葱をスライスして、いろんな半径の円盤（と言うかごく薄い円柱）に分解してそれぞれの体積を足し合わせているわけです。

しかし玉葱はスライスするだけが調理法ではありません。外側から一枚一枚剥いて行く事だって出来るわけですね。今度はこっちで“調理”してみましょう：



要するに、球を何枚もの半径の違う球面に分解して計算してみても良いのではないかなと言う事ですが、実は一番最初に円の面積を積分計算した時に使った極座標変換がまさに其れだったんです。もう一度良く見てみると、

$$V^2(r) = \iint_{D^2(r)} dx dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho = \int_0^r \underbrace{2\pi\rho}_{\text{円周}} d\rho = \pi [\rho^2]_0^r = \pi r^2$$

四角で囲ってある所をよく見て下さい。2πρってのは、半径 ρ の円周の長さですよ。それを半径 ρ について 1 から r まで積分しています。

同じ事を 3次元の球で考えると、半径 ρ の球面の表面積を半径 ρ について 1 から r まで積分すれば球の体積が出てくるはずですが、ちょっとやってみましょう。

$$V^3(r) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} dx dy dz$$

これを空間の極座標：

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi, & y = \rho \sin \theta \sin \phi, & z = \rho \cos \theta \\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \sin \theta \end{cases}$$

に変換すれば

$$\begin{aligned} &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \theta d\phi d\theta d\rho \\ &= \int_0^r \int_0^\pi 2\pi \rho^2 \sin \theta d\theta d\rho \\ &= \int_0^r 2\pi \rho^2 [-\cos \theta]_0^\pi d\rho \\ &= \int_0^r 4\pi \rho^2 d\rho \end{aligned}$$

となって、これは半径 ρ の球の表面積を $S^2(\rho)$ として

$$= \int_0^r S^2(\rho) d\rho$$

を意味しています。更に計算すれば球の体積が求まります：

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{4\pi}{3} \rho^3 \right]_0^r \\ &= \frac{4\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$

超球の表面積

この様に、一般に n 次元超球の体積を $V^n(r)$ 、その“表面積”を $S^{n-1}(r)$ とすると、

$$V^n(r) = \int_0^r S^{n-1}(\rho) d\rho$$

が成り立ちます。

超球面にごく薄い厚み $d\rho$ を持たせたものの超体積は近似的に（表面積）×（厚さ）ですから、これはすなわち $S^{n-1}(\rho)d\rho$ ですね。そして元々の超球をそう云ったごく薄い“薄皮”の集まり（まさに玉葱です）と考えれば、超球の超体積は小さいものから大きなものまで全ての“薄皮”の超体積の和で得られますから $0 < \rho < r$ の範囲で積分（＝足し合わせると云う事です）すれば先の式：

$$V^n(r) = \underbrace{\int_0^r}_{\text{玉葱の体積}} \underbrace{S^{n-1}(\rho) d\rho}_{\text{薄皮の体積}}$$

になると云う訳です。

これを両辺微分すれば

$$\frac{dV^n(r)}{dr} = S^{n-1}(r)$$

とも書けますね～

わざわざ“表面積”と括っているのは、 n 次元超球の表面、すなわち、方程式

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$$

を満たす点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 全体の成す集合は、 $n-1$ 次元の図形であって、単純に面積と云う単語が通用するわけではないからです。この場合も、 $n-1$ 次元超体積と云わねばなりません。

n 次元超球の“表面積”とは、 $n-1$ 次元の曲面である『 n 次元超球の表面』の $n-1$ 次元体積の事である。

円（＝ $D^2(r)$ ）の表面が円周と言う曲線、即ち 1 次元の図形であり、また、球（＝ $D^3(r)$ ）の表面が球面と言う曲面、すなわち、曲がってはいるが本質的には 2 次元の図形である事を考えるとわかり易いでしょう。

まあ、いずれにせよ、超球の表面積がわかれば体積もわかると、そう云う事なんです。じゃあ超球の表面積はどうやって計算したら良いのでしょうか？何だかほぼ同程度の難問の様な気がします。

そこで発想を変えます。 n 次元超球の体積はさっき見た様に

$$V^n(r) = V^n(1)r^n$$

と書けました。半径が 1 の時の体積の r^n 倍になります。

空間全体を均質に r 倍する変数変換においては、1 次元の図形の長さは r 倍になり、2 次元の図形の面積は r^2 倍になり、 n 次元の図形の (n 次元) 体積は r^n 倍になります。積分の変数変換を考えれば明らかでしょう。

ちなみに“表面”は $n-1$ 次元の物体なので表面積は $S^{n-1}(r) = S^{n-1}(1)r^{n-1}$ となります。

すると、 $\frac{dV^n(r)}{dr} = S^{n-1}(r)$ だったので、

$$S^{n-1}(r) = nV^n(1)r^{n-1}$$

である事がわかります。

そこでですね、こんな積分を考えてみましょう：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n$$

これは n 次元の Gauss 積分と呼ばれていて、それぞれの変数ごとに積分出来てしまいますから有名な

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}$$

を使えば案外簡単に求まってしまう：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2} dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

これをですね、積分の仕方を変えて、表面方向 ($n-1$ 次元分) と半径方向 (1 次元分) に分解して (まあ、要するに極座標変換です) 積分してみましょう。

参考までに一般の n 次元での極座標は、

$$\begin{cases} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\ &0 < \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2} < \pi, \quad 0 < \theta_{n-1} < 2\pi, \quad 0 < r < \infty \end{cases}$$

となつて、Jacobian は $r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}$ です。

すると被積分関数は表面方向で一定ですから表面方向の積分は定数を積分する事になって表面積がそのまま出て来てしまいます：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} S^{n-1}(r) dr \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} nV^n(1)r^{n-1} dr \\ &= nV^n(1) \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

ここで $r^2 = z$ と云う変数変換を施せば

$$\begin{aligned} &= nV^n(1) \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{n}{2} V^n(1) \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{n}{2}-1} dz \end{aligned}$$

となりますが、これは Γ -関数：

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{p-1} dz$$

を使って

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \frac{n}{2} V^n(1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

と書く事が出来ます。

以上から

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} V^n(1) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

すなわち、

$$V^n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad V^n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n$$

が分かります。

半径 r の n 次元超球 $D^n(r)$ の (n 次元) 体積 $V^n(r)$ は

$$V^n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n$$

である。

Γ-関数には

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^\infty e^{-z} z^p dz \\ &= [-e^{-z} z^p]_0^\infty - \int_0^\infty \{-e^{-z}\} p z^{p-1} dz \\ &= p \int_0^\infty e^{-z} z^{p-1} dz \\ &= p \Gamma(p) \end{aligned}$$

と云う著しい性質がありますので、

$$V^n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n$$

とも書く事が出来ますし、特に p が自然数 n の時には、 $\Gamma(n+1) = n!$ となるので、偶数次元の超球の体積は

$$V^{2n}(r) = \frac{\pi^n}{n!} r^{2n}$$

となって、当然ながらさっきと同じ答えになります。

また、奇数次元の時も

$$\begin{aligned} V^{2n+1}(r) &= \frac{\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{2n+1}{2} + 1)} r^{2n+1} \\ &= \frac{\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{(\frac{2n+1}{2}) \Gamma(\frac{2n+1}{2})} r^{2n+1} \\ &= \frac{\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{(\frac{2n+1}{2}) (\frac{2n+1}{2} - 1) \Gamma(\frac{2n+1}{2} - 1)} r^{2n+1} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{(\frac{2n+1}{2}) (\frac{2n+1}{2} - 1) \dots \frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2})} r^{2n+1} \end{aligned}$$

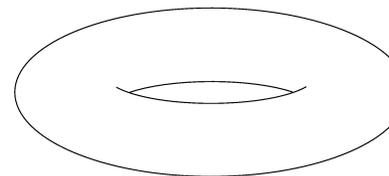
であり、

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = \int_0^\infty e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

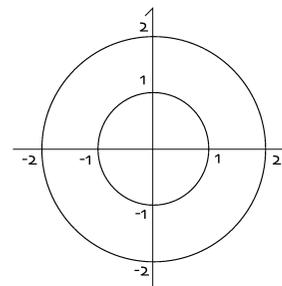
と合わせればやはりさっき得た結果と一致していますね。

練習問題

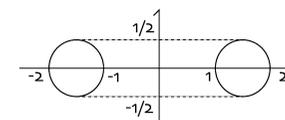
1. 正の整数 n に対して、 $\Gamma(n+1) = n!$ である事を証明して下さい。
2. 積分： $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ を求めて下さい。
3. 楕円体： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ の体積を求めて下さい (a, b, c は全て正とします)。
4. 図のドーナツ (正式にはトーラスと言います) の体積を求めて下さい：



xy平面での断面図



xz平面での断面図



5. xy 平面の第1象限にある領域 D を x 軸の周りに1回転させて得られる立体の体積 V は

$$V = \iint_D 2\pi y \, dx dy$$

与えられますが、あなたはこれをどの様に説明しますか。

単位超球の体積と Kissing number

ここで話を単位超球に限定してその体積を考えます。偶数次元だと計算し易いので偶数次元だけ考えて表にしてみましょう：

次元	2	4	6	8	10	20	100	...
単位超球の体積	3.14	4.93	5.16	4.05	2.54	0.0257	2.31×10^{-40}	...

どうですかね？ちょっと奇妙ですよ。6次元あたりをピークにして、それ以降は次元が大きくなるにつれて単位超球の体積はどんどん小さくなって行きます。

何ですかねこれは？次元が大きくなると単位球は小さくなるのでしょうか？そんなバカな！

もちろんそう言うわけではありません。

体積と一口に言っても、次元が異なればそれらは別のものだったわけです。2次元の体積とはすなわち面積の事でした。例えば面積と普通の3次元の体積を単純に比較出来るものではないですよ。2次元の1辺が1の正方形の(2次元)体積は1です。3次元の1辺1の立方体の(3次元)体積もまた1ですが、だからと云ってこれら2つの図形のどちらが大きいとか小さいとか、そんな風には言いませんよね。

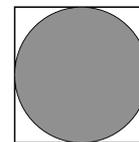
ただ、単位超球は、どんな次元においても1辺2の超立方体 $[-1, 1]^n$ にすっぽり入るわけですが、上の結果から分かる事は、次元が大きくなるにつれて超立方体に超球を入れた時の隙間が大きくなって行くと言う事です。

もう、100次元とか見ると隙間だらけですな～

参考までに超立方体の体積と超球の体積の比も計算しておきましょう：

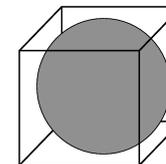
次元	1	2	3	4	6	8	10
単位超球の体積	2	3.14	4.19	4.93	5.16	4.05	2.54
単位超立方体 $[-1, 1]^n$ の体積	2	4	8	16	64	256	2^{10}
超立方体中に超球の占める割合	100%	78.5%	52.4%	30.8%	8.07%	1.59%	0.25%

10次元では、超立方体に内接する超球の体積は超立方体のわずか0.25%ですね。高次元空間って何だかえらい事になってますな...



78.5%

まあ、そんなもんか



52.4%

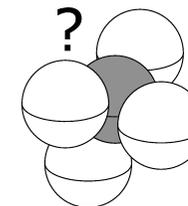
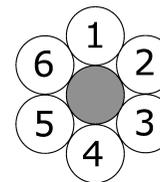
意外に球って小さいのね

この様に、次元が高くなるほど超球の周りにはたくさんのスペースがある様ですね。そこでこんな問題があります：

問題： n 次元単位超球の周りには、同時に幾つの単位超球が接する事が出来るでしょうか？この最大数を n 次元の Kissing number と言います。

次元が高くなれば単位超球の周りにはスペースがありますから案外たくさんの単位超球が接する事が出来そうだが、まあ、低次元から考えてみましょうか。

1次元では、答えは2つです。なぜなら1次元の単位超球とは区間 $[-1, 1]$ だったからです。また、2次元では、つまり単位円の周りに幾つの単位円が同時に接するかが、これは10円玉を7枚用意して実際にくっ付けてみれば分かりますが、1つの10円玉の周りに6個の10円玉が同時に接する事が出来ます。このとき、周りの6枚も隣どうしぴったり接していますね！



さて、それでは3次元ではどうでしょうか？頭の中で絵が描けますか？2次元の時の結果を応用すれば10個は簡単に分かりますがまだ隙間がありますね。上手くやって下さい。あなたは幾つ並べられましたか？

あなたの答え： 個

でも本当にそれ以上並べられませんか？隙間がまだありますよね？その隙間を上手く1つにまとめてやって1個の超球が接するぐらいのスペースを何とか作り出す事は出来ないでしょうか。

この問題については、I. Newton と J. Gregory の対話が有名です（1694年）。12個並べられるのは確かだが、すき間を寄せ集めてもう1個並べられるかどうか、結局Newtonにも分かりませんでした。そしてそれから200年以上経った1953年、B. L. van der Waerden と K. Schutte によって12個である事がようやく証明されました。

次の関心はもちろん4次元です。面心立方格子ライクな配置を考えて超球面上の次の24点

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1, 0, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, 0, \pm 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, 0, 0, \pm 1), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \pm 1, \pm 1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \pm 1, 0, \pm 1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, \pm 1, \pm 1) \end{aligned}$$

で接する様にすれば24個置けるので、24以上である事はほぼ自明ですか。実は25以下である事もよく知られていたんですが24なのか25なのかはつい最近まで誰にも分かりませんでした。

O. Musin が24個である事を証明したのは実に2003年ですよ、あんだ。彼は更に3次元の場合に12個である事の別証明（割と簡単らしい）も与えました。

この様な歴史が示す通り、超球に最大幾つの超球が同時に接する事が出来るかと云う問題はとても難しいんです。5次元より先では8次元（240個）と24次元（196560個）を除いてまだ未解決です。

え？なんで24次元は分かってるんだって？

そこら辺が数学の不思議ですかね～

この宇宙は24次元だと云う人もいますからね。

しかし、じゅうきゅうまんろくせん個かぁ～ すごいな～

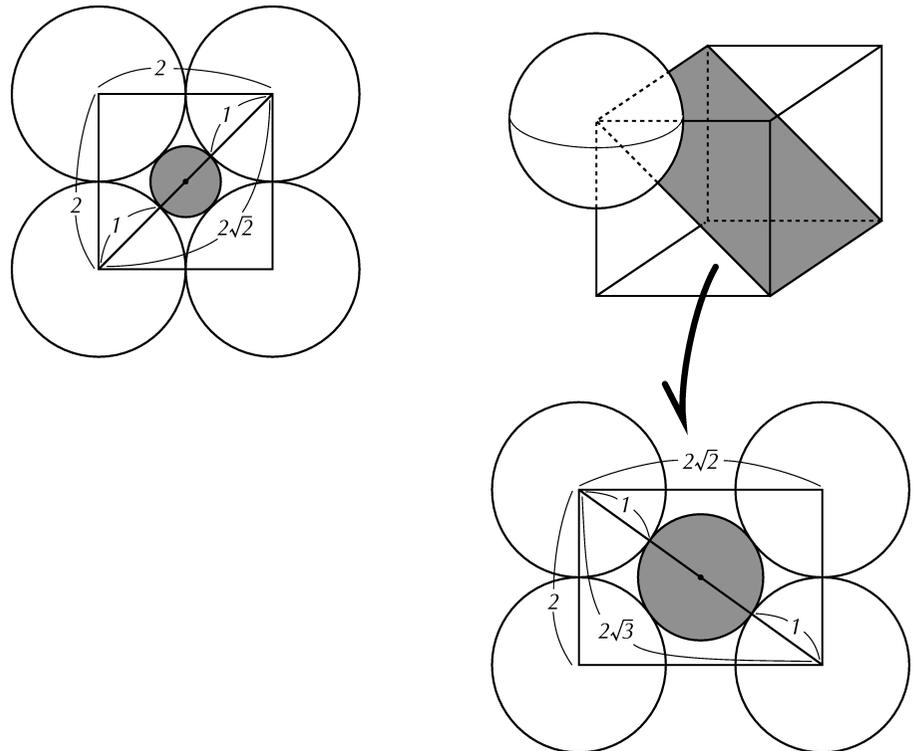
高次元の更なる不思議

また、こんな問題も考えてみると面白いでしょう。 n 次元単位超立方体 $[-1, 1]^n$ の各頂点（ 2^n 個）に、そこを中心とした単位超球を置きます。

するとその 2^n 個の単位超球に挟まれた所、ちょうど単位超立方体の中心付近に空間が開きますね。そこに、超球を入れようと思うのですが、半径幾つの超球なら入るでしょうか？

まずは2次元ですが、これは簡単ですね！ちょうど半径 $\sqrt{2}-1$ の円（=2次元超球）が入ります。

次に3次元。これも斜めに平面で切って考えればすぐに分かります：



はい、ちょうど半径 $\sqrt{3}-1$ の球（=3次元超球）が入ります。

で、4次元はと云うと、これは何となく $\sqrt{4}-1=1$ ではないかと、まあ、そう予想されるわけですね～ホントかな？

実際、 n 次元空間では半径 $\sqrt{n}-1$ の超球がすっぽり収まる事が知られています。興味のある人は自分で証明してみてください（めっちゃめっちゃ難しいとは思うけど、チャレンジする事に意味がある）。

で、ですね、まあ、それは認めるとしましょう。しかしですよ、よく考えてみて下さい。5次元空間だと単位超立方体の各頂点に置かれた 2^5 個の単位超球達の真ん中に開いたスペースにすっぽり収まる超球の半径は、 $\sqrt{5}-1 > \sqrt{4}-1=1$ ですよ？半径が1より大きくなってしまいます!!! これでは最初の単位超立方体からはみ出してしまいますね～なんじゃそりゃ～